



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Álgebras de Steinberg e invariantes homológicos

Valentín Nico

Director: Dr. Guillermo Cortiñas

Fecha de Presentación: 24 de febrero de 2026

A los presentes

Porque *estar* es algo más que ocupar un lugar.

Omitir *siempre* una palabra, recurrir a metáforas ineptas y a perífrasis evidentes, es quizá el modo más enfático de indicarla.

JORGE LUIS BORGES, 1941
El jardín de senderos que se bifurcan

A mi papá, Martín Nico, por alimentarme para poder pensar y por tu humor que se esconde sutilmente en estas líneas. A mi mamá, Laura Luaces, por tu cariño y por los genes perfeccionistas que predicen este trabajo. A ambos, por facilitarme *llegar* a la facultad.

A mi familia extendida por el acompañamiento incondicional. A mi tío, Demián Luaces, por enseñarme a escuchar y a transmitir la música y la montaña: en esos espacios creció gran parte de mi Matemática. A Ricardo Feldman y Eva Zeitune por interesarse diariamente en mí y dejar siempre —en todo sentido de la expresión— abiertas sus puertas.

A mi abuelo, cuyo nombre y decir me encargué de explicitar en este documento; por ser el primero en enseñarme ecuaciones y el último con quien esperaba hablar de igual a igual. Me alegro que distintas circunstancias ajetreadas de la vida nos hayan llevado a conectarnos; te debo y dedico la incesable labor del pensamiento crítico.

A Ethel Parietti de Angelini, por ser la persona más pragmática que conozco. Por revivir la Ciencia en mí y ayudarme, con toda la energía que te caracteriza, a pasar de página en el momento que lo necesitaba. Por tener la brillante idea de llevarme...

A la Olimpíada Argentina de Química, por abrir muchas puertas académicas de mi vida. A Máximo Mele por tu pasión incomparable y por estar disponible para pensar (de) todo. A Juan Pablo Marcolongo, por acompañarme a lo largo de estos años y por determinar mi primer acercamiento a la investigación: sos un referente docente y un mentor sin igual para mí.

Al Colegio de la Ciudad, por ofrecerme mi primera —y prematura— instancia laboral, que acompañó toda mi carrera. En particular, a Graciela Morales, por confiar en mí desde el inicio.

A todos mis alumnos; pero en particular a Tadeo Silva Diaz, quien me mostró durante los últimos cuatro años que la Matemática puede despertar donde menos te lo esperes. Estoy orgulloso de todos tus logros pasados y de todos los que vendrán.

A mis *Alumnos de Álgebra II*, quienes fueron mi primera exposición a un público constante y apasionado: una muestra de que vale la pena forjar una comunidad que nos reúna en pos de nuestros intereses. En quienes espero seguir depositando parte de mi forma de pensar y que no configuran una instancia particular del párrafo anterior, por haberse convertido en mis amigos. En particular, a Maitena Andersen por la puntillosa inspección de este documento; admiro tal dedicación.

A todos mis compañeros de la facultad, por llenar el aula de conocimiento y compartir Ciencia conmigo. En particular, por motivos no matemáticos, a: Boris Burd, por tu satírico lenguaje; Joaquín Fernandez, por nuestra confianza emocional; Juan Galotto, por atravesar la tesis a la par mía; Francisco Greco, por mostrarme a Borges; Numa Grinberg, por tu templanza diaria; Juan Perez Garber, por tus ideas y a Pedro Peña, por tus viajes interprovinciales.

A mis amigos más antiguos, porque vernos contextualiza todo lo que me llevó hasta este párrafo: Severino Freund, por tu donaire natural; Santiago Ormaechea, por reencontrarnos científicamente y Jano Vitale, por tu presencia inexorable.

A mis amigos *pandémicos*, por amortiguar un año complicado de nuestras vidas y determinar mi vocación académica: Lautaro Braslavsky, por tus contraejemplos; Florencia Ciocan, por tu proactividad y compañía; Camila Mildiner, por tu energía lúdica; Joaquín Paszkowski, por ser mi referente creativo —incluyendo, por supuesto, tu cocina—; Iván Sajnovsky, por tu simpática disposición y Gonzalo Torres, por tu virtuosa curiosidad.

A aquellos amigos que indirectamente influyeron en el desarrollo de esta tesis. En particular, a: Lourdes Aro, Nicole Brey, Daniela Cicelli, Dante Ferraro, Zenón Mabres, Iván Moyano, Julieta Navarro, Augusto Nicola, Pedro Nigri, Iván Paszkowski, Renata Penchaszadeh, Sasha Pereiras, Camila Pollitzer, Agustina Salomone y Catalina Ytsma.

A quien le debo haber estudiado esta carrera y con quien me encanta crecer a la par. Por la determinación que te caracteriza y mediante la cual construimos, año a año, esta profusa amistad. Me resulta invaluable haberte conocido y que, desde aquel suceso, nos encontremos en cada descubrimiento de la vida. A Julián Feldman, porque no aprender de vos habría sido una *fatalidad irremontable*.

A quienes debo el devenir de mi pensamiento categórico, que alguna vez Eduardo Dubuc vio crecer en el Aula de Seminarios —quien, por supuesto, forma parte de la lista—. A Janou Glaeser, por dejarme *forzarte* a leer el artículo de Steinberg, como el aporte más transparente que hiciste en esta tesis: hay tantos otros¹ que dejo implícitamente ver. A Francisco Valdez,

¹Que esta línea corrija la omisión de la verdad: a Janou por oficiar de corrector de este preámbulo. Y que esta dé cuenta que corregiste la anterior. Y a su vez, esta por la anterior. Y...

por compartir conmigo una monografía y responder mis dudas *cuánticas*. A Julia Zanette, por mostrarme la Teoría de Categorías, determinando para mí más que solo una manera de pensar. Fuiste un antes y un después para mi desarrollo académico y personal; por tu amistad.

Al Cuarto 11 y sus allegados: Nicolás Agote, Carlos Antunes, Guido Arnone, Darío Aza, Agustín Barreto (y tu alter ego, la Comisión de Espacios), Lucía Busolini, Ignacio Córdoba, Lucas de Amorin, Vittorio Di Fraia, Cecilia Duhau, Leopoldo Lerena, Devarshi Mukherjee, Sol Nabot, Pablo Perella y Santiago Ramírez. Por darme un espacio donde pensar y donde aprender: un espacio del que hoy me siento parte. En especial a vos, Guido, por todo el esfuerzo que hiciste por mí, desde que fuiste mi docente hasta que te convertiste en mi compañero de trabajo y un gran amigo. Es difícil de explicar el rol que jugás en mi profesionalismo: son pocas las palabras que están en este documento y no descubrí por vos.

A los jurados de esta tesis: Gabriel Minian e Hipólito Treffinger. En particular, a Gabriel por lo que me transmitiste como docente de Álgebra II y Topología; por tu carisma espectacular.

Al único con suficiente altura como para ser referido mediante un sobrenombre: a Willie. Por tu calidez como director y por la confianza y comodidad que siento cada vez que entro en tu oficina. Por aceptarme como alumno y por acompañar —sin jamás cuestionarlas— mis ansias de celeridad. Valoro profundamente cada aporte meticuloso que hacés a lo que escribo.

Por tu amor perenne. Por acompañar, escuchar y apreciarme; por tu música, tu naturaleza y tu aventura. Esta tesis te vio leyendo símbolos y palabras que no te importan, pero sorpresivamente te interpelan. Ese esfuerzo y dedicación es solo una muestra de cómo tu presencia significa cada día mi —o nuestro— crecer. Por hacerme muy feliz. Persigo en los libros de la Biblioteca de Babel las palabras que ordenan tal felicidad, pero se escapan de los márgenes (o quizás no alcance con palabras). Espero encontrarlas con más años a tu lado, Renata Feldman.

A la Universidad de Buenos Aires y al Hospital Garrahan, como instituciones públicas que formaron parte de mi vida y por las cuales hoy puedo estar escribiendo esta tesis. Es mi deseo poder devolverle al sistema público, a través de mi vocación científica, parte de la oportunidad que me dio.

Índice general

Introducción	9
1. Grupoides, semigrupos y sus álgebras	17
1.1. Grupoides topológicos, étales y amplios	17
1.1.1. El ABC de los grupoides	17
1.1.2. Los ejemplos centrales	25
1.2. Estructura local de grupoides étales propios y Hausdorff	28
1.3. Semigrupos	34
1.3.1. Álgebras de semigrupos	34
1.3.2. El grupoide de gérmenes	36
1.4. El álgebra de Steinberg	39
1.5. Acciones de grupoides	43
1.5.1. Espacios sobre un grupoide	44
1.5.2. Homología de grupoides	50
2. Haces sobre grupoides étales	53
2.1. Sobre sitios, los haces	53
2.2. Haces de módulos sobre un grupoide amplio	56
2.2.1. La equivalencia de Steinberg	57
2.3. Acciones propias, libres y básicas	58
2.4. Extensión y restricción de haces	63
2.4.1. Una posible estrategia	68
2.5. Módulos proyectivos sobre grupoides propios y libres	68
2.5.1. El morfismo de comparación	73
3. La perspectiva homotópica	79
3.1. Espacios sobre una categoría	79
3.2. (Co)límites homotópicos	85
3.2.1. Mapas de ensamble	91
3.3. Espectros	92
3.3.1. Teorías de homología	96
3.3.2. Espectros sobre una categoría	98
3.4. La conjetura de Farrell-Jones	100

4. Conjeturas de isomorfismo sobre grupoides étales	105
4.1. La categoría de órbitas	105
4.2. La categoría lineal de un grupoide amplio	112
4.2.1. Isomorfismos en K-teoría	117
4.3. La conjetura de Farrell-Jones para grupoides amplios	118
A. Topología general	119
A.1. Espacios de Stone	119
A.2. La categoría conveniente	122
B. K-teoría algebraica	127
B.1. Un poco de historia	127
B.2. Construcción de la K-teoría para una categoría lineal	132
Bibliografía	137

Introducción

La Matemática es como la espiritualidad:
está detrás de todo...
El tema es saber buscarla.

GUSTAVO LUACES

El uso del sufijo *-oide* excede el rubro de la disciplina científica. Pese a no ser un sufijo de carácter estrictamente matemático, su significado en este marco se aleja —por suerte— del matiz despectivo con el que lo hallamos en el resto de la literatura. En tanto al autor le compete, el único significado consistente con el que se usa la *oidificación* radica en la Categorificación Horizontal [[nLa](#)]: el proceso de interpretar una estructura algebraica como una categoría con un solo objeto, identificar sus propiedades y luego abandonar el requerimiento de tamaño. Surge así el principal objeto de estudio de este trabajo: los grupoides.

La palabra *grupoide* abandonó (al menos en el diccionario algebrista) el inocente significado que emerge de la yuxtaposición de *grupo* y el sufijo *-oide* tras la publicación del trabajo fundacional de Jean Renault [[Ren80](#)]. Fue en el año 1980 cuando este trabajo mostró que el uso de grupoides *étales* para la construcción de C^* -álgebras proveía un lenguaje común para diversos objetos algebraicos preexistentes; desde el estudio de sistemas dinámicos, pasando por la Teoría de Grafos y otros objetos combinatorios, hasta la Teoría de Lie. Resultó evidente que estudiar la K -teoría u otros invariantes homológicos [[CM00](#), [Exe08](#), [Ste10](#), [Ste14](#), [Pat12](#), [KPRR97](#)] de las álgebras asociadas a estos grupoides es una prioridad.

En esta tesis estudiaremos conceptos que atraviesan conjuntamente tanto a los espacios topológicos como a los grupos: las álgebras de grupoides, las acciones de grupoides, la homología de grupoides, los haces sobre grupoides; entre otros. En este marco, nuestra principal y constante labor será la de convencer al lector de la siguiente moraleja:

Los grupoides son una generalización conjunta de los grupos y los espacios topológicos.

Como un objetivo adicional, esperamos que este trabajo configure una completa y autocontenida introducción a los grupoides topológicos, accesible para cualquier conocedor de la Teoría de Categorías, la Topología y el Álgebra Abstracta básica; además de contribuir al entendimiento de algunos invariantes homológicos asociados a las álgebras de grupoides.

Estado de situación y resultados principales

Los grupoides étales constituyen una clase particularmente manejable de grupoides topológicos, en la que la función dominio es un homeomorfismo local. Esta condición impone un fuerte control local sobre la estructura del grupoide y permite transferir técnicas discretas al contexto continuo. Las **bisecciones**, es decir, abiertos sobre los cuales dominio y rango se restringen a homeomorfismos con su imagen, generalizan a los elementos de un grupo y hacen posible desarrollar argumentos locales tanto en el sentido topológico como en el categórico.

Un ejemplo arquetípico de grupoide étale es aquel que codifica la acción de un grupo discreto G sobre un espacio X , llamado **grupoide de transformación** $G \ltimes X$. Sus *unidades* (palabra reservada para referirnos a los objetos de un grupoide) son los puntos del espacio X y las flechas son pares del espacio producto $G \times X$, que representan la acción $G \curvearrowright X$. A continuación, enunciamos el principal resultado original de nuestro trabajo, que pone en evidencia las dos connotaciones de *local* en un grupoide étale. En efecto, probamos que un grupoide étale Hausdorff y **propio** (Definición 1.2.2) coincide localmente con uno de transformación:

Teorema (1.2.6). Todo grupoide étale propio Hausdorff $\mathcal{G}$ es localmente isomorfo a un grupoide de transformación. Es decir, para cada $x \in \mathcal{G}^{(0)}$ existe un entorno abierto $U_x \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ de x para el cual el grupoide étale $\mathcal{G}_{U_x}^{U_x} = (\mathbf{d}, \mathbf{r})^{-1}(U_x \times U_x)$ es isomorfo a un grupoide de transformación:

$$\mathcal{G}_{U_x}^{U_x} \cong \mathcal{G}_x^x \ltimes U_x.$$

Mostramos mediante contraejemplos que si el grupoide no es Hausdorff (1.2.13) o el grupoide no es propio (1.2.14) entonces el resultado no es cierto; esto indica que las hipótesis del teorema son minimales. Más aún, probamos que nuestro resultado anterior recupera un hecho conocido sobre acciones de grupos:

Corolario (1.2.12). Sea G un grupo discreto actuando en un espacio localmente compacto Hausdorff X de manera propia. Entonces, para todo $x \in X$ y cada entorno abierto $x \in U$ existe un abierto $x \in U_x \subseteq U$ que es invariante por la acción del estabilizador de x .

Como un caso particular de los ya mencionados grupoides étales, los grupoides **amplios** serán aquellos de primordial interés para nuestro trabajo. La propuesta de Steinberg en su artículo [Ste10] es la de introducir un objeto algebraico $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ asociado a cada grupoide amplio $\mathcal{G}$ y cada anillo discreto ℓ . Estudiada por múltiples autores [Li25, Mil24, Ste14, CS15, CZ22], el **álgebra de Steinberg** sobre un anillo conmutativo discreto ℓ es una generalización conjunta entre el ℓ -álgebra de funciones continuas compactamente soportadas sobre un espacio y el ℓ -álgebra de grupo, para ℓ un anillo discreto base. A su vez, generaliza álgebras de origen combinatorio, como las Álgebras de Leavitt [AMP07] o las Álgebras de Exel-Pardo [EP17]. El estudio de su homología y su K -teoría aparecerán naturalmente en esta tesis.

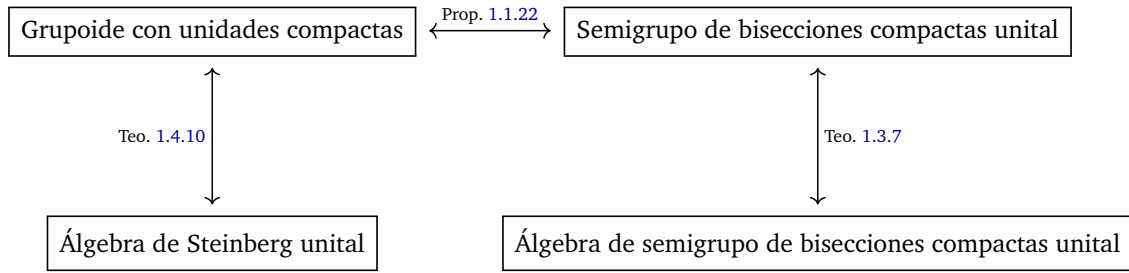
Uno de los aspectos combinatorios de los grupoides étales que será recurrente en nuestro trabajo —y que es imposible de eludir— es su vínculo con los semigrupos inversos. El siguiente teorema debido a Paterson dice que todo grupoide étale se obtiene canónicamente de su semigrupo inverso de bisecciones:

Teorema ([Exe08, Proposition 5.4]). Todo grupoide étale $\mathcal{G}$ es isomorfo al grupoide de gérmenes dado por la acción canónica de su semigrupo de bisecciones abiertas en $\mathcal{G}^{(0)}$.

Es un hecho conocido en el folklore que la recíproca del teorema anterior es falsa: no todo semigrupo inverso es el semigrupo de bisecciones abiertas de un grupoide étale. En un espíritu similar, uno de los aportes originales de nuestro trabajo es el siguiente resultado:

Teorema (1.3.9). Existe un semigrupo inverso que no es isomorfo al semigrupo inverso de bisecciones abiertas y compactas de ningún grupoide amplio.

Para probarlo, mostramos que el semigrupo de bisecciones abiertas y compactas de un grupoide amplio es unital si y solo si su álgebra de semigrupo es unital (1.3.7). Esta equivalencia no vale para semigrupos inversos arbitrarios, como lo dice nuestro Contraejemplo 1.3.6. Las demostraciones de estos resultados originales ofrecen argumentos novedosos que, ante una ligera modificación, muestran resultados ya conocidos sobre los grupoides amplios (1.1.22 y 1.4.10), según lo sintetiza el siguiente diagrama:



Una de las grandes metas de la Teoría de Grupoides en la actualidad [CL26, BP24, Bön20, CR23, FSW14, Laf07, MS00b, MS00a, MS24, STY02, Tu00] es la de extender diversas conjeturas de isomorfismo formuladas para grupos, como la de Baum-Connes o la de Farrell-Jones. En este trabajo, presentamos una formulación de la conjetura de Farrell-Jones, debida a Davis y Lück.

En su artículo fundacional [DL98], Davis y Lück definen la **categoría de órbitas** $\text{Or}(G, \mathcal{F})$ para un grupo G y una familia de subgrupos $\mathcal{F}$, que consiste de G -espacios discretos de la forma G/H , para H un subgrupo de la familia. Para cada anillo conmutativo ℓ , construyen un funtor con valores en la categoría de espectros $\mathbb{K}_\ell : \text{Or}(G) \rightarrow \mathbf{Sp}$ que envía G/H a un espectro equivalente al de la K -teoría de $\ell[H]$. Su formulación de la conjetura de Farrell-Jones dice que el colímite homotópico de este funtor computa la K -teoría de $\ell[G]$ para $\mathcal{F} = \mathcal{VCYC}$ la familia de subgrupos virtualmente cíclicos (aquellos que admiten un subgrupo cíclico de índice finito):

Conjetura (Conjetura de Farrell-Jones 3.4.12). Dados G un grupo y ℓ un anillo, el Mapa de Ensamble asociado a la familia de subgrupos virtualmente cíclicos induce isomorfismos en los grupos de homotopía

$$\mathcal{A}ss_{\mathcal{VCYC}} : \pi_* \left(\text{hocolim}_{\text{Or}(G, \mathcal{VCYC})} \iota_{\mathcal{VCYC}}^* \mathbb{K}_\ell \right) \xrightarrow{\cong} K_*(\ell[G]).$$

Esta conjetura presenta numerosas aplicaciones en preguntas abiertas de otras áreas. A modo de ejemplo, vale la pena mencionar que, mediante el uso de la Teoría de Cirugías [LM24],

es posible probar que si la conjetura de Farrell-Jones es cierta para un grupo G , entonces vale la siguiente conjetura debida a Borel:

Conjetura (Borel para un grupo G). Si M y N son dos variedades topológicas cerradas y asféricas tales que $\pi_1(M) \cong \pi_1(N) \cong G$, entonces cualquier equivalencia homotópica² es homotópica a un homeomorfismo.

Utilizando el lenguaje de colímites homotópicos y mapas de ensambles, Cortiñas y Li proponen una generalización de la conjetura de Farrell-Jones en su artículo en preparación [CL26]. Nos encargaremos a lo largo del trabajo de describir las herramientas de teoría de homotopía necesarias para comprender la formulación de esta conjetura —tanto en el caso de los grupos como para grupoides amplios—. Rumbo a una generalización, reemplazaremos el álgebra de grupo $\ell[G]$ por el álgebra de Steinberg $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ y propondremos una categoría $\text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ de órbitas para un grupoide amplio, para cada familia de subgrupoides $\mathcal{F}$.

En la Observación 4.1.12 mostramos que la generalización de la categoría de órbitas propuesta por Cortiñas y Li no coincide con una subcategoría plena de los $\mathcal{G}$ -espacios, para $\mathcal{G}$ un grupoide. No obstante, uno de nuestros aportes es dar una demostración original del siguiente enunciado, atribuido a Xin Li, que dice que coinciden *localmente*³:

Teorema (4.1.13). Sean $\mathcal{G}$ un grupoide étale, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ subgrupoides abiertos pertenecientes a una familia de subgrupoides $\mathcal{F}$. Entonces todo morfismo de $\mathcal{G}$ -espacios $\mathcal{G}/\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{K}$ coincide localmente con uno de $\text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$.

Uno de los motivos por los que el autor considera que esta generalización de la categoría de órbitas es la adecuada proviene del siguiente hallazgo:

Proposición (4.1.9). Sean $\mathcal{G}$ un grupoide étale y $\mathcal{F}$ la familia de abiertos de $\mathcal{G}^{(0)}$. Entonces, la categoría $\text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ es isomorfa a $\mathcal{O}(\mathcal{G})$, el sitio de haces de un grupoide étale.

En su Tesis de Licenciatura [Gla25], Glaeser define un sitio de Grothendieck $\mathcal{O}(\mathcal{G})$, asociado a cada grupoide étale. Como es de esperar, los haces sobre ese sitio generalizan los haces de espacios topológicos. Gracias al aporte de Steinberg en su artículo [Ste14], los haces sobre grupoides étales articulan la siguiente equivalencia de categorías:

Teorema ([Ste14, Theorem 3.4]). Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio y ℓ un anillo conmutativo, entonces la categoría $\mathbf{Sh}_\ell(\mathcal{G})$ de haces de ℓ -módulos sobre $\mathcal{G}$ es equivalente a la de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulos.

En su artículo [Mil24], Miller define una noción de extensión y restricción de escalares para grupoides y sus subgrupoides abiertos. Uno de los aportes de este trabajo fue, a través de la equivalencia anterior de Steinberg, definir una versión explícita de la extensión y restricción a nivel de haces para una familia concreta de subgrupoides:

Corolario (2.4.10). Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio y $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ es un abierto compacto $\mathcal{G}$ -invariante,

²Es un hecho clásico que el grupo fundamental determina el tipo homotópico de variedades cerradas y asféricas.

³Precisamos el significado de *localmente* en el propio enunciado del Teorema 4.1.13.

se tiene la siguiente adjunción:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Ind}^U & \\ \text{Sh}_\ell(\mathcal{G}) & \begin{array}{c} \perp \\ \text{Res}^U \end{array} & \text{Sh}_\ell(\mathcal{G}_U^U) \end{array}$$

Mediante esta adjunción, proponemos una estrategia que traduce el problema de hallar módulos proyectivos sobre el álgebra de Steinberg a uno topológico. A modo de aplicación, obtuvimos el siguiente teorema de clasificación para cuando el grupoide es un espacio:

Teorema (2.5.11). Sean X un espacio topológico localmente compacto, Hausdorff y totalmente desconexo, ℓ un anillo conmutativo discreto y P un $\mathcal{A}_\ell(X)$ -módulo (a derecha) proyectivo y finitamente generado. Entonces, existen abiertos compactos $U_1, \dots, U_m \subseteq X$ y ℓ -módulos proyectivos finitamente generados $Q_1, \dots, Q_m$ junto a un isomorfismo de $\mathcal{A}_\ell(X)$ -módulos

$$P \cong \bigoplus_{i=1}^m Q_i \otimes_\ell C_c(U_i, \ell) \cong \bigoplus_{i=1}^m Q_i \otimes_\ell \chi_{U_i} \mathcal{A}_\ell(X).$$

Una de las grandes implicancias de la equivalencia de Steinberg es dar condiciones para que las álgebras de Steinberg de dos grupoides amplios sean equivalentes Morita. No obstante, las equivalencias Morita halladas son sumamente no explícitas [CS15, CM00]. Para el caso donde $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio propio y libre, resulta, por la equivalencia de Steinberg, que su álgebra de grupoide es equivalente Morita a la de su espacio de órbitas $\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$. Uno de nuestros resultados originales es dar una versión explícita de esta equivalencia Morita:

Teorema (2.3.17). Sea $\mathcal{G}$ un grupoide libre y propio y ℓ un anillo conmutativo discreto. Entonces hay una equivalencia de categorías:

$$\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G})\text{-mod} \xrightarrow[\simeq]{-\otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell)} \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})\text{-mod}.$$

Utilizando esta equivalencia explícita y la clasificación de módulos proyectivos anterior, extendimos lo sabido en el caso de espacios para cualquier grupoide libre y propio. Para ello, definimos un morfismo canónico de comparación $c_\mathcal{G}: K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) \rightarrow K_0(\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}))$ entre la homología del grupoide y la K -teoría del álgebra de Steinberg de cualquier grupoide amplio $\mathcal{G}$. A continuación, probamos que este morfismo es sobreyectivo si $\mathcal{G}$ es libre y propio:

Corolario (2.5.19). Sean $\mathcal{G}$ un grupoide amplio propio y libre y ℓ un anillo conmutativo discreto. Entonces, el morfismo de comparación $c_\mathcal{G}: K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) \rightarrow K_0(\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}))$ es un epimorfismo.

Finalmente, utilizando los resultados de Arnone, Cortiñas y Mukherjee en [ACM24], concluimos que, en el caso donde el grupoide es Hausdorff y el anillo base es el de los enteros, su homología en grado cero computa la K -teoría en grado cero del álgebra de Steinberg:

Teorema (2.5.22). Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio Hausdorff el morfismo $c_\mathcal{G}: H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) \rightarrow K_0(\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}))$ es un monomorfismo. En particular, si $\mathcal{G}$ es propio y libre entonces el morfismo es un isomorfismo:

$$H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) \cong K_0(\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})).$$

Organización del texto

En el Capítulo 1 introducimos las definiciones de grupoide topológico, étale y amplio, así como la del semigrupo de bisecciones abiertas o compactas, y exhibimos las propiedades o ejemplos centrales que se desprenden de estos conceptos iniciales. En la Sección 1.2, enunciamos y probamos nuestro teorema principal sobre la estructura local de grupoides étales y propios y discutimos los corolarios y contraejemplos pertinentes. Posteriormente, en la Sección 1.3 discutimos la relación de los grupoides con los semigrupos, para luego introducir en la Sección 1.4 el álgebra de Steinberg. Finalmente, en la Sección 1.5 estudiamos las acciones de grupoides y cómo estas inducen estructura de módulo sobre el álgebra de Steinberg en el grupo abeliano de funciones continuas compactamente soportadas. Gracias a la funtorialidad de la asignación, concluimos el capítulo con una construcción de la homología de grupoides usando el lenguaje de conjuntos simpliciales.

En el Capítulo 2 damos una breve introducción al concepto de haz, definimos el sitio asociado a un grupoide étale y enunciamos la equivalencia de categorías de Steinberg para módulos sobre el álgebra de un grupoide amplio. En la Sección 2.3 introducimos la noción de acciones de grupoides propias, libres y básicas y demostramos propiedades dispersas o incompletas en la literatura. Este apartado pretende servir como una referencia accesible y autocontenida al respecto. A continuación, en la Sección 2.4 estudiamos la extensión y restricción de haces, para luego aplicarla en el estudio de módulos proyectivos sobre el álgebra de Steinberg, en la Sección 2.5.

El Capítulo 3 está dedicado —casi en su totalidad— a dar una versión concreta de la construcción de colímites homotópicos para funtores con valores en la categoría de espectros. A lo largo de las dos primeras secciones, introducimos la noción de colímites homotópicos de funtores con valores en espacios topológicos. Para ello, seguimos la exposición de [DL98] y completamos todas las demostraciones faltantes, incluyendo la formulación de ciertos resultados técnicos necesarios para utilizar la fórmula de Bousfield-Kan [BK72]. Luego, en la Sección 3.3, damos una introducción autocontenida a los espectros, extendiendo la noción de colímite homotópico para funtores con valores en tal categoría. Finalmente, incluimos una formulación, en la Sección 3.4, de la Conjetura de Farrell-Jones para grupos. A su vez, discutimos brevemente el estado actual de la conjetura.

Por último, el Capítulo 4 consiste de una exposición de los resultados del artículo en preparación de Cortiñas y Li [CL26]. En la Sección 4.1, introducimos la categoría de órbitas propuesta para un grupoide amplio y probamos ciertos resultados que la vinculan con parte del presente trabajo. A continuación, en la Sección 4.2 definimos, según lo hacen Cortiñas y Li, la categoría lineal asociada a un grupoide amplio. Esto permite, extendiendo apropiadamente el funtor de la K -teoría, generalizar la Conjetura de Farrell-Jones para grupoides, como mencionamos en la Sección 4.3.

Lo que resta de esta tesis consiste de apéndices que el autor considera valiosos para cualquier lector empedernido. En primer lugar, incluimos apéndices de Topología General. El Apéndice A.1 es una introducción a los *Espacios de Stone*: aquellos que son espacios de unidades

de grupoides amplios; y el Apéndice A.2 incluye las propiedades principales de los espacios compactamente generados, una *categoría conveniente* sobre la cual desarrollamos la Teoría de Homotopía del Capítulo 3. Finalmente, concluimos con apéndices sobre K -teoría algebraica. El Apéndice B.1 presume *un poco de historia* sobre el nacimiento de la K -teoría y cómo el lenguaje de la comunidad se fue forjando; y el Apéndice B.2 contiene la *construcción* del espectro de K -teoría de una categoría lineal, necesaria para la formulación de la Conjetura de Farrell-Jones.

Capítulo 1

Grupoides, semigrupos y sus álgebras

A groupoid is a group that needs a shrink.

BENJAMIN STEINBERG

1.1. Grupoides topológicos, étales y amplios

1.1.1. El ABC de los grupoides

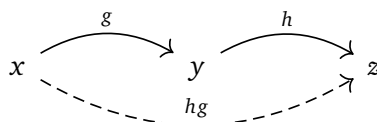
Comenzaremos esta sección introduciendo las definiciones centrales de la teoría de grupoides, a la par de sus propiedades básicas y ejemplos.

Definición 1.1.1. Un **grupoid** es una categoría para la cual todo morfismo es un isomorfismo.

Esta clase de categorías constituye una generalización directa de los grupos:

Ejemplo 1.1.2. Si G es un grupo, notamos $\mathcal{B}G$ a la categoría con un solo objeto $\star$ para el cual $\text{hom}_{\mathcal{B}G}(\star, \star) = G$; cuya composición viene dada, para cada $g, h \in G$, por la multiplicación $g \circ h := gh$. Es claro que $\mathcal{B}G$ es un grupoid para el cual cada $g \in G$ tiene inversa g^{-1} . Recíprocamente, si $\mathcal{G}$ es un grupoid, entonces para cada objeto x de $\mathcal{G}$ resulta que $\text{hom}_{\mathcal{G}}(x, x)$ es un grupo con la composición.

La manera pictórica de interpretar a los grupoides es exactamente la que emerge del caso grupo: pensaremos en sus flechas como elementos que tienen un dominio $\mathbf{d}$ y rango $\mathbf{r}$ distinguidos, y que pueden multiplicarse solamente si son componibles:



El tratamiento categórico de los grupos, como grupoides de un solo objeto, trae consigo numerosas ventajas en el plano formal. Por ejemplo, es posible codificar las acciones de los grupos en cualquier clase de objeto a través de los funtores, o los mapas equivariantes como transformaciones naturales. Esto se generaliza sin problemas al caso de los grupoides.

Más aún, los grupoides *topológicos*, nuestro principal objeto de estudio en este trabajo, surgen naturalmente al considerar acciones de grupos (no necesariamente discretos) sobre espacios topológicos. Sosteniendo la interpretación pictórica anterior, podemos pensar que un elemento g de un grupo G actúa sobre los puntos de un espacio X como flechas que van de su dominio $x \in X$ a su rango $g \cdot x \in X$. Una tal flecha para este grupode en construcción dependerá tanto del elemento del grupo como del punto en el espacio:

$$x \xrightarrow{[g,x]} g \cdot x$$

Notar que la función que asigna a cada tal flecha su rango corresponde exactamente con la multiplicación, que para un G -espacio X requeriremos sea continua. Esto da cuenta del siguiente fenómeno a abordar en el caso general: la información topológica deberá estar codificada tanto en los objetos, como en el conjunto de flechas; requiriendo también cierta compatibilidad con la multiplicación o las funciones que asignan a cada flecha su dominio o rango. De esto mismo, surge la siguiente definición:

Definición 1.1.3. Un **grupode topológico** $\mathcal{G}$ es un par de espacios topológicos $\mathcal{G}^{(0)}$ y $\mathcal{G}^{(1)}$, llamados **unidades** y **flechas**, junto con funciones continuas

$$\begin{aligned} \mathbf{d}, \mathbf{r}: \mathcal{G}^{(1)} &\rightarrow \mathcal{G}^{(0)} \\ 1: \mathcal{G}^{(0)} &\rightarrow \mathcal{G}^{(1)} \\ (-)^{-1}: \mathcal{G}^{(1)} &\rightarrow \mathcal{G}^{(1)} \\ m: \mathcal{G}^{(2)} &\rightarrow \mathcal{G}^{(1)} \end{aligned}$$

donde $\mathcal{G}^{(2)} := \mathcal{G}^{(1)} \times_{\mathbf{d}} \mathcal{G}^{(1)}$, que satisfacen la conmutatividad de los siguientes diagramas:

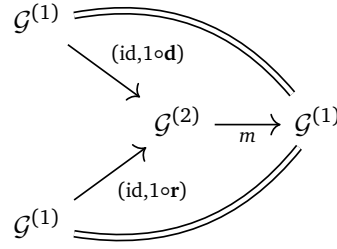
(C.1) Compatibilidad del **dominio** y **rango** con las unidades:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}^{(0)} & \xleftarrow{\mathbf{d}} & \mathcal{G}^{(1)} & \xrightarrow{\mathbf{r}} & \mathcal{G}^{(0)} \\ & \searrow & \uparrow 1 & \swarrow & \\ & & \mathcal{G}^{(0)} & & \end{array}$$

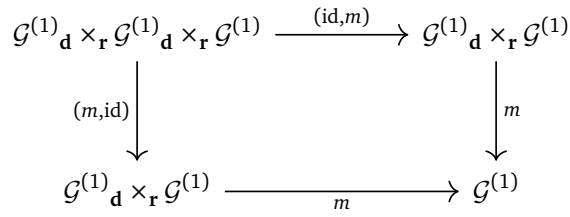
(C.2) Compatibilidad del dominio y rango con la **multiplicación**:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{G}^{(1)} & \xrightarrow{\mathbf{d}} & \mathcal{G}^{(0)} \\ & \nearrow \text{pr}_2 & & \nearrow \mathbf{d} & \\ \mathcal{G}^{(2)} & \xrightarrow{m} & \mathcal{G}^{(1)} & & \\ & \searrow \text{pr}_1 & & \searrow \mathbf{r} & \\ & & \mathcal{G}^{(1)} & \xrightarrow{\mathbf{r}} & \mathcal{G}^{(0)} \end{array}$$

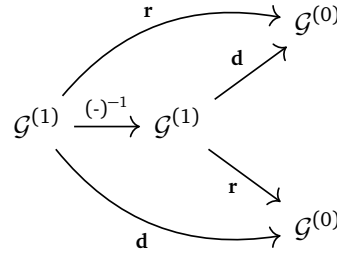
(C.3) Unitalidad de las *unidades*:



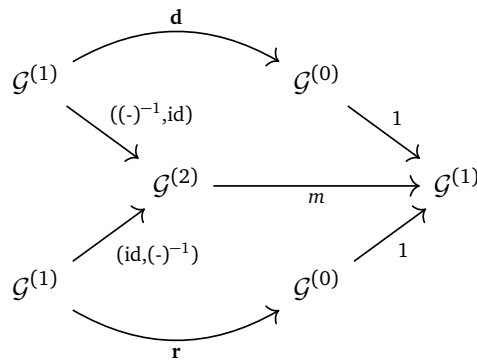
(C.4) *Asociatividad* de la multiplicación:



(I.1) Compatibilidad del dominio y rango con la *inversión*:



(I.2) Existencia de *inversos multiplicativos*:



Observación 1.1.4. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide topológico, las condiciones (C.1), (C.2), (C.3) y (C.4) garantizan que $\mathcal{G}$ sea una categoría pequeña para la cual $\mathcal{G}^{(1)}$ es la clase de morfismos, $\mathcal{G}^{(0)}$ la clase de objetos y $m: \mathcal{G}^{(1)}_d \times_r \mathcal{G}^{(1)} \rightarrow \mathcal{G}^{(1)}$ la composición. Más aún, las condiciones (I.1), (I.2) implican que todo morfismo sea inversible y, por lo tanto, que $\mathcal{G}$ sea un grupoide.

A lo largo de esta tesis, realizaremos el abuso de notación $\mathcal{G}^{(1)} = \mathcal{G}$ para referirnos a los elementos de un grupoide topológico y, considerando que $1: \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}$ es una sección y por ende una función subespacio, asumiremos que $\mathcal{G}^{(0)} \subseteq \mathcal{G}$. Llamaremos (indistintamente) *identidades* a las unidades, que por lo anterior se identifican con la identidad en cada objeto del grupoide. Además, escribiremos $m(g, h) = gh$ para cada $(g, h) \in \mathcal{G}^{(2)}$, y notaremos $x = 1(x) \in \mathcal{G}$ para cada unidad $x \in \mathcal{G}^{(0)}$. Con esta notación, el dominio y rango de un elemento $g \in \mathcal{G}$ vienen dados por $g^{-1}g = \mathbf{d}(g)$ y $gg^{-1} = \mathbf{r}(g)$, respectivamente. Esto permite darle un tratamiento *algebraico* a los grupoides topológicos. Por ejemplo, utilicemos este tratamiento para probar la siguiente proposición:

Proposición 1.1.5. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide topológico, entonces la inversión $(-)^{-1}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ es una involución. En particular, es un homeomorfismo.

Demostración. Veamos que $\text{id}_{\mathcal{G}} = (-)^{-1} \circ (-)^{-1}$. En particular, veamos que para todo $g \in \mathcal{G}$ se tiene que $g = (g^{-1})^{-1}$. Esto se sigue de la siguiente cadena de igualdades:

$$g \underset{(C.3)}{=} g\mathbf{d}(g) \underset{(I.1)}{=} g\mathbf{r}(g^{-1}) \underset{(I.2)}{=} g[g^{-1}(g^{-1})^{-1}] \underset{(C.4)}{=} [gg^{-1}](g^{-1})^{-1} \underset{(I.2)}{=} \mathbf{r}(g)(g^{-1})^{-1} \underset{(C.3)}{=} (g^{-1})^{-1}$$

■

Veamos que los grupoides topológicos forman una categoría:

Definición 1.1.6. Un *morfismo de grupoides topológicos* $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ es un funtor continuo. Explícitamente, es una función continua $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ que preserva la multiplicación: para todo $(g, h) \in \mathcal{G}^{(2)}$ vale que $(f(g), f(h)) \in \mathcal{H}^{(2)}$ y, además, $f(gh) = f(g)f(h)$. Un *isomorfismo de grupoides topológicos* es un morfismo de grupoides cuya función subyacente es un homeomorfismo.

Clarifiquemos qué implica *preservar la multiplicación* en un grupoide y por qué las dos interpretaciones son equivalentes:

Observación 1.1.7. Si $f: \mathcal{G}^{(1)} \rightarrow \mathcal{H}^{(1)}$ es una función continua que preserva la multiplicación, entonces para todo $g \in \mathcal{G}$ vale que $(f(\mathbf{r}(g)), f(g)) \in \mathcal{H}^{(2)}$ y, además, $f(g) = f(\mathbf{r}(g)g) = f(\mathbf{r}(g))f(g)$. Como $\mathcal{G}$ es un grupoide, esto dice que $\mathbf{r}(f(g)) = f(\mathbf{r}(g))$. Análogamente, obtenemos que $f(g\mathbf{d}(g)) = \mathbf{d}(f(g))$ y por lo tanto f conmuta con dominio y rango. En particular, para toda unidad $x \in \mathcal{G}^{(0)}$ vale que

$$\mathbf{r}(f(x)) = f(\mathbf{r}(x)) = f(x) = f(\mathbf{d}(x)) = \mathbf{d}(f(x))$$

de modo que f preserva identidades y es resulta un funtor $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$.

Definición 1.1.8. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide topológico, un *subgrupoide* $\mathcal{H}$ es una subcategoría dotada de la topología subespacio en sus morfismos. Explícitamente, es un subespacio $\mathcal{H}^{(1)} \subseteq \mathcal{G}^{(1)}$ cerrado por multiplicación e inversión.

Antes de proceder a la familia de ejemplos, introduzcamos la clase central de grupoides con los que trabajaremos en esta tesis.

Definición 1.1.9. Decimos que un grupoide topológico $\mathcal{G}$ es *étale* si sus unidades son localmente compactas y Hausdorff y $\mathbf{d}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ es un homeomorfismo local.

En parte de la literatura es estándar no requerir que las unidades de un grupoide étale sean un subespacio localmente compacto y Hausdorff. No obstante, en el contexto de álgebras combinatorias [Exe08] esta hipótesis se requiere para la validez de muchos resultados y por ende la incluimos en nuestra definición. En un grupoide étale, todos los mapas estructurales homeomorfismos locales:

Proposición 1.1.10. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide étale, entonces $\mathbf{d}, \mathbf{r}, 1, (-)^{-1}, m$ son homeomorfismos locales.

Demostración. Por la Proposición 1.1.5, sabemos que la inversión es un homeomorfismo y por ende homeomorfismo local. Por otra parte, la condición (I.1) en la definición de grupoide dice que $\mathbf{r}$ difiere por un homeomorfismo de $\mathbf{d}$ y por ende también es un homeomorfismo local. Análogamente, como $1: \mathcal{G}^{(0)} \hookrightarrow \mathcal{G}$ es una sección de un homeomorfismo local y por lo tanto también lo es. Finalmente, como los homeomorfismos locales son estables por cambio de base, la proyección a la primera coordenada del pullback $\text{pr}_1: \mathcal{G}_{\mathbf{d}} \times_{\mathbf{r}} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ es un cambio de base de $\mathbf{d}$ y por ende un homeomorfismo local. El diagrama conmutativo (C.2) de la definición de grupoide dice que $r \circ m = r \circ \text{pr}_1$ y por lo tanto la multiplicación es un homeomorfismo local. ■

La anterior definición trae consigo la principal característica de los grupoides étales:

Proposición 1.1.11. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide étale, entonces $\mathcal{G}^{(0)} \subseteq \mathcal{G}$ es un abierto.

Demostración. Basta observar que $1: \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}$ es un homeomorfismo local y por ende abierto, de modo que su imagen, que identificamos con $\mathcal{G}^{(0)} \subseteq \mathcal{G}$ es abierta. ■

La intuición podría dictar que las unidades de un grupoide topológico resultan cerradas como subespacio del espacio de flechas. Sin embargo, este no es el caso en general, y la obstrucción surge al considerar grupoides que no son Hausdorff:

Proposición 1.1.12. Todo grupoide topológico Hausdorff $\mathcal{G}$ tiene unidades $\mathcal{G}^{(0)} \subseteq \mathcal{G}$ cerradas. Más aún, si las unidades son un subespacio Hausdorff cerrado, entonces $\mathcal{G}$ es Hausdorff.

Demostración. Para la primera implicación basta observar que, como $\mathcal{G}$ es Hausdorff, entonces la diagonal $\Delta_{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ es cerrada y, por ende,

$$\mathcal{G}^{(0)} = \{x \in \mathcal{G} : \mathbf{d}(x) = x\} = (\mathbf{d}, \text{id})^{-1}(\Delta_{\mathcal{G}})$$

es cerrado. Recíprocamente, si las unidades son Hausdorff entonces $\Delta_{\mathcal{G}^{(0)}} \subseteq \mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)}$ es cerrado y por ende el pullback

$$(\mathbf{d}, \mathbf{d})^{(-1)}(\Delta_{\mathcal{G}^{(0)}}) = \mathcal{G}_{\mathbf{d}} \times_{\mathbf{d}} \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G}$$

es cerrado. Veamos que la diagonal $\Delta_{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ es un cerrado. Como el pullback $\mathcal{G}_{\mathbf{d}} \times_{\mathbf{d}} \mathcal{G} \supseteq \Delta_{\mathcal{G}}$ es cerrado en el producto, basta ver que la diagonal es un cerrado en el pullback. Para eso, considerando la composición de funciones continuas

$$\delta: \mathcal{G}_{\mathbf{d}} \times_{\mathbf{d}} \mathcal{G} \xrightarrow{(\text{id}, (-)^{-1})} \mathcal{G}_{\mathbf{d}} \times_{\mathbf{r}} \mathcal{G} \xrightarrow{m} \mathcal{G},$$

resulta que

$$\Delta_{\mathcal{G}} = \delta^{-1}(\mathcal{G}^{(0)})$$

y por ende la diagonal es un cerrado en el pullback, como queríamos. ■

Corolario 1.1.13. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide étale, entonces $\mathcal{G}$ es Hausdorff si y solo si $\mathcal{G}^{(0)} \subseteq \mathcal{G}$ es clopen.

Como tanto el dominio y rango de un grupoide étale son homeomorfismos locales, hay una base de abiertos de $\mathcal{G}$ para la cual $\mathbf{d}$ y $\mathbf{r}$ son *simultaneamente* homeomorfismos con su imagen. Equivalentemente, como dominio y rango son funciones abiertas, existe una base de abiertos en donde son inyectivas. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.1.14. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide topológico, decimos que un abierto $\sigma \subseteq \mathcal{G}$ es una *bisección* si verifica que $\mathbf{d}|_{\sigma}: \sigma \rightarrow \mathbf{d}(\sigma)$ y $\mathbf{r}|_{\sigma}: \sigma \rightarrow \mathbf{r}(\sigma)$ son homeomorfismos entre abiertos. Denotamos $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ a la colección de bisecciones de $\mathcal{G}$.

Todos los abiertos de $\mathcal{G}^{(0)}$ son en particular bisecciones y la colección $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ es cerrada por inclusiones abiertas. La noción de bisecciones recupera la definición de grupoide étale, pues esta es exactamente la condición de tener un cubrimiento por bisecciones de $\mathcal{G}$. Veamos que la clase de bisecciones tiene buenas propiedades:

Proposición 1.1.15. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide étale, entonces para todo $\sigma, \tau \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ vale que

- (1) el producto $\sigma\tau := m(\sigma_{\mathbf{d}} \times_{\mathbf{r}} \tau)$ es una bisección y define una operación asociativa,
- (2) la inversa $\sigma^{-1} := \{g^{-1} : g \in \sigma\}$ es una bisección tal que $\sigma^{-1}\sigma = \mathbf{d}(\sigma)$ y $\sigma\sigma^{-1} = \mathbf{r}(\sigma)$,
- (3) la inversa $\sigma^* := \sigma^{-1}$ es la única bisección en $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ tal que

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma\sigma^*\sigma \\ \sigma^* &= \sigma^*\sigma\sigma^*\end{aligned}$$

Demostración. Como $\mathbf{d}$ es inyectiva en σ , se tiene que $\text{pr}_1: \sigma_{\mathbf{d}} \times_{\mathbf{r}} \tau \rightarrow \sigma\tau$ es también inyectiva por ser un cambio de base de un monomorfismo. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}\sigma_{\mathbf{d}} \times_{\mathbf{r}} \tau & \xrightarrow{m} & \sigma\tau \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \mathbf{r} \\ \sigma & \xrightarrow{\mathbf{r}} & \mathcal{G}^{(0)}\end{array}$$

Como $\mathbf{r} \circ \text{pr}_1$ es composición de funciones inyectivas, entonces $m: \sigma_{\mathbf{d}} \times_{\mathbf{r}} \tau \rightarrow \sigma\tau$ resulta inyectiva. Más aún, es abierta por ser homeomorfismo local y sobreyectiva, por lo que $m|_{\sigma_{\mathbf{d}} \times_{\mathbf{r}} \tau}$ es un homeomorfismo entre abiertos. Esto implica, por la conmutatividad del diagrama, que $\mathbf{r}: \sigma\tau \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ es inyectiva. El argumento simétrico muestra que $\mathbf{d}$ es inyectiva en $\sigma\tau$ y por lo tanto que $\sigma\tau$ es una bisección. La asociatividad de la multiplicación de bisecciones se sigue de la asociatividad del pullback, lo cual prueba el primer ítem. La inversa σ^{-1} resulta una bisección el dominio y rango difieren por aplicar el homeomorfismo $(-)^{-1}$. Más aún, para cada $g \in \sigma$ tenemos que $g^{-1}g = \mathbf{d}(g) \in \mathbf{d}(\sigma)$, de modo que $\mathbf{d}(\sigma) \subseteq \sigma^{-1}\sigma$. Recíprocamente, si $g, h \in \sigma$ son tales que $h^{-1}g \in \sigma^{-1}\sigma$, entonces $\mathbf{r}(g) = \mathbf{d}(h^{-1}) = \mathbf{r}(h)$ y como σ es bisección $g = h$. Esto

dice que $h^{-1}g = g^{-1}g = \mathbf{d}(g)$, probando que $\sigma^{-1}\sigma = \mathbf{d}(\sigma)$. Un argumento simétrico muestra que $\sigma\sigma^{-1} = \mathbf{r}(\sigma)$. Veamos, por último, el tercer ítem: la inversa σ^{-1} verifica la condición pues

$$\sigma = \sigma\mathbf{d}(\sigma) = \sigma\sigma^{-1}\sigma,$$

y también

$$\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\mathbf{d}(\sigma^{-1}) = \sigma^{-1}\mathbf{r}(\sigma) = \sigma^{-1}\sigma\sigma^{-1}.$$

Sea σ^* una bisección que también verifique la condición. En particular, para todo $g \in \sigma$ debe ocurrir que existan $g_1, g_2 \in \sigma$ y $h \in \sigma^*$ tales que

$$g = g_1hg_2.$$

En particular, debe ser que $\mathbf{r}(g) = \mathbf{r}(g_1)$ y como σ es una bisección que $g = g_1$. Esto implica que $\mathbf{d}(g) = hg_2$ y por ende que $h = g_2^{-1} \in \sigma^{-1}$. Es decir, probamos que $\sigma^* \subseteq \sigma^{-1}$. Recíprocamente, como la condición restante es simétrica a la anterior reemplazando σ por σ^* , obtendremos que $\sigma \subseteq (\sigma^*)^{-1}$ e invirtiendo que $\sigma^{-1} \subseteq \sigma^*$, probando lo deseado. ■

El resultado anterior muestra que $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ es un conjunto dotado de una operación binaria tal que cada elemento tiene un elemento *cuasi-inverso*. En concreto, es un caso particular de la siguiente estructura algebraica:

Definición 1.1.16. Un conjunto S es un **semigrupo inverso** si es un semigrupo tal que para cada $s \in S$ existe un único $s^* \in S$ con la propiedad de que

$$\begin{aligned} s &= ss^*s \\ s^* &= s^*ss^*. \end{aligned}$$

Más adelante en esta tesis, estudiaremos las acciones de semigrupos inversos en espacios topológicos y cómo éstas se relacionan con los grupoides étales. La estructura de semigrupo inverso sobre el conjunto de bisecciones pone de manifiesto la siguiente moraleja: la generalización correcta de la estructura de grupo topológico **no** es la estructura de un grupoide topológico, si no la estructura de semigrupo en sus bisecciones. En concreto, la información algebraica que porta un grupoide es codificada de manera correcta en las bisecciones, mientras que no necesariamente en las flechas, que solamente dan lugar a una operación parcial. En particular, veremos que para el caso donde $\mathcal{G} = \mathcal{B}G$, el semigrupo de bisecciones es exactamente el grupo G . La ruta a seguir es promover la estructura de semigrupo inverso a una de un ℓ -álgebra, para ℓ algún anillo conmutativo, que codifique precisamente la información del grupoide y su topología, a través de las bisecciones. El objetivo final de agregar información aditiva es poder definir invariantes homológicos que se asemejen a los asociados al álgebra de un grupo discreto. Una manera de realizar esto es considerar funciones continuas con valores en ℓ , pero esto mismo peca de tener, con la total generalidad deseada, una estructura de ℓ -álgebra razonable. La manera de resolver este dilema prolijamente es imponer ciertas condiciones de compacidad sobre los grupoides estudiados, que ciertamente serán restrictivas, pero que seguirán dando lugar a numerosos ejemplos históricamente estudiados; principalmente asociados a álgebras combinatorias o sistemas dinámicos. En concreto, la clase de grupoides que será de total utilidad es la siguiente:

Definición 1.1.17. Un grupoide étale $\mathcal{G}$ se dice **amplio** si $\mathcal{G}^{(0)}$ es totalmente desconexo.

En pos de comprender mejor la definición anterior, recordemos el siguiente resultado de topología general:

Proposición (Proposición A.1.5). Sea X es un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff. Entonces X es totalmente desconexo si y solo si tiene una base de abiertos compactos. ■

Recomendamos consultar el Apéndice A.1 para familiarizarse con espacios topológicos como los de la Proposición A.1.5. En consecuencia de la misma, obtenemos la siguiente caracterización:

Corolario 1.1.18. Un grupoide étale $\mathcal{G}$ es amplio si y solo si $\mathcal{G}^{(0)}$ tiene una base de abiertos compactos.

La anterior caracterización local de los grupoides amplios permite visitar su base de bisecciones abiertas. En particular, como $\mathcal{G}$ tiene una base de abiertos compactos y las bisecciones son cerradas por inclusiones abiertas, podemos refinar $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ para obtener la siguiente base de abiertos compactos de $\mathcal{G}$:

Observación 1.1.19. Todo grupoide amplio admite una base de bisecciones abiertas y compactas que denotamos $\mathcal{B}^c(\mathcal{G})$.

Imponiendo la compacidad y por la continuidad de los mapas estructurales, obtenemos un resultado análogo al de la Proposición 1.1.15:

Proposición 1.1.20. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio, entonces para todo $\sigma, \tau \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ vale que

- (1) el producto $\sigma\tau$ es una bisección compacta y define una operación asociativa,
- (2) la inversa σ^{-1} es una bisección compacta tal que $\sigma^{-1}\sigma = \mathbf{d}(\sigma)$ y $\sigma\sigma^{-1} = \mathbf{r}(\sigma)$,
- (3) la inversa $\sigma^* := \sigma^{-1}$ es la única bisección en $\mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ tal que

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma\sigma^*\sigma \\ \sigma^* &= \sigma^*\sigma\sigma^*\end{aligned}$$

■

Corolario 1.1.21. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio entonces $\mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ es un semigrupo inverso.

La diferencia sustancial entre $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ y $\mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ reside en que la bisección $\mathcal{G}^{(0)} \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ podría no ser compacta. Esta bisección cumple la propiedad de que para todo $\sigma \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$

$$\sigma\mathcal{G}^{(0)} = \sigma \quad \text{y} \quad \mathcal{G}^{(0)}\sigma,$$

haciendo de $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ un monoide inverso. Sin embargo, la versión compacta $\mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ podría no tener unidad en la multiplicación. De hecho, este semigrupo inverso admite una unidad si y solo si $\mathcal{G}^{(0)}$ es compacto, lo cual tendrá un impacto respecto a cuándo el álgebra asociada a un grupoide amplio es unitaria.

Proposición 1.1.22. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio, entonces $\mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ tiene unidad si y solo si $\mathcal{G}^{(0)}$ es compacto. En ese caso, $\mathcal{G}^{(0)}$ es la unidad del semigrupo.

Demostración. Es claro que si $\mathcal{G}^{(0)}$ es compacto entonces $\mathcal{G}^{(0)} \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ es la unidad de la multiplicación. Supongamos que existe $U \subseteq \mathcal{G}$ bisección compacta tal que para todo $\sigma \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G})$

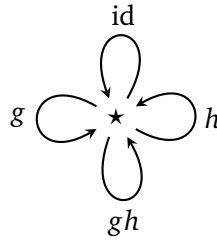
$$\sigma U = \sigma \text{ y } U\sigma = \sigma.$$

Dado $x \in \mathcal{G}^{(0)}$, como las bisecciones abiertas compactas forman una base, existe $\sigma_x \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ tal que $x \in \sigma_x$. Luego, como $\sigma_x U = \sigma_x = U\sigma_x$, deben existir $g \in \sigma_x$ y $u \in U$ tales que $gu = x$. Como σ_x es bisección y $\mathbf{r}(g) = \mathbf{r}(gu) = \mathbf{r}(x)$, se tiene que $g = x$ y por ende $u = x$. Esto prueba que $\mathcal{G}^{(0)} \subseteq U$. Por otra parte, si $u \in U$ debe ser que $\mathbf{d}(u) = \mathbf{d}(\mathbf{d}(u))$ y, como $\mathbf{d}(u) \in U$ tenemos que $u = \mathbf{d}(u)$; es decir, $u \in \mathcal{G}^{(0)}$. Esto dice que $U = \mathcal{G}^{(0)}$ y, en particular, $\mathcal{G}^{(0)}$ debe ser compacto. ■

1.1.2. Los ejemplos centrales

La moraleja de la teoría de grupoides topológicos, étales y amplios es que conforman una generalización conjunta de los grupos, cuando $\mathcal{G}^{(0)} = *$, hasta los espacios topológicos, cuando $\mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G}$. Exploremos algunos de los ejemplos en ese espectro:

Ejemplo 1.1.23 (Grupos). Sea G un grupo topológico y $\mathcal{B}G$ el grupoide de un objeto para el cual $\mathcal{B}G^{(1)} = G$. Consideramos el conjunto de objetos $\mathcal{B}G^{(0)} = *$ y las funciones dominio y rango como la única función $G \rightarrow *$. El pullback $\mathcal{B}G^{(2)}$ es exactamente $G \times G$, de modo que consideramos como multiplicación a la del grupo: $m: G \times G \rightarrow G$. Finalmente, consideramos $(-)^{-1}: G \rightarrow G$ la inversión y $1: * \rightarrow G$ la función que envía el único elemento de $*$ al neutro del grupo. Dotando a $\mathcal{B}G^{(1)}$ de la topología de G , resulta que los mapas estructurales son continuos y $\mathcal{B}G$ es un grupoide topológico. Más aún, como $*$ es localmente compacto y Hausdorff, $\mathcal{B}G$ es étale si y solo si $G \rightarrow *$ es un homeomorfismo local, lo cual ocurre si y solo si G es discreto. En este caso, como el singleton $*$ es totalmente desconexo, $\mathcal{B}G$ es también amplio.



Ejemplo 1.1.24 (Espacios topológicos). Sea X un espacio topológico y consideremos $\mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G}^{(1)} = X$ dotados de la topología de X , junto con la función identidad como dominio y rango. El pullback $\mathcal{G}^{(2)}$ coincide nuevamente con X , de modo que podemos tomar como multiplicación la identidad y como inversión también la identidad. En este caso, es claro que $\mathcal{G} = X$ es un grupoide topológico. Este grupoide resulta étale si y solo si X es localmente compacto y Hausdorff, y además amplio en el caso donde X es totalmente desconexo. Un tal ejemplo concreto de espacio topológico es el espacio de Cantor.

Ejemplo 1.1.25 (Relaciones de equivalencia). Sea X un espacio topológico y $R \subseteq X \times X$ una relación de equivalencia equipada con la topología subespacio. Consideremos $\mathcal{G}^{(1)} = R$ y $\mathcal{G}^{(0)} = X$ y describamos los mapas estructurales. Para empezar, interpretaremos un par relacionado

$x \sim y$ como una flecha que *viaja* de y a x . Es decir, consideramos la función continua dominio $\mathbf{d}: R \rightarrow X$ como la proyección a la segunda coordenada y la función continua rango $\mathbf{r}: R \rightarrow X$ como la proyección a la primera coordenada. Por otra parte, como R es reflexiva, podemos tomar como unidades a los pares $x \sim x$; es decir, la inclusión de las unidades es función continua diagonal $1 = \Delta: R \rightarrow X$. Como R es transitiva, podemos definir como multiplicación la siguiente función continua:

$$\begin{aligned} m: \mathcal{G}^{(2)} &\rightarrow X \\ ((x, y), (y, z)) &\mapsto (x, z). \end{aligned}$$

Finalmente, la simetría dice que el intercambio de coordenadas $(-)^{-1}: R \rightarrow R$ define una inversión continua. Es inmediato verificar que $\mathcal{G}$ resulta un grupoide topológico. Veamos cuándo es étale. Para que este sea el caso, X debe ser localmente compacto y Hausdorff. Más aún, debe ser que $\mathbf{d}: R \rightarrow X$ sea un homeomorfismo local. Es decir, para cada $(x, y) \in R$, deben existir abiertos $U, V \subseteq X$ tales que $\mathbf{d}$ y $\mathbf{r}$ sean inyectivas en $(U \times V) \cap R$. Si este es el caso, entonces para cualquier $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in (U \times V) \cap R$ por transitividad se obtiene que $(\tilde{x}, y) \in (U \times V) \cap R$ y, como dominio es inyectiva, que $(x, \tilde{y}) = (x, y)$. Esto dice que $\tilde{y} = y$ y, usando que $\mathbf{r}$ es inyectiva, obtenemos que $x = \tilde{x}$. Es decir, se sigue que $(U \times V) \cap R = \{(x, y)\}$. Es decir, R tiene la topología discreta. Más aún, como $(x, x) \in R$ para todo $x \in X$ y $\mathbf{d}$ es abierta, se sigue que $\{x\} = \mathbf{d}(\{(x, x)\})$ es abierto y por ende X tiene la topología discreta. En resumen, nuevamente obtenemos que $\mathcal{G}$ es étale si y solo si X es discreto, y además amplio en el caso donde X es totalmente desconexo.

Veamos un ejemplo de un grupoide topológico cuyo espacio de flechas es Hausdorff pero sus unidades no lo son:

Ejemplo 1.1.26 (Serpiente de dos cabezas). Sea X un espacio topológico localmente compacto Hausdorff y $x_0 \in X$ un punto que no es abierto. Consideremos $\mathcal{G}^{(0)} = X$ y $\mathcal{G}^{(1)}$ el espacio topológico con *dos copias* de x_0 . Es decir, $\mathcal{G}^{(1)}$ es el cociente de $X \sqcup X$ por la relación de equivalencia que identifica las dos copias $X \setminus \{x_0\}$; equivalentemente, es el pushout por las inclusiones $X \setminus \{x_0\} \hookrightarrow \mathcal{G}^{(0)}$. Definimos el dominio y el rango por la propiedad universal del pushout según el siguiente diagrama:

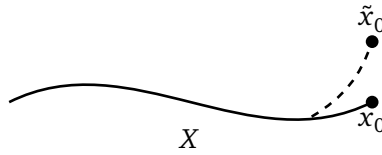
$$\begin{array}{ccc} X \setminus \{x_0\} & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow 1 \\ X & \xrightarrow{\tilde{1}} & \mathcal{G}^{(1)} \\ & \searrow \tilde{\mathbf{d}} & \downarrow \mathbf{r} \\ & & \mathcal{G}^{(0)} \end{array}$$

Como X es Hausdorff, $X \setminus \{x_0\}$ es abierto y la inclusión es un homeomorfismo local. Como éstos son preservados por cambio de cobase, se sigue que las inclusiones del pushout son homeomorfismos locales y por ende que $\mathbf{d} = \mathbf{r}$ son homeomorfismos locales. Por construcción, tanto $\mathbf{d}$ como $\mathbf{r}$ son secciones de la inclusión $1: \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}^{(1)}$. Bajo nuestra definición, dos elementos distintos serán componibles solo si uno es x_0 y el otro es $\tilde{x}_0 = \tilde{1}(x_0)$, la segunda copia del

punto distinguido. Definimos la multiplicación como la función continua:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_d \times_r \mathcal{G} &\mapsto \mathcal{G} \\ (x_0, \tilde{x}_0) &\mapsto \tilde{x}_0 \\ (\tilde{x}_0, x_0) &\mapsto \tilde{x}_0 \\ (\tilde{x}_0, \tilde{x}_0) &\mapsto x_0 \\ (x, x) &\mapsto x \text{ en otro caso} \end{aligned}$$

La inversión es exactamente la identidad $G^{(1)} \xrightarrow{\text{id}} G^{(1)}$, que también es continua, de forma tal que $\mathcal{G}$ resulta un grupoide étale conocido como la *serpiente de dos cabezas*.



Las flechas de este grupoide $\mathcal{G}^{(1)}$ no son un espacio Hausdorff porque, por hipótesis, $x_0 \in X$ no es abierto y por ende todo entorno abierto que contenga a x_0 debe contener otro punto. Como los entornos abiertos de x_0 y de $\tilde{x}_0$ son los mismos, a menos del punto distinguido, entonces todo par de entornos de estos puntos se intersecan. Esto dice que no existen abiertos disjuntos que separen a $\tilde{x}_0$ de x_0 , y por ende las flechas no son un espacio Hausdorff. Sin embargo, es sencillo verificar que este espacio sí resulta T1. Como modelo concreto de la serpiente de dos cabezas, podemos tomar $X = C$ como el espacio de Cantor y $x_0 = 1$. El grupoide amplio resultante fue estudiado por varios autores en [ACJM25].

Formalicemos el ejemplo que motivó originalmente la definición de grupoide topológico:

Ejemplo 1.1.27 (Grupoides de transformación). Sea G un grupo topológico actuando (a izquierda) en un espacio topológico X . Consideremos $(G \ltimes X)^{(1)} = G \ltimes X$ dotado de la topología producto y $(G \ltimes X)^{(0)} = X$. Es usual notar a los elementos de un grupoide de transformación $G \ltimes X$ con tuplas entre corchetes $[g, x] \in G \ltimes$. Sea $\mathbf{d}: G \ltimes X \rightarrow X$ la función dominio dada por la proyección a la segunda coordenada y $\mathbf{r}: G \ltimes X \rightarrow X$ la función rango dada por la multiplicación de la acción de G en X . Las unidades de este grupoide vendrán dadas por la asignación continua $x \mapsto [1, x] \in G \ltimes X$. Definimos la siguiente función continua

$$\begin{aligned} (G \ltimes X)^{(2)} &\rightarrow G \ltimes X \\ ([h, gx], [g, x]) &\mapsto [hg, x] \end{aligned}$$

como la multiplicación y la correspondiente función continua de inversión

$$\begin{aligned} G \ltimes X &\rightarrow G \ltimes X \\ [g, x] &\mapsto [g^{-1}, gx]. \end{aligned}$$

Es claro que $G \ltimes X$ resulta un grupoide topológico con los morfismos estructurales definidos. Para el caso donde X es localmente compacto y Hausdorff, $G \ltimes X$ es étale si y solo si $G \ltimes X \xrightarrow{\text{pr}_2} X$

es un homeomorfismo local lo cual ocurre si y solo G es discreto. Más aún, $G \times X$ será amplio en el caso donde X sea totalmente desconexo. Este ejemplo constituye un intermedio entre la información topológica de los grupoides de esta clase y la estructura algebraica que tienen. En particular, dan lugares a grupoides étales o amplios para el caso donde el grupo tiene topología trivial, pero no imponen demasiadas restricciones sobre el espacio en el que G actúa. Es por esto que esta clase de grupoides es estudiada en el contexto de sistemas minimales sobre el espacio de Cantor (ver, por ejemplo, [GPS99]).

A continuación veremos que, para grupoides étales y bajo ciertas hipótesis leves, todos los grupoides son *localmente* el ejemplo anterior. Más aún, veremos que, si consideramos acciones de semigrupos en lugar de grupos, hay una noción más general de grupoide de transformación que hace que todo grupoide provenga de uno de esta forma.

1.2. Estructura local de grupoides étales propios y Hausdorff

La idea de esta sección es mostrar que, bajo ciertas hipótesis menores, todos los grupoides étales son localmente grupoides de transformación de algún grupo discreto. Para eso, introduciremos algunas nociones básicas:

Definición 1.2.1. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide y $x \in \mathcal{G}^{(0)}$, entonces es *estabilizador* de x es el grupo $\mathcal{G}_x^x = \mathbf{d}^{-1}(x) \cap \mathbf{r}^{-1}(x) = (\mathbf{d}, \mathbf{r})^{-1}(x, x)$.

Recordemos que una función continua $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos se dice *propia* si es cerrada y las fibras son compactas. Es claro que si el dominio es compacto y el codominio es Hausdorff, entonces toda f es propia.

Definición 1.2.2. Un grupoide topológico $\mathcal{G}$ se dice *propio* si la función $(\mathbf{d}, \mathbf{r}) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)}$ es propia.

Observación 1.2.3. Todo grupoide topológico compacto con unidades Hausdorff es propio. En particular, los grupoides étales compactos son propios.

Lema 1.2.4. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide étale propio entonces los estabilizadores son finitos.

Demostración. Dado $x \in \mathcal{G}^{(0)}$ entonces se sigue que $(\mathbf{d}, \mathbf{r})^{-1}(x, x)$ es compacto y, como $\mathcal{G}$ es étale, discreto. Por lo tanto, $\mathcal{G}_x^x = (\mathbf{d}, \mathbf{r})^{-1}(x, x)$ es discreto y compacto y por ende finito. ■

Lema 1.2.5. Sean $\mathcal{G}$ es un grupoide étale propio Hausdorff y $x \in \mathcal{G}^{(0)}$. Entonces para cada $g \in \mathcal{G}_x^x$ existen bisecciones abiertas $\sigma_g \subseteq \mathcal{G}$ disjuntas dos a dos, junto a abiertos $g \in W_g \subseteq \sigma_g$ tales que para todo $g, h \in \mathcal{G}_x^x$

$$W_g W_h \subseteq \sigma_{gh}.$$

Demostración. Las bisecciones abiertas existen porque $\mathcal{G}$ es étale y, como $\mathcal{G}_x^x$ es finito, usando la propiedad de Hausdorff podemos disjuntar con abiertos básicos a los elementos del estabilizador. Como $\mathcal{G}$ es étale y los homeomorfismos locales son estables por cambio de base, se tiene que las proyecciones $\pi_1, \pi_2 : \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathcal{G}$ son homeomorfismos locales. En particular, las

proyecciones son abiertas y, para cada $g, h \in \mathcal{G}$, tenemos abiertos

$$\begin{aligned} P_{g,h}^1 &:= \pi_1(\sigma_g \times \sigma_h \cap m^{-1}(\sigma_{gh})) = \{\alpha \in \sigma_g \mid \exists \beta \in \sigma_h, \mathbf{d}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta) \text{ y } \alpha\beta \in \sigma_{gh}\} \subseteq \sigma_g, \\ P_{g,h}^2 &:= \pi_2(\sigma_g \times \sigma_h \cap m^{-1}(\sigma_{gh})) = \{\beta \in \sigma_h \mid \exists \alpha \in \sigma_g, \mathbf{d}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta) \text{ y } \alpha\beta \in \sigma_{gh}\} \subseteq \sigma_h. \end{aligned}$$

Por construcción, tenemos que para cada $g, h \in \mathcal{G}_x^x$ vale que $g \in P_{g,h}^1$ y $h \in P_{g,h}^2$. Consideramos, para cada $g \in \mathcal{G}_x^x$ el subespacio

$$W_g := \bigcap_{k \in \mathcal{G}_x^x} (P_{g,k}^1 \cap P_{k,g}^2) \subseteq \sigma_g,$$

que resulta abierto pues el estabilizador es finito y por ende es una intersección finita de abiertos. Además, por lo dicho anteriormente es claro que $g \in W_g$. Veamos que esta colección verifica lo pedido. En particular, sean $g, h \in \mathcal{G}_x^x$ y $(\alpha, \beta) \in W_g \times_{\mathbf{r}} W_h$. Veamos que su multiplicación pertenece a la bisección σ_{gh} . Como $\alpha \in W_g \subseteq P_{g,h}^1$, entonces existe $\gamma \in \sigma_h$ tal que $\mathbf{d}(\alpha) = \mathbf{r}(\gamma)$ y $\alpha\gamma \in \sigma_{gh}$. Por otra parte, $\mathbf{d}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$ y por ende $\gamma, \beta \in \sigma_h$ tienen igual rango: $\mathbf{r}(\gamma) = \mathbf{d}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$. Como σ_h es bisección, esto dice que $\gamma = \beta$ y por lo tanto $\alpha\beta = \alpha\gamma \in \sigma_{gh}$. Esto prueba que

$$W_g W_h \subseteq \sigma_{gh}$$

y por ende concluye la proposición. ■

Teorema 1.2.6. Todo grupoide étale propio Hausdorff $\mathcal{G}$ es localmente isomorfo a un grupoide de transformación. Es decir, para cada $x \in \mathcal{G}^{(0)}$ existe un entorno abierto $U_x \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ de x para el cual el grupoide étale $\mathcal{G}_{U_x}^{U_x} = (\mathbf{d}, \mathbf{r})^{-1}(U_x \times U_x)$ es isomorfo a un grupoide de transformación:

$$\mathcal{G}_{U_x}^{U_x} \cong \mathcal{G}_x^x \ltimes U_x.$$

Demostración. Sea $x \in \mathcal{G}$ una unidad y consideremos, como en el Lema 1.2.5, entornos abiertos $g \in W_g \subseteq \sigma_g$ para cada $g \in \mathcal{G}_x^x$ con la propiedad del lema. Como $g \in W_g$ y $x = \mathbf{d}(g)$, podemos considerar

$$D_x = \bigcap_{g \in \mathcal{G}_x^x} \mathbf{d}(W_g),$$

un entorno abierto de $x \in \mathcal{G}^{(0)}$. Como $(\mathbf{d}, \mathbf{r})$ es propia entonces es cerrada y por lo tanto $(\mathbf{d}, \mathbf{r})(\mathcal{G} \setminus (\cup_{g \in \mathcal{G}_x^x} W_g))$ es un cerrado de $\mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)}$ que no contiene a (x, x) . Luego, existe un entorno abierto $V_x \subseteq D_x$ tal que $x \in V_x$ y el abierto básico $V_x \times V_x$ está contenido en el complemento:

$$(V_x \times V_x) \cap (\mathbf{d}, \mathbf{r})(\mathcal{G} \setminus (\bigcup_{g \in \mathcal{G}_x^x} W_g)) = \emptyset.$$

En otras palabras, se tiene la siguiente propiedad para cada $\alpha \in \mathcal{G}$:

$$\text{Si } \mathbf{d}(\alpha), \mathbf{r}(\alpha) \in V_x \text{ existe } g_\alpha \in \mathcal{G}_x^x \text{ tal que } \alpha \in W_{g_\alpha}. \quad (1.2.7)$$

Para cada $g \in \mathcal{G}_x^x$, tenemos que $V_x \subseteq D_x \subseteq \mathbf{d}(W_g) \subseteq \mathbf{d}(\sigma_g)$ y por lo tanto el siguiente homeomorfismo contiene a V_x en su dominio:

$$\theta_g : \mathbf{d}(\sigma_g) \xrightarrow{d|_{\sigma_g}^{-1}} \sigma_g \xrightarrow{\mathbf{r}|_{\sigma_g}} \mathbf{r}(\sigma_g),$$

Nuestro objetivo es definir una acción de $\mathcal{G}_x^x$ en algún abierto a través de estos homeomorfismos. Para eso, debemos encontrar algún abierto que sea invariante por θ_g para cada $g \in \mathcal{G}_x^x$. Para eso, achicaremos apropiadamente a V_x . Por esto, consideramos el abierto

$$U_x := V_x \cap \bigcap_{g \in \mathcal{G}_x^x} \theta_g^{-1}(V_x).$$

Veamos que $\theta_g(U_x) \subseteq U_x$ para cada $g \in \mathcal{G}_x^x$. En particular, si $y \in U_x$ y $g \in \mathcal{G}_x^x$, entonces $\theta_g(y) \in V_x$ por definición. Basta ver que para cualquier $h \in \mathcal{G}_x^x$ se tiene que $\theta_h(\theta_g(y)) \in V_x$. Para ver esto, veremos que $\theta_h(\theta_g(y)) = \theta_{hg}(y)$, usando el lema anterior. En particular, como $V_x \subseteq \mathbf{d}(W_g)$ y $W_g \subseteq \sigma_g$ es bisección, entonces y es el dominio de una única flecha $\alpha_y \in W_g$, para la cual $\theta_g(y) = \mathbf{r}(\alpha_y)$. A su vez, $\theta_g(y) \in V_x \subseteq \mathbf{d}(W_h)$ es el dominio de una única flecha $\alpha_{\theta_g(y)} \in W_h$ para la cual $\theta_h(\theta_g(y)) = \mathbf{r}(\alpha_{\theta_g(y)})$. Esto dice que $\mathbf{d}(\alpha_{\theta_g(y)}) = \theta_g(y) = \mathbf{r}(\alpha_y)$ y por lo tanto que

$$(\alpha_{\theta_g(y)}, \alpha_y) \in W_{h\mathbf{d}} \times_{\mathbf{r}} W_g$$

y por el Lema 1.2.5 obtenemos que $\alpha_{\theta_g(y)}\alpha_y \in \sigma_{hg}$. En particular vale que $\alpha_{\theta_g(y)}\alpha_y \in \sigma_{hg}$ es la única flecha cuyo dominio es

$$\mathbf{d}(\alpha_{\theta_g(y)}\alpha_y) = \mathbf{d}(\alpha_y) = y$$

y su codominio

$$\mathbf{r}(\alpha_{\theta_g(y)}\alpha_y) = \mathbf{r}(\alpha_{\theta_g(y)}) = \theta_h(\theta_g(y))$$

y por construcción esto dice que

$$\theta_h(\theta_g(y)) = \theta_{hg}(y) \in V_x.$$

Esto muestra, en primer lugar, que $\theta_g(y) \in U_x$ y por lo tanto que U_x es θ_g -invariante para todo $g \in \mathcal{G}_x^x$. Más aún, de la demostración obtuvimos una acción de grupos bien definida y continua en el abierto invariante:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_x^x \times U_x &\rightarrow U_x \\ (g, y) &\mapsto \theta_g(y). \end{aligned}$$

Veamos que la restricción del grupoide a este abierto, i.e. $\mathcal{G}_{U_x}^{U_x} = \mathbf{d}^{-1}(U_x) \cap \mathbf{r}^{-1}(U_x)$, es isomorfo al grupoide de transformación $\mathcal{G}_x^x \ltimes U_x$. Para cada $g \in \mathcal{G}_x^x$, consideramos el entorno abierto de g dado por

$$O_g := W_g \cap \mathbf{d}^{-1}(U_x) = W_g \cap \mathcal{G}_{U_x}^{U_x},$$

donde la última igualdad vale pues $\theta_g(U_x) \subseteq U_x$. Es claro que los O_g son disjuntos dos a dos pues $O_g \subseteq \sigma_g$. Más aún, si $\mathbf{d}(\alpha), \mathbf{r}(\alpha) \in U_x \subseteq V_x$ para algún $\alpha \in \mathcal{G}$, por 1.2.7 debe ser que $\alpha \in W_g$ para algún $g \in \mathcal{G}_x^x$ y por ende $\alpha \in O_g$. Esto significa que

$$\mathcal{G}_{U_x}^{U_x} = \bigsqcup_{g \in \mathcal{G}_x^x} O_g.$$

La idea de considerar esta partición es que cada uno de los abiertos O_g , para $g \in \mathcal{G}_x^x$, es homeomorfo al abierto $\{g\} \times U_x \subseteq \mathcal{G}_x^x \ltimes U_x$ en el grupoide de transformación. Para ver esto, notar que $U_x \subseteq \mathbf{d}(W_g)$ y, como W_g es bisección, $\mathbf{d}$ se restringe a un homeomorfismo:

$$\mathbf{d}|_{O_g} : O_g = W_g \cap \mathbf{d}^{-1}(U_x) \rightarrow \{g\} \times U_x.$$

Como $\mathcal{G}_x^x$ es discreto, esto induce un homeomorfismo en la unión disjunta

$$\begin{aligned}\Phi: \mathcal{G}_{U_x}^{U_x} &\rightarrow \mathcal{G}_x^x \ltimes U_x \\ \alpha &\mapsto [g, \mathbf{d}(\alpha)], \text{ si } \alpha \in O_g.\end{aligned}$$

Más aún, veamos que es morfismo de grupoides. Si $\alpha, \beta \in \mathcal{G}_{U_x}^{U_x}$ son tales que $\mathbf{d}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$, entonces debe ser que $\alpha \in O_g$ y $\beta \in O_h$, para algunos $g, h \in \mathcal{G}_x^x$ y por ende que $(\alpha, \beta) \in W_{g\mathbf{d}} \times_{\mathbf{r}} W_h$. Por el Lema 1.2.5 esto dice que $\alpha\beta \in W_{gh}$ y por ende que $\alpha\beta \in O_{gh}$. Por construcción, como $\beta \in \sigma_h$ se tiene que $\theta_h(\mathbf{d}(\beta)) = \mathbf{r}(\beta) = \mathbf{d}(\alpha)$ y por lo tanto

$$\Phi(\alpha\beta) = [gh, \mathbf{d}(\alpha\beta)] = [g, \theta_h(\mathbf{d}(\beta))] \cdot [h, \mathbf{d}(\beta)] = [g, \mathbf{d}(\alpha)] \cdot [h, \mathbf{d}(\beta)] = \Phi(\alpha)\Phi(\beta).$$

Esto muestra que Φ es morfismo y concluye que

$$\mathcal{G}_{U_x}^{U_x} \cong \mathcal{G}_x^x \ltimes U_x.$$

■

Corolario 1.2.8. Todo grupoide étale, compacto y Hausdorff $\mathcal{G}$ es localmente isomorfo a un grupoide de transformación.

Si el grupoide en cuestión es amplio, entonces tiene una base de abiertos compactos y podemos tomar todos los entornos en la demostración del teorema para que sean compactos y abiertos. Esto demuestra el siguiente corolario:

Corolario 1.2.9. Todo grupoide amplio propio Hausdorff $\mathcal{G}$ es localmente isomorfo a un grupoide de transformación compacto.

Inspeccionando detalladamente la demostración del teorema, el paso central muestra que para cada unidad x del grupoide étale $\mathcal{G}$ existe un abierto de $\mathcal{G}^{(0)}$ en donde el grupo $\mathcal{G}_x^x$ actúa. En concreto, dicho abierto es U_x y la acción es la dada por θ_g para cada $g \in \mathcal{G}_x^x$. Más aún, la acción de $\mathcal{G}_x^x$ en U_x queda determinada unívocamente por las bisecciones disjuntas que cubran $\mathcal{G}_x^x$, como en el Lema 1.2.5. Esto permite, al fijar un cubrimiento de bisecciones, obtener *canónicamente* la acción del estabilizador que localmente hace de $\mathcal{G}$ un grupoide de transformación. El siguiente lema permite refinar el teorema para obtener una base de entornos de cada unidad:

Lema 1.2.10. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide étale propio y Hausdorff y $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ un abierto. Entonces $\mathcal{G}_U^U$ es étale, propio y Hausdorff.

Demostración. La correstricción de los mapas estructurales $\mathbf{d}, \mathbf{r}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ al abierto U dan lugar a homeomorfismos locales, de modo que $\mathcal{G}_U^U$ es un grupoide étale y Hausdorff. Como las funciones propias son estables por cambio de base, basta observar que $(\mathbf{d}, \mathbf{r}): \mathcal{G}_U^U \rightarrow U \times U$ es propia por ser el cambio de base de $(\mathbf{d}, \mathbf{r}): \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)}$ por $U \times U \hookrightarrow \mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)}$. ■

Si $x \in U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ es un entorno abierto de x , podemos garantizar que la bisección $\sigma_x \subseteq \mathbf{d}^{-1}(U)$ y por lo tanto que $U_x \subseteq \mathbf{d}(\sigma_x) \subseteq U$. Además, al achicar la bisección σ_x , la acción definida en la demostración del teorema es la misma. Esto dice que el abierto sobre el cual restringimos el grupoide puede tomarse *arbitrariamente chico* en el siguiente sentido:

Corolario 1.2.11. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide étale propio Hausdorff y $x \in \mathcal{G}^{(0)}$ es una unidad, entonces existe β_x una base de entornos de x en $\mathcal{G}^{(0)}$ en la cual $\mathcal{G}_U^x$ es isomorfo al grupoide de transformación $\mathcal{G}_x^x \times U$ para todo $U \in \beta_x$. Más aún, la acción de $\mathcal{G}_x^x$ solo depende un cubrimiento por bisecciones abiertas disjuntas de $\mathcal{G}_x^x$ y es la misma para todos los abiertos de la base.

Estudiemos este resultado para el caso particular en el cual $\mathcal{G}$ es el grupoide de transformación de una acción de un grupo discreto G en un espacio localmente compacto Hausdorff X . El grupoide étale $G \ltimes X$ es propio si y solo si la función

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \times X \\ (g, x) &\mapsto (gx, x) \end{aligned}$$

es propia, lo cual significa exactamente que la acción de G en X sea propia. Si este es el caso, entonces estamos en condiciones de aplicar la demostración del teorema para afirmar que, para cada $x \in X$, existe un abierto $U_x \subseteq X$ en el que actúa $(G \ltimes X)_x^x = \text{Stab}_G(x) \times \{x\}$. Veamos cómo es exactamente la acción de $\text{Stab}_G(x) \times \{x\}$ en el caso de un grupoide de transformación. Como cubrimiento de bisecciones que verifican el Lema 1.2.5, podemos tomar para cada $g \in \text{Stab}_G(x)$ la bisección $\sigma_g = \{g\} \times X$ y, en ese caso, la acción viene dada por

$$\begin{aligned} \theta_g : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto \mathbf{r}([g, x]) = gx \end{aligned}$$

Luego, un abierto de $(G \ltimes X)^{(0)} = X$ invariante por la acción de $(G \ltimes X)_x^x$ es exactamente un abierto de X invariante por la acción del estabilizador $\text{Stab}_G(x)$ de la acción de G en X . Es decir, el Corolario 1.2.11 implica el siguiente resultado sobre acciones de grupos:

Corolario 1.2.12. Sea G un grupo discreto actuando en un espacio localmente compacto Hausdorff X de manera propia. Entonces, para todo $x \in X$ y cada entorno abierto $x \in U$ existe un abierto $x \in U_x \subseteq U$ que es invariante por la acción del estabilizador de x . Es decir, tal que

$$\text{Stab}_G(x) \cdot U_x \subseteq U_x.$$

Veamos un ejemplo para el cual el Teorema 1.2.6 no es cierto si retiramos la hipótesis de Hausdorff sobre el grupoide en cuestión:

Contraejemplo 1.2.13. Consideremos $\mathcal{G}$ la serpiente de dos cabezas sobre un espacio localmente compacto Hausdorff X , con un punto distinguido $x_0 \in X$; como en el Ejemplo 1.1.26. Veamos que $\mathcal{G}$ es propio. En primer lugar, para $x, y \in \mathcal{G}^{(0)}$ su fibra es $\mathbf{d}^{-1}(x) \cap \mathbf{r}^{-1}(y)$ que por construcción es siempre finita, y por ende compacta. Esto dice que $(\mathbf{d}, \mathbf{r})$ tiene fibras compactas; por lo que resta ver si es cerrada. En efecto, $\text{im}(\mathbf{d}, \mathbf{r}) \subseteq \Delta_X$ y, como la inclusión de la diagonal de X es cerrada, basta ver que $(\mathbf{d}, \mathbf{r}) : \mathcal{G} \rightarrow \Delta_X$ es cerrada. Como la proyección $\text{pr}_1 : \Delta_X \rightarrow X$ es un homeomorfismo, basta ver que $\mathbf{d} : \mathcal{G} \rightarrow X$ es cerrada. Como $\mathbf{d}$ es cociente, basta ver que para todo cerrado $F \subseteq \mathcal{G}$, la saturación $\mathbf{d}^{-1}(\mathbf{d}(F))$ es cerrada. Si F no contiene al punto distinguido o su copia, entonces es evidentemente cierto. En caso de que F tenga alguna copia del punto distinguido, la saturación resultará de unir a la otra copia del punto distinguido. De esta forma, basta ver que los puntos en $\mathcal{G}$ son cerrados, lo cual es cierto pues el espacio es T1. Si $\mathcal{G}$ fuera un grupoide localmente de transformación, debería ocurrir que

exista un abierto $U \subseteq X$ que contenga a x_0 y además, $\mathcal{G}|_U^U \cong G \ltimes Y$ para algún grupo discreto G y algún espacio localmente compacto Hausdorff Y . En el grupoide $\mathcal{G}|_U^U$, resulta que $\mathbf{d}^{-1}(x)$ tiene cardinal 1 cuando $x \neq x_0$ y 2 cuando $x = x_0$. En particular, como x_0 no es abierto, U tiene más de un punto y el cardinal de la fibra no es constante. Sin embargo, en el grupoide de transformación $G \ltimes Y$ el cardinal de la fibra del dominio es siempre el cardinal de G . Como el isomorfismo de grupoides conmuta con $\mathbf{d}$, preserva el cardinal de las fibras y por ende $\mathcal{G}|_U^U$ no puede ser isomorfo a un grupoide de transformación para ningún abierto entorno de x_0 .

Finalmente, veamos un ejemplo para el cual el teorema no es cierto si retiramos la hipótesis de que el grupoide sea propio:

Contraejemplo 1.2.14. Sea $\mathbb{Z}$ el grupo discreto de los enteros actuando sobre los números reales $\mathbb{R}$ por la siguiente acción continua:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (n, x) &\mapsto 2^n x. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{R}$ es localmente compacto y Hausdorff, entonces $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{R}$ es un grupoide étale Hausdorff. Consideremos su restricción $(\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{R})_{(-1,1)}^{(-1,1)}$, que resulta un grupoide étale y Hausdorff, pero que no es propio pues

$$(\mathbf{d}, \mathbf{r})^{-1}(0, 0) = \{(n, x) \in \mathbb{Z} \times (-1, 1) \mid 2^n x = x = 0\} = \mathbb{Z} \times \{0\} = \text{Stab}_{\mathbb{Z}}(0)$$

no es compacto. Veamos que $(\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{R})_{(-1,1)}^{(-1,1)}$ no es localmente isomorfo al grupoide $\mathbb{Z} \ltimes U_0$ para ningún abierto $0 \in U_0 \subseteq (-1, 1)$. Supongamos que existe $0 \in U_0 \subseteq (-1, 1)$ tal que $(\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{R})_{U_0}^{U_0}$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \ltimes U_0$, para alguna acción de $\mathbb{Z}$ en U_0 . Consideremos, además, un intervalo conexo $0 \in J \subseteq U_0$. Veamos que la acción de $\mathbb{Z}$ sobre elementos de J coincide con la de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{R}$ definida anteriormente. Para ello, tomemos $\gamma: [0, 1] \rightarrow J$ un camino entre 0 y x , para algún $x \in J$. Como la función dominio es un revestimiento en los grupoides de transformación, para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe un único $\tilde{\gamma}_n: [0, 1] \rightarrow (\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{R})_{U_0}^{U_0}$ tal que $\tilde{\gamma}_n(0) = (n, 0)$ y $\mathbf{d} \circ \tilde{\gamma}_n = \gamma$. En particular, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} [0, 1] & \xrightarrow{\gamma_n} & (\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{R})_{U_0}^{U_0} & \hookrightarrow & \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{R} \\ & \searrow \gamma & \downarrow \mathbf{d} & & \downarrow \mathbf{d} \\ & & U_0 & \hookrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

Como el dominio del grupoide de transformación $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{R}$ también levanta γ de forma única con condición inicial, podemos elegir el levantado exterior según $\gamma_n(t) = (n, \gamma(t)) \in \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{R}$ y éste debe coincidir con $\tilde{\gamma}_n: [0, 1] \rightarrow (\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{R})_{U_0}^{U_0}$. En otras palabras, para cada $n \in \mathbb{Z}$ debe ser que

$$(n, \gamma(t)) \in (\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{R})_{U_0}^{U_0},$$

para todo $t \in [0, 1]$. Esto dice que $2^n \gamma(t) = \mathbf{r}((n, \gamma_n(t))) \in U_0$ para todo $t \in [0, 1]$. En particular, $2^n x \in U_0$. Como $x \in J$ era arbitrario, se tiene que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, vale que $2^n J \subseteq U_0 \subseteq (-1, 1)$, lo cual es una contradicción pues J es un abierto acotado no vacío.

1.3. Semigrupos

La idea de esta sección es explorar las propiedades algebraicas de los semigrupos y los semigrupos inversos. A su vez, estudiaremos el caso particular de semigrupo inverso de bisecciones abiertas compactas sobre un grupoide amplio y responderemos la pregunta de si todo semigrupo inverso es de esta forma. Comencemos introduciendo uno de los ejemplos más importantes de semigrupo inverso:

Ejemplo 1.3.1 (Homeomorfismos parciales). Para cada espacio topológico X , consideramos

$$\mathcal{I}(X) := \{f : U \xrightarrow{\cong} V \mid U, V \in \mathcal{O}(X)\}$$

el semigrupo de **homeomorfismos parciales** sobre el espacio X . Sus elementos son homeomorfismos entre abiertos de X y la multiplicación de dos homeomorfismos $f : U \rightarrow V$ y $g : U' \rightarrow V'$ viene dada por la composición en el dominio más grande donde son componibles:

$$g^{-1}(U \cap V') \xrightarrow{g} U \cap V' \xrightarrow{f} f(U \cap V').$$

Es claro que $\mathcal{I}(X)$ resulta un semigrupo, que además es inverso pues para cada $f : U \rightarrow V$, f^{-1} es el único elemento que verifica $ff^{-1}f = f$ y $f^{-1}ff^{-1} = f^{-1}$. Cuando X tiene la topología discreta, $\mathcal{I}(X)$ es el semigrupo inverso de biyecciones parciales en un conjunto X .

El ejemplo anterior es el más importante considerando la siguiente versión conocida del Teorema de Cayley para semigrupos inversos:

Teorema 1.3.2 ([Pre54, Wagner-Preston]). Todo semigrupo inverso es isomorfo a un subsemigrupo inverso del semigrupo inverso de biyecciones sobre un conjunto. ■

1.3.1. Álgebras de semigrupos

Al igual que en el caso de grupos, es posible definir el álgebra *libre* sobre un anillo para un semigrupo:

Definición 1.3.3 (Álgebra de semigrupo). Si S es un semigrupo y ℓ es un anillo conmutativo con unidad, el **álgebra de semigrupo** $\ell[S]$ viene dado por el ℓ -módulo

$$\ell[S] := \{f : S \rightarrow \ell \mid \text{sop}(f) \text{ finito}\},$$

dotado de la suma y producto por escalares punto a punto y el producto de convolución

$$(f * g)(s) := \sum_{t \cdot r = s} f(t)g(r).$$

para cada $f, g \in \ell[S]$ y $s \in S$.

Como vimos en el caso de las bisecciones sobre un grupoide amplio, no todo semigrupo inverso tiene elemento neutro y, por lo tanto, es de esperar que no siempre el álgebra de semigrupo sea unital.

Ejemplo 1.3.4. Sean $\mathbb{N}$ el semigrupo (sin unidad) de enteros positivos y $\mathbb{Z}$ el anillo de enteros. Resulta evidente que el anillo de semigrupo $\mathbb{Z}[\mathbb{N}]$ coincide con

$$\mathbb{Z}[\mathbb{N}] = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x^i \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

cuya la multiplicación es exactamente la de polinomios. De esta forma, $\mathbb{Z}[\mathbb{N}]$ es el subanillo de polinomios de grado mayor o igual a 1, que no tiene unidad.

Observación 1.3.5. Si S es un semigrupo con elemento neutro $1 \in S$, entonces la característica del neutro $\chi_1 \in \ell[S]$ es la unidad del álgebra de semigrupo para cualquier anillo conmutativo con unidad ℓ .

Lo que resulta sorprendente es que la vuelta de la observación anterior no es cierta:

Contraejemplo 1.3.6. Consideremos $X = \{0, 1\}$ con la topología discreta y $S \subseteq \mathcal{I}(X)$ el subsemigrupo dado por

$$S = \{\emptyset, \text{id}_{\{0\}}, \text{id}_{\{1\}}\}.$$

Como todos sus elementos son idempotentes, S es de hecho un semigrupo inverso. Por otra parte, es claro que S no tiene unidad. Sin embargo, veamos que el álgebra de semigrupo $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}[S]$ sí es unital. En particular, veamos que la suma de características

$$u := (\chi_{\emptyset} + \chi_{\text{id}_{\{0\}}} + \chi_{\text{id}_{\{1\}}}) \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}[S]$$

es la unidad del álgebra de semigrupo. Como las funciones características de los elementos de S generan linealmente el álgebra, veamos que actúa unitalmente en cada característica:

$$\begin{aligned} u * \chi_{\emptyset} &= \chi_{\emptyset \cdot \emptyset} + \chi_{\text{id}_{\{0\}} \cdot \emptyset} + \chi_{\text{id}_{\{1\}} \cdot \emptyset} = [3]\chi_{\emptyset} = \chi_{\emptyset} \\ u * \chi_{\text{id}_{\{0\}}} &= \chi_{\emptyset \cdot \text{id}_{\{0\}}} + \chi_{\text{id}_{\{0\}} \cdot \text{id}_{\{0\}}} + \chi_{\text{id}_{\{1\}} \cdot \text{id}_{\{0\}}} = \chi_{\text{id}_{\{0\}}} + [2]\chi_{\emptyset} = \chi_{\text{id}_{\{0\}}} \\ u * \chi_{\text{id}_{\{1\}}} &= \chi_{\emptyset \cdot \text{id}_{\{1\}}} + \chi_{\text{id}_{\{0\}} \cdot \text{id}_{\{1\}}} + \chi_{\text{id}_{\{1\}} \cdot \text{id}_{\{1\}}} = \chi_{\text{id}_{\{1\}}} + [2]\chi_{\emptyset} = \chi_{\text{id}_{\{1\}}}. \end{aligned}$$

De forma análoga se obtiene que u es el elemento neutro a derecha y por lo tanto $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}[S]$ es un álgebra unital.

Usaremos el contraejemplo anterior para probar que no todo semigrupo inverso se puede realizar como el semigrupo inverso de bisecciones abiertas compactas para algún grupoide amplio. En particular, veremos que para los semigrupos inversos de esta clase sí es cierto que tienen unidad exactamente cuando su álgebra sobre algún anillo es unital.

Teorema 1.3.7. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y ℓ un anillo conmutativo con unidad. Entonces $\ell[\mathcal{B}^c(\mathcal{G})]$ es unital si y solo si $\mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ es un semigrupo inverso con unidad.

Demostración. La vuelta de la proposición es cierta en general. Supongamos que $u \in \ell[\mathcal{B}^c(\mathcal{G})]$ es una unidad del álgebra del semigrupo de bisecciones abiertas compactas. Como las características son una base del álgebra como ℓ -módulo, existen $a_1, \dots, a_n \in \ell$ y $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ tales que

$$u = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{\sigma_i}.$$

Por la Proposición 1.1.22, basta ver que $\mathcal{G}^{(0)}$ es compacto. Sean $x \in \mathcal{G}^{(0)}$ y $x \in U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ un abierto compacto, que existe porque $\mathcal{G}$ es amplio y $\mathcal{G}^{(0)}$ es localmente compacto y Hausdorff. Luego, se sigue que $U \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ y por lo tanto

$$\chi_U = \chi_U * u = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{(U\sigma_i)}.$$

Como las bisecciones son una base, debe existir al menos un coeficiente a_i de la combinación lineal anterior no nulo para el cual $\chi_U = \chi_{(U\sigma_i)}$ y por lo tanto que $U = U\sigma_i$. Esto dice que $x = x \cdot g = g$, para algún $g \in \sigma_i$ tal que $\mathbf{r}(g) = x$ y por lo tanto que $x \in \sigma_i$. Como x es un elemento arbitrario de $\mathcal{G}^{(0)}$, se sigue que

$$\mathcal{G}^{(0)} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \sigma_i.$$

Esto implica que $\mathcal{G}^{(0)} = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{d}(\sigma_i)$ y por lo tanto que $\mathcal{G}^{(0)}$ es compacto por ser una unión finita de compactos. Esto concluye la demostración, considerando la Proposición 1.1.22. ■

Corolario 1.3.8. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio y ℓ un anillo conmutativo con unidad, entonces $\ell[\mathcal{B}^c(\mathcal{G})]$ tiene unidad si y solo si $\mathcal{G}^{(0)}$ es compacto.

Finalmente, obtenemos el resultado buscado:

Teorema 1.3.9. Existe un semigrupo inverso que no es isomorfo al semigrupo inverso de bisecciones abiertas y compactas de ningún grupoide amplio.

Demostración. Por el Teorema 1.3.7, un semigrupo inverso S de bisecciones abiertas y compactas de algún grupoide amplio tiene unidad si y solo si $\ell[S]$ tiene unidad para algún anillo conmutativo con unidad ℓ . Sin embargo, tomando S como en el Contraejemplo 1.3.6 y $\ell = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, obtenemos que el anillo de semigrupo $\ell[S]$ tiene unidad pero su semigrupo inverso correspondiente no. De esta forma, S no es isomorfo al semigrupo inverso de bisecciones abiertas y compactas de ningún grupoide amplio. ■

1.3.2. El grupoide de gérmenes

La idea de esta sección es describir una familia de grupoides que provienen de acciones de semigrupos en espacios topológicos. Más aún, enunciaremos un resultado que dice que todos los grupoides etales son de esta forma. Los detalles de todas las demostraciones pueden encontrarse en [Exe08] o en [Pat12].

Definición 1.3.10. Sean S un semigrupo y X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff. Una **acción de semigrupos** de S en X es un morfismo de semigrupos:

$$\begin{aligned} \theta: S &\rightarrow \mathcal{I}(X) \\ s &\mapsto \theta_s. \end{aligned}$$

Denotamos $E(S) \subseteq S$ al conjunto de idempotentes en S y $X_e = \text{dom}(\theta_e)$ para cada $e \in E(S)$. Diremos que una acción de S en X es **no degenerada** si satisface que

$$X = \bigcup_{e \in E(S)} X_e.$$

A lo largo de esta sección, todas las acciones de semigrupos inversos consideradas serán no degeneradas.

Observación 1.3.11. Dado cualquier elemento $s \in S$ un semigrupo inverso, se tiene que $(ss)^*$ y (s^*s) son idempotentes. Más aún, si $\theta : S \rightarrow \mathcal{I}(X)$ es una acción de S en un espacio localmente compacto y Hausdorff, es claro que $\theta_{s^*} = \theta_s^{-1}$.

Resultará relevante estudiar precisamente las acciones de los semigrupos inversos y es por esto que remarcamos el siguiente lema, del cual desconocemos una referencia precisas:

Lema 1.3.12. Sea S un semigrupo inverso. Entonces $E(S) \subseteq S$ es un subsemigrupo inverso conmutativo. Es decir, $E(S)$ es cerrado por multiplicación, inversos y, además, la operación es conmutativa.

Demostración. Es claro que si $e \in E(S)$ es un idempotente, entonces $e^* = e$. Por otra parte, consideremos $f \in E(S)$ otro idempotente y veamos que $(ef)^* = f(ef)^*e$. En efecto,

$$(ef)[f(ef)^*e](ef) = (ef)(ef)^*(ef) = ef$$

y también

$$[f(ef)^*e](ef)[f(ef)^*e] = [f(ef)^*e]^2 = f[(ef)^*(ef)(ef)^*]e = [f(ef)^*e],$$

probando lo deseado. De hecho, también vimos que $[f(ef)^*e]$ es idempotente y, por lo tanto, $(ef)^* \in E(S)$. Por lo anterior, $(ef) \in E(S)$, de modo que los idempotentes en un semigrupo inverso son cerrados por multiplicación e inversos. Finalmente, tenemos que

$$ef = efef = ef^2e^2f = (ef)(fe)(ef),$$

y también que

$$fe = fefe = fe^2f^2e = (fe)(ef)(fe).$$

Esto prueba que $(fe) = (ef)^* = ef$, de modo tal que los idempotentes conmutan. ■

Procedamos a construir el denominado grupoide de *gérmenes* asociado a la acción de un semigrupo inverso en un espacio.

Definición 1.3.13. Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff y $\theta : S \rightarrow \mathcal{I}(X)$ una acción de un semigrupo inverso. Definimos

$$\Omega := \{(s, x) \in S \times X : x \in X_{ss^*}\},$$

y decimos que $(s, x) \sim (t, y)$ si $x = y$ y existe $e \in E(S)$ tal que $se = te$. A la clase de un elemento $(s, x) \in \Omega$ bajo la relación $\sim$ la denotamos $[s, x] \in \Omega / \sim$.

Es claro que $\sim$ en la definición anterior determina una relación de equivalencia. Más aún, para el caso en el cual $S = I(X)$ es la acción trivial, esta construcción recupera exactamente la relación de gérmenes sobre un espacio topológico X : allí los idempotentes son las identidades de abiertos del espacio. Veamos cómo construir un grupoide a partir de una acción de un semigrupo inverso:

Construcción 1.3.14. Dada $\theta : S \rightarrow \mathcal{I}(X)$ una acción de un semigrupo inverso, consideramos Ω y $\sim$ como en la Definición 1.3.13 y construimos el **grupoide de gérmenes** $\mathcal{G}(S)$ asociado como sigue:

$$\mathcal{G}^{(1)}(S) = \Omega / \sim, \quad \mathcal{G}^{(0)}(S) = X.$$

La aplicación dominio viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{d}: \mathcal{G}^{(1)}(S) &\rightarrow \mathcal{G}^{(0)}(S) \\ [s, x] &\mapsto x, \end{aligned}$$

y el rango viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}: \mathcal{G}^{(1)}(S) &\rightarrow \mathcal{G}^{(0)}(S) \\ [s, x] &\mapsto \theta_s(x). \end{aligned}$$

La multiplicación de dos elementos componibles $[s, \theta_t(y)]$ y $[t, y]$ viene dada por

$$[s, \theta_t(y)] \cdot [t, y] = [s, y].$$

Finalmente, el inverso de un elemento $[s, x]$ viene dado por

$$[s, x]^{-1} = [s^*, \theta_x(x)].$$

La buena definición de todas las aplicaciones y la demostración de que $\mathcal{G}(S)$ es un grupoide es el contenido de la Proposition 4.11 en [Exe08].

Veamos cómo construir la topología que hará de $\mathcal{G}(S)$ un grupoide étale.

Definición 1.3.15. Sea $\theta : S \rightarrow \mathcal{I}(X)$ una acción de un semigrupo inverso en un espacio localmente compacto y Hausdorff. Para cada $s \in S$ y abierto $U \subseteq X_{s^*s}$, definimos

$$\theta(s, U) := \{[s, x] \in \mathcal{G}(S) : x \in U\}.$$

El siguiente resultado dice que la familia anterior de subconjuntos configura una base para una topología de $\mathcal{G}^{(1)}(S)$ y, más aún, que dicha topología hace de $\mathcal{G}(S)$ un grupoide étale:

Teorema 1.3.16 ([Exe08, Proposition 4.17]). Sea $\theta : S \rightarrow \mathcal{I}(X)$ una acción de un semigrupo inverso en un espacio localmente compacto y Hausdorff. Entonces el grupoide $\mathcal{G}(S)$ admite una estructura de grupoide étale sobre X con una base de bisecciones abiertas dada por

$$\{\theta(s, U) : s \in S, U \subseteq X_{s^*s} \text{ abierto}\}.$$

El teorema anterior permite construir, de manera functorial, un grupoide étale sobre un espacio X a partir de cada acción (no degenerada) de un semigrupo inverso sobre ese espacio. A su vez, esta construcción otorga una herramienta para la construcción de grupoides de índole combinatorio, como por ejemplo los grupoides de Exel-Pardo, estudiados en [Exe08]. Veamos que esta construcción es esencialmente sobreyectiva. Es decir, veamos que si $\mathcal{G}$ es un grupoide étale, entonces podemos construir un semigrupo inverso junto a una acción sobre $\mathcal{G}^{(0)}$ que realice a $\mathcal{G}$ como su grupoide de gérmenes:

Ejemplo 1.3.17. Dado $\mathcal{G}$ un grupoide étale, podemos considerar el semigrupo inverso de bisecciones abiertas $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ y la acción de multiplicación:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathcal{G}) &\rightarrow \mathcal{I}(\mathcal{G}^{(0)}) \\ \sigma &\mapsto (x \mapsto \mathbf{r}|_{\sigma} \mathbf{d}^{-1}|_{\sigma}(x)).\end{aligned}$$

Una verificación directa muestra que la aplicación anterior determina un morfismo de semigrupos inversos y, por la hipótesis de que $\mathcal{G}$ es étale, se sigue que la acción es no degenerada.

Notar que la construcción de esta sección es análoga a la de los grupoides de transformación, estudiados previamente en este trabajo. El siguiente teorema, fundacional para la teoría de grupoides, dice que todo grupoide étale proviene de una acción de semigrupos inversos sobre su espacio de unidades. En ese sentido, nuestro Teorema 1.2.6 establece que, bajo ciertas hipótesis leves, es posible conseguir un resultado comparable, de carácter local, en donde la acción es la de un grupo y no solo la de un semigrupo inverso.

Teorema 1.3.18 ([Exe08, Proposition 5.4]). Todo grupoide étale $\mathcal{G}$ es isomorfo al grupoide de gérmenes dado por la acción canónica de su semigrupo de bisecciones abiertas en $\mathcal{G}^{(0)}$. En particular, la asignación

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\mathcal{B}(\mathcal{G})) &\rightarrow \mathcal{G} \\ [\sigma, x] &\mapsto \mathbf{d}|_{\sigma}^{-1}(x)\end{aligned}$$

es un homeomorfismo de grupoides topológicos

1.4. El álgebra de Steinberg

En esta sección estudiaremos el objeto algebraico de mayor relevancia y que le da nombre a esta tesis. Por un lado, para un anillo discreto ℓ , sabemos que a cada grupo G es posible asociarle un ℓ -álgebra de manera funtorial, conocida como el álgebra de grupo $\ell[G]$. Por otra parte, un objeto análogo se encuentra en el mundo de la Topología: el Teorema de Gelfand–Naimark establece que la categoría de espacios compactos y Hausdorff es equivalente a la de C^* -álgebras conmutativas y unital. En efecto, la equivalencia viene implementada por asignarle a cada espacio X la C^* -álgebra de funciones continuas con valores complejos $C(X)$. Siguiendo la heurística de que la teoría de grupoides configura un puente entre la teoría de grupos y la teoría de espacios, la siguiente definición pone de manifiesto un puente algebraico entre ambas partes:

Definición 1.4.1 ([Ste10]). Sean $\mathcal{G}$ un grupoide étale y ℓ un anillo conmutativo discreto. Definimos el **álgebra de Steinberg** como el ℓ -módulo $\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}) \subseteq \ell^{\mathcal{G}}$ cuyos elementos son funciones $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow \ell$ tales que existe $V \subseteq \mathcal{G}$ un abierto Hausdorff para el cual:

- $\varphi|_{\mathcal{G} \setminus V}$ es idénticamente nula,
- $\varphi|_V$ es continua con soporte compacto.

Es directo verificar que $\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})$ resulta un ℓ -módulo con la suma y la multiplicación por escalares punto a punto. En la bibliografía (ver [Ste10]) el álgebra de Steinberg suele ser

referida como el álgebra de funciones continuas compactamente soportadas. Sin embargo, veremos que $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ podría contener funciones discontinuas en el caso más general.

Proposición 1.4.2. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide étale y ℓ un anillo conmutativo discreto. Entonces $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ contiene a las funciones continuas con soporte compacto y Hausdorff. Más aún, coinciden en el caso donde $\mathcal{G}$ es Hausdorff.

Demostración. Si $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow \ell$ es cualquier función continua con soporte compacto y Hausdorff V , como ℓ es discreto, vale que

$$V := \text{sop}(\varphi) = \overline{\varphi^{-1}(\ell \setminus \{0\})} = \varphi^{-1}(\ell \setminus \{0\})$$

es un abierto Hausdorff compacto. En este abierto, vale que $\varphi|_{\mathcal{G} \setminus V} \equiv 0$ y $\varphi|_V$ es continua con soporte compacto. Esto dice que $\varphi \in \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$. Por otra parte, si $\mathcal{G}$ es Hausdorff y $\varphi \in \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ entonces existe un abierto Hausdorff V para el cual $\varphi|_V$ es continua con soporte compacto y $\varphi|_{\mathcal{G} \setminus V} \equiv 0$. Como $\text{im}(\varphi) \setminus \{0\} = \text{im}(\varphi|_V) \setminus \{0\}$, ℓ es discreto y $\varphi|_V$ es continua con soporte compacto, entonces $\text{im}(\varphi) \setminus \{0\} = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \ell$ es finita. Además, para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que $\varphi|_V^{-1}(a_i) = \varphi^{-1}(a_i) \subseteq \text{sop}(\varphi|_V)$ es clopen en un compacto y por ende compacto y además abierto en $\mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ es Hausdorff, se sigue que cada $\varphi^{-1}(a_i)$ es clopen y por ende la función característica $\chi_{\varphi^{-1}(a_i)}$ es continua. Esto implica, considerando la expresión

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{\varphi^{-1}(a_i)},$$

que φ es continua con soporte compacto y Hausdorff. ■

Veamos que el álgebra de Steinberg podría contener funciones discontinuas si no asumimos que $\mathcal{G}$ es Hausdorff:

Contraejemplo 1.4.3. Sea $\mathcal{G}$ la serpiente de dos cabezas sobre el espacio de Cantor C , como en el Ejemplo 1.1.26. Sea $C \subseteq \mathcal{G}$ el espacio de unidades del grupoide, que es compacto. Es claro que la función característica χ_C está en el ℓ -módulo $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$, pues $C \subseteq \mathcal{G}$ es un abierto Hausdorff compacto y el soporte de χ_C es exactamente C . Sin embargo, el $\{0\} \subseteq \ell$ es abierto y su preimagen es $\{\tilde{1}\} \in \mathcal{G}$ que, por hipótesis, no es abierto en $\mathcal{G}$. Esto muestra que la función χ_C no es continua y por ende el ℓ -módulo $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ contiene estrictamente a las funciones continuas compactamente soportadas.

La idea de lo que sigue es dotar al ℓ -módulo $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ con un producto de convolución que lo convierta en una ℓ -álgebra.

Definición 1.4.4 (Convolución). Sea $\mathcal{G}$ un grupoide étale y $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$. Su **producto de convolución** $\varphi * \psi: \mathcal{G} \rightarrow \ell$ viene dado, para cada $g \in \mathcal{G}$, por la fórmula

$$(\varphi * \psi)(g) = \sum_{\mathbf{d}(h)=\mathbf{d}(g)} \varphi(gh^{-1})\psi(h). \quad (1.4.5)$$

Notar que para un grupoide $\mathcal{G}$ étale, si $g \in \mathcal{G}$ entonces la fibra $\mathbf{d}^{-1}(\mathbf{d}(g))$ es discreta y cerrada, pues $\mathbf{d}$ es homeomorfismo local y $\mathcal{G}^{(0)}$ es Hausdorff. Luego, para cada $\psi \in \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ necesariamente $\mathbf{d}^{-1}(\mathbf{d}(g))$ interseca a su soporte en un conjunto finito, pues este es compacto.

Esto implica que la suma 1.4.5 tiene solo finitos términos no nulos y el producto de convolución define una función. En esta clase de argumentos resulta evidente el porqué de las condiciones requeridas en la definición de grupoide étale. Es posible probar (ver [Exe08]) que el producto de convolución define una estructura de ℓ -álgebra en el caso étale. Sin embargo, imponiendo condiciones adicionales de amplitud sobre los grupoides considerados, será posible describir la estructura de ℓ -álgebra a través del álgebra de semigrupo libre en las bisecciones abiertas y compactas. Restringiremos nuestra atención a ese caso:

Teorema 1.4.6. Sean $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y ℓ un anillo conmutativo discreto. Entonces $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ está generado como ℓ -módulo por las funciones características de las bisecciones abiertas y compactas:

$$\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}) = \text{span}_\ell \langle \chi_\sigma : \sigma \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G}) \rangle.$$

Demostración. Como las bisecciones son abiertas, compactas y Hausdorff, es claro que para cada $\sigma \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ se tiene que $\chi_\sigma \in \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$. Esto implica que el subespacio generado linealmente por las características de abiertos y compactas está contenido en el álgebra de Steinberg. Sea $\varphi \in \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ y V un abierto Hausdorff para el cual $\varphi|_V$ es continua con soporte compacto y $\varphi_{\mathcal{G} \setminus V} \equiv 0$. De manera análoga al caso de la Proposición 1.4.2, debe ser que $\text{im}(\varphi) = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \ell$ y que $\varphi^{-1}(a_i) \subseteq \text{sop}(\varphi) \subseteq V$ sea compacto, abierto y Hausdorff para cada $1 \leq i \leq n$. Como $\mathcal{G}$ no es Hausdorff, no podemos asegurar que cada $\varphi^{-1}(a_i)$ sea clopen en $\mathcal{G}$ y por ende $\chi_{\varphi^{-1}(a_i)}$. No obstante, sí es cierto que serán compactos, abiertos y Hausdorff, y que tenemos una escritura de la forma

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{\varphi^{-1}(a_i)}.$$

Como para cada $1 \leq i \leq n$ vale que $\chi_{\varphi^{-1}(a_i)} \in \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$, basta ver que si $U \subseteq \mathcal{G}$ es abierto, compacto y Hausdorff, entonces está generado linealmente por características de bisecciones abiertas y compactas. Como $\mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ es una base para la topología de $\mathcal{G}$ y U es compacto, entonces existen $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ tales que

$$U = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_n.$$

Como U es Hausdorff y los abiertos $(\sigma_i)_{i=1}^n$ son compactos, podemos disjuntarlos considerando, para cada $\emptyset \neq I \subseteq \llbracket n \rrbracket$, el subconjunto

$$\tau_I := \bigcap_{i \in I} \sigma_i \setminus \left(\bigcup_{j \notin I} \sigma_j \right).$$

Como U es Hausdorff, cada σ_i es clopen en U y por lo tanto $\bigcap_{i \in I} \sigma_i \subseteq U$ es compacto en U . A su vez, resulta que cada $\tau_I \subseteq U$ es clopen en U y por lo tanto τ_I es una bisección compacta y abierta para cada $\emptyset \neq I \subseteq \llbracket n \rrbracket$. De esta forma, obtenemos una descomposición

$$U = \bigsqcup_{\emptyset \neq I \subseteq \llbracket n \rrbracket} \tau_I.$$

Esto dice que podemos escribir a la característica de U como

$$\chi_U = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \llbracket n \rrbracket} \chi_{\tau_I}$$

y por lo tanto las características de compactos abiertos y Hausdorff están generadas linealmente por características de bisecciones abiertas y compactas. Esto junto a lo anterior muestra que todo elemento del álgebra de Steinberg es combinación ℓ -lineal de características de bisecciones compactas y abiertas, como queríamos. ■

Corolario 1.4.7. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio, entonces se tiene un epimorfismo de ℓ -módulos

$$\begin{aligned} \chi : \ell[\mathcal{B}^c(\mathcal{G})] &\rightarrow \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}) \\ \sigma &\mapsto \chi_\sigma. \end{aligned}$$

Usaremos el resultado del Teorema 1.4.6 para probar que, efectivamente, $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ resulta un ℓ -álgebra en el caso donde $\mathcal{G}$ sea un grupoide amplio.

Proposición 1.4.8. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio, entonces el producto de convolución define una estructura de ℓ -álgebra asociativa para la cual $\chi : \ell[\mathcal{B}^c(\mathcal{G})] \rightarrow \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ es un morfismo sobreyectivo de ℓ -álgebras.

Demostración. Es directo verificar que la expresión del producto de convolución es ℓ -bilineal y asociativo en $\ell^\mathcal{G}$. Por lo tanto, basta verificar que si $\sigma, \tau \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ entonces $\chi_\sigma * \chi_\tau = \chi_{\sigma\tau}$. En ese caso, si $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{\sigma_i}$ y $\psi = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{\tau_j}$ entonces

$$\varphi * \psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \chi_{\sigma_i \tau_j},$$

y como $\sigma_i \tau_j \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ para cada $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, entonces $\varphi * \psi \in \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$. Consideremos entonces $\sigma, \tau \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ dos bisecciones abiertas y compactas. Entonces para cada $g \in \mathcal{G}$ se tiene que

$$(\chi_\sigma * \chi_\tau)(g) = \sum_{\mathbf{d}(h)=\mathbf{d}(g)} \chi_\sigma(gh^{-1})\chi_\tau(h).$$

Si $g \in \sigma\tau$, entonces existen $\alpha \in \sigma$ y $\beta \in \tau$ tales que $g = \alpha\beta$. Esto implica que $g\beta^{-1} = \alpha \in \sigma$ y β es el único en τ tal que $\mathbf{d}(\beta) = \mathbf{d}(g)$, por lo que

$$\chi_\sigma * \chi_\tau(g) = \chi_\sigma(g\beta^{-1})\chi_\tau(\beta) = 1 = \chi_{\sigma\tau}(g).$$

Por otro lado, si $g \notin \sigma\tau$, entonces para cada $h \in \mathcal{G}$ tal que $\mathbf{d}(g) = \mathbf{d}(h)$ tenemos dos posibilidades: o bien $h \notin \tau$, o bien $h \in \tau$ y $gh^{-1} \notin \sigma\tau$, pues de otra forma $g \in \sigma\tau$. En cualquiera de estos casos se tiene que $\chi_\sigma(gh^{-1})\chi_\tau(h) = 0$ y por lo tanto que

$$\chi_\sigma * \chi_\tau(g) = 0 = \chi_{\sigma\tau}(g).$$

Finalmente, obtuvimos por la arbitrariedad de $g \in \mathcal{G}$ la igualdad $\chi_\sigma * \chi_\tau = \chi_{\sigma\tau}$. Esta igualdad determina, por bilinealidad, la estructura de ℓ -álgebra en $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ y además prueba que $\chi : \ell[\mathcal{B}^c(\mathcal{G})] \rightarrow \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ es morfismo de ℓ -álgebras. ■

Habiendo definido la estructura de álgebra, veamos que el álgebra de un grupoide constituye una generalización de lo sabido cuando $\mathcal{G}$ es un grupo:

Ejemplo 1.4.9 (Álgebra de grupo). Consideremos $\mathcal{G} = G$ el grupoide amplio asociado a un grupo discreto G , para el cual $\mathcal{G}^{(0)} = \star$ y las bisecciones son los elementos del grupo. En este caso, el álgebra de Steinberg $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}) = \ell[G]$ recupera la construcción del álgebra de grupo, que es precisamente el álgebra generada linealmente por las características de los elementos.

Vale la pena explorar propiedades de unitalidad para el álgebra de Steinberg. Siguiendo el espíritu de la demostración del Teorema 1.3.7, se obtiene el resultado análogo para álgebras de Steinberg de un grupoide amplio:

Teorema 1.4.10 ([Ste10]). Sean $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y ℓ un anillo conmutativo con unidad. Entonces $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ es unital si y solo si $\mathcal{G}^{(0)}$ es compacto.

Aquí exhibiremos una demostración ligeramente distinta a la propuesta por Steinberg, que explicita la correlación con el Teorema 1.3.7.

Demostración. Supongamos primero que $\mathcal{G}^{(0)}$ es compacto. En ese caso, por el Corolario 1.3.8 resulta que $\ell[\mathcal{B}^c(\mathcal{G})]$ es unital. Esto implica que el álgebra de Steinberg recibe un morfismo sobreyectivo de un anillo con unidad; en concreto, $\chi: \ell[\mathcal{B}^c(\mathcal{G})] \twoheadrightarrow \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$. Como la unitalidad es preservada por morfismos sobreyectivos de anillos, se sigue que $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ es unital. Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ admite una unidad $u: \mathcal{G} \rightarrow \ell$ y procedamos como en la demostración del Teorema 1.3.7. En primer lugar, por el Teorema 1.4.6 existen $a_1, \dots, a_n \in \ell$ y $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ tales que

$$u = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{\sigma_i}.$$

Si $x \in \mathcal{G}^{(0)}$, por la amplitud existe U abierto y compacto tal que $x \in U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$. En particular, $U \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G})$ y por ende $\chi_U \in \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$. Por lo tanto, podemos considerar

$$\chi_U = \chi_U * u = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{(U\sigma_i)}.$$

Como $\chi_U(x) = 1$, necesariamente debe existir algún $1 \leq i \leq n$ para el cual $\chi_{(U\sigma_i)}(x) = 1$. Es decir, probamos que $x \in U\sigma_i$ y por lo tanto $x = xg = g$, para algún $g \in \sigma_i$ tal que $\mathbf{r}(g) = x$. Esto dice que $x \in \sigma_i$ y, por la arbitrariedad de $x \in \mathcal{G}^{(0)}$, vale que

$$\mathcal{G}^{(0)} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \sigma_i.$$

Esto implica que $\mathcal{G}^{(0)} = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{d}(\sigma_i)$ y por lo tanto que $\mathcal{G}^{(0)}$ es compacto por ser una unión finita de compactos. ■

1.5. Acciones de grupoides

La idea de esta sección es extender lo sabido para el caso de grupos. En tal caso, si G es un grupo topológico, un G -espacio topológico (a izquierda) es un espacio topológico Z junto a una

acción de G (a izquierda) para la cual la multiplicación $\bullet: G \times Z \rightarrow Z$ es una función continua. Estudiar las acciones de grupos en espacios no solo es relevante en un contexto topológico, sino también porta información algebraica. En concreto, si ℓ es un anillo conmutativo discreto, una acción de G en un espacio Z induce una estructura de $\ell[G]$ -módulo en el grupo abeliano de funciones continuas $C(Z, \ell)$ con la suma punto a punto. En particular, si $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i g_i \in \ell[G]$ y $f \in C(Z, \ell)$ la multiplicación viene dada por

$$(\alpha \cdot f) = \sum_{i=1}^n a_i f(g_i^{-1} \bullet -).$$

En pos de generalizar lo anterior, debemos tener en cuenta que la multiplicación en los grupoides es parcial. Es decir, la acción de un grupoide topológico sobre un espacio deberá venir equipada con una multiplicación y una función que indique cuáles son los pares de elementos del grupoide y puntos del espacio que son multiplicables entre sí. Más aún, veremos que, en analogía al caso anterior, la acción de grupoides amplios sobre un espacio induce una estructura de módulo sobre el álgebra de Steinberg en un grupo abeliano de funciones con valores en un anillo. Esta observación resulta clave para definir una teoría de homología de grupoides amplios.

1.5.1. Espacios sobre un grupoide

Definición 1.5.1. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide topológico. Un $\mathcal{G}$ -espacio (a izquierda) es un espacio topológico Z junto a:

- una función continua $\rho: Z \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ denominada **ancla**,
- una función continua $\bullet: \mathcal{G}_d \times_{\rho} Z \rightarrow Z$ de **multiplicación**,

que satisfacen la conmutatividad de los siguientes diagramas:

(1) Compatibilidad del ancla con el rango:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_d \times_{\rho} Z & \xrightarrow{\bullet} & Z \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \rho \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{r} & \mathcal{G}^{(0)} \end{array}$$

(2) Unitalidad de la multiplicación:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{(\rho, \text{id})} & \mathcal{G}_d \times_{\rho} Z \\ & \searrow & \downarrow \bullet \\ & & Z \end{array}$$

(3) Asociatividad de la multiplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_d \times_r \mathcal{G}_d \times_{\rho} Z & \xrightarrow{(\text{id}, \bullet)} & \mathcal{G}_d \times_{\rho} Z \\ (m, \text{id}) \downarrow & & \downarrow \bullet \\ \mathcal{G}_d \times_{\rho} Z & \xrightarrow{\bullet} & Z \end{array}$$

Análogamente se tiene una noción de $\mathcal{G}$ -espacio a derecha. A lo largo de esta tesis, tomaremos la convención de notar como $Z \xrightarrow{\rho} \mathcal{G}^{(0)}$ a los $\mathcal{G}$ -espacios a izquierda y como $E \xrightarrow{\rho} \mathcal{G}^{(0)}$ a los $\mathcal{G}$ -espacios a derecha. Salvo que se aclare lo contrario, todo lo que sigue a continuación es válido tanto para $\mathcal{G}$ -espacios a izquierda como a derecha.

Definición 1.5.2. Un **morfismo** entre dos $\mathcal{G}$ -espacios a izquierda (resp. a derecha) $Z_1 \xrightarrow{\rho_1} \mathcal{G}^{(0)}$ y $Z_2 \xrightarrow{\rho_2} \mathcal{G}^{(0)}$ es una función continua $f : Z_1 \rightarrow Z_2$ que conmuta con el ancla:

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \xrightarrow{f} & Z_2 \\ & \searrow \rho_1 & \swarrow \rho_2 \\ & \mathcal{G}^{(0)} & \end{array}$$

y preserva la multiplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_d \times_{\rho_1} Z_1 & \xrightarrow{(\text{id}, f)} & \mathcal{G}_d \times_{\rho_2} Z_2 \\ \bullet \downarrow & & \downarrow \bullet \\ Z_1 & \xrightarrow{f} & Z_2 \end{array}$$

Explícitamente, cada vez que $\mathbf{d}(g) = \rho_1(z)$ para $g \in \mathcal{G}$ y $z \in Z_1$, se tiene que $f(g \bullet z) = g \bullet f(z)$. Denotamos $\mathbf{Top}(\mathcal{G})$ a la categoría de $\mathcal{G}$ -espacios a izquierda y $\text{map}_{\mathcal{G}}(Z_1, Z_2)$ al conjunto de morfismos de $\mathcal{G}$ -espacios entre Z_1 y Z_2 .

Observación 1.5.3. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide étale y $\rho : Z \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ es un $\mathcal{G}$ -espacio, entonces la acción es un homeomorfismo local. En efecto, $(\text{pr}_1, \bullet) : \mathcal{G}_d \times_{\rho} Z \rightarrow \mathcal{G}_r \times_{\rho} Z$ es un homeomorfismo. Luego, como los homeomorfismos locales son estables por cambio de base, y por la propiedad 2 de 3, el siguiente diagrama conmutativo dice que $\bullet$ es un homeomorfismo local:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}_d \times_{\rho} Z & \xrightarrow{(\text{id}, \bullet)} & \mathcal{G}_r \times_{\rho} Z & \xrightarrow{\text{pr}_1} & \mathcal{G} \\ & \searrow \bullet & \downarrow \text{pr}_2 & & \downarrow \mathbf{r} \\ & & Z & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{G}^{(0)} \end{array}$$

Definición 1.5.4. Un $\mathcal{G}$ -espacio se dice **étale** si su ancla es un homeomorfismo local. A la subcategoría plena de $\mathbf{Top}(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$ -espacio étales a izquierda la denotamos $\mathbf{Ét}(\mathcal{G})$.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.5.5 (Acción de conjugación). Todo grupoide topológico $\mathcal{G}$ define una acción de **conjugación** sobre su espacio de unidades $\mathcal{G}^{(0)}$, cuya ancla es la identidad $\mathcal{G}^{(0)} \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{G}^{(0)}$ y su multiplicación (a izquierda) es

$$\bullet : \mathcal{G}_d \times_{\text{id}} \mathcal{G}^{(0)} \cong \mathcal{G} \xrightarrow{\mathbf{r}} \mathcal{G}^{(0)}.$$

Análogamente, es posible definir una acción a derecha cuya ancla es la identidad y la multiplicación proviene de la función dominio. La acción se denomina de conjugación pues cada vez

que $(g, \mathbf{d}(g)) \in \mathcal{G}_{\mathbf{d}} \times_{\text{id}} \mathcal{G}^{(0)}$ la multiplicación viene dada por

$$g \bullet \mathbf{d}(g) = \mathbf{r}(g) = g g^{-1} = g \mathbf{d}(g) g^{-1}.$$

Esta acción siempre define un $\mathcal{G}$ -espacio étale.

Ejemplo 1.5.6 (Acción de traslación). Todo grupoide topológico $\mathcal{G}$ define un $\mathcal{G}$ -espacio a izquierda (resp. a derecha) por *traslación*, cuyo ancla es el rango (resp. el dominio) y la multiplicación es exactamente la del grupoide $m: \mathcal{G}_{\mathbf{d}} \times_{\mathbf{r}} \mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ es étale entonces $\mathcal{G}$ como $\mathcal{G}$ -espacio con la acción de traslación también étale.

Ejemplo 1.5.7 ($\mathcal{B}G$ -espacios). Si G es un grupo topológico un $\mathcal{B}G$ -espacio Z es un espacio topológico junto a un ancla $Z \rightarrow \star$ y, como el pullback por la función al punto es el producto, una multiplicación $\bullet: G \times Z \rightarrow Z$ que satisface los axiomas de una acción de grupo. La condición de que el ancla sea la función al punto dice que no hay restricciones sobre el dominio de la multiplicación. En otras palabras, un $\mathcal{B}G$ -espacio es exactamente un G -espacio. Más aún, un tal G -espacio es étale si y solo si $Z \rightarrow \star$ es un homeomorfismo local; lo cual ocurre solamente cuando Z es discreto.

Veamos cómo los $\mathcal{G}$ -espacios dan lugar, al igual que en el caso de los grupos, a grupoides de transformación:

Ejemplo 1.5.8 (grupoide de transformación). Sea $Z \xrightarrow{\rho} \mathcal{G}^{(0)}$ un $\mathcal{G}$ -espacio a izquierda para $\mathcal{G}$ un grupoide topológico. El *grupoide de transformación* $\mathcal{G} \ltimes Z$ es el grupoide cuyas flechas son $(\mathcal{G} \ltimes Z)^{(1)} = \mathcal{G}_{\mathbf{d}} \times_{\rho} Z$, sus unidades $(\mathcal{G} \ltimes Z)^{(0)} = Z$, su dominio la proyección a la segunda coordenada, su rango la multiplicación $\bullet: \mathcal{G}_{\mathbf{d}} \times_{\rho} Z \rightarrow Z$, las identidades $z \mapsto [\rho(z), z] \in \mathcal{G} \ltimes Z$ para cada $z \in Z$, la composición dada por

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}_{\mathbf{d}} \times_{\rho} Z)_{\text{pr}_2} \times_{\bullet} (\mathcal{G}_{\mathbf{d}} \times_{\rho} Z) &\rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{d}} \times_{\rho} Z \\ ([h, g \bullet z], [g, z]) &\mapsto [hg, z], \end{aligned}$$

y la inversión según

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathbf{d}} \times_{\rho} Z &\rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{d}} \times_{\rho} Z \\ [g, z] &\mapsto [g^{-1}, g \bullet z]. \end{aligned}$$

Es claro que $\mathcal{G} \ltimes Z$ es un grupoide topológico. Si Z es localmente compacto y Hausdorff y $\mathbf{d}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ es un homeomorfismo local (por ejemplo, cuando $\mathcal{G}$ es étale), entonces, por estabilidad de cambio de base, $\text{pr}_2: \mathcal{G}_{\mathbf{d}} \times_{\rho} Z \rightarrow Z$ es un homeomorfismo local y por ende $\mathcal{G}_{\mathbf{d}} \times_{\rho} Z$ es un grupoide étale. En particular, si además Z tiene una base de abiertos compactos entonces $\mathcal{G} \ltimes Z$ es amplio. Esto ocurre, por ejemplo, en el caso donde $\mathcal{G}$ es amplio y Z es un $\mathcal{G}$ -espacio étale.

Resulta que todos los grupoides topológicos son un grupoide de transformación de un espacio en el sentido del ejemplo anterior:

Observación 1.5.9. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide topológico, entonces $\mathcal{G} \ltimes \mathcal{G}^{(0)}$ es un grupoide topológico, donde $\mathcal{G}^{(0)}$ es un $\mathcal{G}$ -espacio con la acción de conjugación a izquierda. Más aún, la multiplicación en $\mathcal{G}$ define un homeomorfismo de grupoides

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \ltimes \mathcal{G}^{(0)} &\xrightarrow{\cong} \mathcal{G} \\ (g, \mathbf{d}(g)) &\mapsto g \end{aligned}$$

cuya inversa es la función continua inducida en el pullback

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &\xrightarrow{\cong} \mathcal{G} \ltimes \mathcal{G}^{(0)} \\ g &\mapsto (g, \mathbf{d}(g)).\end{aligned}$$

Esto dice que todo grupoide topológico es el grupoide de transformación de la acción sobre su espacio de unidades.

Fijemos ℓ un anillo conmutativo discreto y definamos, motivados por el Teorema 1.4.6, un análogo del álgebra de Steinberg para $\mathcal{G}$ -espacios.

Definición 1.5.10. Sea Z un espacio topológico y $C_c(Z)$ el ℓ -módulo generado

$$C_c(Z, \ell) := \text{span}_{\ell} \langle \chi_U : Z \supseteq U \text{ abierto, compacto y Hausdorff} \rangle \subseteq \ell^Z$$

con la suma y multiplicación por escalares punto a punto.

Observación 1.5.11. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio, entonces $C_c(\mathcal{G}, \ell)$ coincide como ℓ -módulo con el álgebra de Steinberg $\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})$.

Proposición 1.5.12. El ℓ -módulo $C_c(Z, \ell)$ contiene a las funciones continuas con soporte compacto y Hausdorff. Más aún, coinciden en el caso donde Z es Hausdorff.

Demostración. Si $\varphi: Z \rightarrow \ell$ es continua con soporte compacto, como ℓ es discreto, debe ser que $\text{im}(\varphi) = \{a_1, \dots, a_n\}$ es finita y que

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{\varphi^{-1}(a_i)}.$$

Cada $\varphi^{-1}(a_i)$ es clopen en el soporte que es compacto y Hausdorff, y por ende son abiertos, compactos y Hausdorff. Luego, por definición tenemos que $\varphi \in C_c(Z, \ell)$. Recíprocamente, si Z es Hausdorff entonces cada compacto abierto $U \subseteq Z$ es clopen y por ende χ_U es continua. Esto implica que todas las funciones de $C_c(Z)$ son continuas y, como están generadas por combinaciones lineales finitas, son compactamente soportadas. ■

La construcción de $C_c(-, \ell)$ no es, en general, funtorial. No obstante, lo es si nos restringimos a cierta clase de espacios:

Definición 1.5.13. Decimos que un espacio topológico Z es *débilmente Booleano* si tiene una base de abiertos compactos y Hausdorff. Denotamos **WeakBool** a la subcategoría plena de espacios topológicos débilmente Booleanos y **WeakBool**_{ét} a la subcategoría de espacios Booleanos con homeomorfismos étales.

Observación 1.5.14. Un grupoide étale $\mathcal{G}$ es amplio si y solo si $\mathcal{G}^{(0)}$ es débilmente Booleano.

Veamos la funtorialidad:

Proposición 1.5.15. Se tiene un funtor covariante $C_c(-, \ell): \mathbf{WeakBool}_{\text{ét}} \rightarrow \ell\text{-mod}$ que para un homeomorfismo local $f: Z_1 \rightarrow Z_2$ viene dado por la función ℓ -lineal

$$C_c(Z_1, \ell) \xrightarrow{f_*} C_c(Z_2, \ell)$$

$$\varphi \mapsto f_*(\varphi)(z) := \sum_{\substack{w \in f^{-1}(z) \\ w \in \text{sop}(\varphi)}} \varphi(w).$$

Demostración. Veamos primero que la expresión está bien definida. De hecho, la buena definición no depende de que los espacios sean débilmente Booleanos. Para cada $\varphi \in C_c(Z_1, \ell)$, podemos escribir $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{U_i}$ para ciertos abiertos compactos Hausdorff $(U_i)_{i=1}^n \subseteq Z_1$. En consecuencia, la suma del enunciado estará soportada en $\cup_{i=1}^n U_i$ que es un abierto *localmente* Hausdorff, pues cada U_i lo es. En particular, la restricción de f dada por

$$f|_{\cup_{i=1}^n U_i}: \bigcup_{i=1}^n U_i \rightarrow f\left(\bigcup_{i=1}^n U_i\right)$$

es un homeomorfismo local entre abiertos, de modo que $f(\cup_{i=1}^n U_i)$ es un abierto localmente Hausdorff. Como los espacios localmente Hausdorff son T1, se sigue que $f(\cup_{i=1}^n U_i)$ es T1 y por ende sus puntos son cerrados. Si $z \notin f(\cup_{i=1}^n U_i) \subseteq Z_2$, entonces la suma del enunciado es nula pues no existe ningún $w \in \text{sop}(\varphi)$ tal que $f(w) = z$. Esto dice que la suma del enunciado está soportada en $(f|_{\cup_{i=1}^n U_i})^{-1}(z)$. Dado $z \in f(\cup_{i=1}^n U_i)$, entonces $\{z\} \subseteq f(\cup_{i=1}^n U_i)$ es un cerrado y por ende

$$(f|_{\cup_{i=1}^n U_i})^{-1}(z) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$$

es cerrado en $\cup_{i=1}^n U_i$ que además es discreto pues las fibras de un homeomorfismo local son discretas. A su vez, $\cup_{i=1}^n U_i$ es una unión finita de compactos y por lo tanto compacto. Entonces, $(f|_{\cup_{i=1}^n U_i})^{-1}(z)$ es un discreto cerrado en un compacto; es decir, un conjunto **finito**. Como la expresión de $f_*(\varphi)(z)$ es una suma soportada en $(f|_{\cup_{i=1}^n U_i})^{-1}(z)$, que es un conjunto finito, se sigue que la expresión está bien definida para cualquier $z \in Z_2$. Por otra parte, f_* es ℓ -lineal como asignación $C_c(Z_1, \ell) \rightarrow \ell^{Z_2}$ pues la estructura de ℓ -módulo es puntual. Luego, basta ver que se correstringe a $C_c(Z_2)$. Para este paso será necesaria la hipótesis de que los espacios son débilmente Booleanos. Por ℓ -linealidad, basta verlo para funciones características generadoras. Sea $U \subseteq Z_1$ un abierto compacto y Hausdorff. Como Z_1 es débilmente Booleano, para cada $w \in U$ podemos hallar un abierto compacto y Hausdorff $U_w \subseteq U$ tal que $f|_{U_w}$ sea un homeomorfismo con su imagen. Por compacidad, existen $U_1, \dots, U_n \subseteq U$ tales que $U = \cup_{i=1}^n U_i$ y $f|_{U_i}$ es un homeomorfismo con su imagen para cada $1 \leq i \leq n$. Como U es Hausdorff y los abiertos $(U_i)_{i=1}^n$ son compactos, podemos disjuntarlos considerando, para cada $\emptyset \neq I \subseteq \llbracket n \rrbracket$, el subconjunto

$$V_I := \bigcap_{i \in I} U_i \setminus \left(\bigcup_{j \notin I} U_j \right).$$

De esta forma, obtenemos abiertos compactos Hausdorff disjuntos en los que f se restringe a un homeomorfismo con su imagen y

$$U = \bigsqcup_{\emptyset \neq I \subseteq \llbracket n \rrbracket} V_I.$$

En particular, se tiene que χ_U es la suma de cada χ_{V_I} y, como $f|_{V_I}$ es inyectiva, que $f_*(\chi_{V_I}) = \chi_{f(V_I)}$ para cada $\emptyset \neq I \subseteq \llbracket n \rrbracket$. Como cada $f(V_I)$ es abierto compacto y Hausdorff, finalmente por ℓ -linealidad tenemos que

$$f_*(\chi_U) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \llbracket n \rrbracket} f_*(\chi_{V_I}) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \llbracket n \rrbracket} \chi_{f(V_I)} \in C_c(Z_2, \ell).$$

Esto demuestra, por ℓ -linealidad, que $f_*(\varphi) \in C_c(Z_2)$ para cualquier $\varphi \in C_c(Z_1, \ell)$ y por ende que la asignación está bien definida. La funtorialidad se sigue de una sencilla verificación. ■

Por construcción, para cada espacio topológico Z se tiene que $C_c(Z, \ell)$ recibe un epimorfismo del ℓ -módulo libre generado por el conjunto β_c^Z de abiertos, compactos y Hausdorff:

$$\begin{aligned} \pi_Z: \ell^{(\beta_c^Z)} &\twoheadrightarrow C_c(Z, \ell) \\ U &\mapsto \chi_U. \end{aligned}$$

El siguiente lema debido a Xin Li describe el núcleo de este morfismo para el caso donde Z es débilmente Booleano:

Lema 1.5.16 ([Li25, Lemma 2.2]). Sea Z un espacio débilmente Booleano, entonces $\ker(\pi_Z)$ es el ℓ -submódulo generado por los elementos de la forma $\chi_{U \sqcup V} - \chi_U - \chi_V$, para cada $U, V \subseteq Z$ abiertos compactos y Hausdorff disjuntos. ■

Finalmente, estudiemos el caso de los $\mathcal{G}$ -espacios étales sobre un grupoide amplio $\mathcal{G}$. En tal contexto, un $\mathcal{G}$ -espacio étale es inmediatamente débilmente Booleano, pues $\mathcal{G}^{(0)}$ lo es, y podemos considerar su ℓ -módulo de funciones compactamente soportadas. El siguiente teorema dice que la acción de $\mathcal{G}$ se promueve a una acción del álgebra de Steinberg sobre el ℓ -módulo.

Teorema 1.5.17. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio, tenemos un funtor

$$\mathbf{Ét}(\mathcal{G}) \xrightarrow{C_c(-, \ell)} \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})\text{-mod},$$

que a cada $\mathcal{G}$ -espacio étale (a izquierda) $Z \xrightarrow{\rho} \mathcal{G}^{(0)}$ le asigna el ℓ -módulo $C_c(Z, \ell)$ cuya acción viene dada, para cada $\alpha \in \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ y $\varphi \in C_c(Z, \ell)$ por la fórmula

$$(\alpha \cdot \varphi)(z) := \sum_{\mathbf{d}(g)=\rho(z)} \alpha(g)\varphi(g^{-1}z).$$

Demostración. Como $\mathcal{G}^{(0)}$ es débilmente Booleano, para cada $\mathcal{G}$ -espacio étale $Z \xrightarrow{\rho} \mathcal{G}^{(0)}$ se tiene que el espacio Z también lo es. Luego, por la Proposición 1.5.15 resulta que $C_c(Z, \ell)$ es un ℓ -módulo bien definido. La acción del álgebra de Steinberg en el enunciado está bien definida pues, como $\mathbf{d}$ es un homeomorfismo local y $\mathcal{G}^{(0)}$ es Hausdorff, para cada $z \in Z$ la fibra $\mathbf{d}^{-1}(\rho(z))$ es discreta y cerrada. Esto implica que su intersección con el soporte de cada $\varphi \in C_c(Z, \ell)$ es cerrada y discreta en un compacto y por lo tanto finita. Evaluando en características de abiertos compactos Hausdorff es fácil verificar, de manera análoga al caso de la Proposición 1.5.15, que la fórmula del enunciado define una estructura $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulos. Finalmente, cada morfismo entre $\mathcal{G}$ -espacios étales es, por la propiedad 2 de 3, un homeomorfismo local. Por lo tanto, podemos utilizar la fórmula de la Proposición 1.5.15 para obtener un morfismo ℓ -lineal al

aplicar $C_c(-, \ell)$. Utilizando que un morfismo de $\mathcal{G}$ -espacios preserva la acción del grupoide, se ve fácilmente que el morfismo ℓ -lineal preserva con la acción de las funciones características de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ y por ende resulta un morfismo de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulos. ■

De manera análoga, se obtiene un funtor para el caso de $\mathcal{G}$ -espacios a derecha y $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulos a derecha. En el caso donde un espacio topológico Z sea un $\mathcal{G}$ -espacio étale a izquierda y un $\mathcal{H}$ -espacio étale a derecha, cuyas acciones son compatibles, entonces es fácil verificar que aplicando el funtor anterior se obtendrá un $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ - $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{H})$ -bimódulo.

1.5.2. Homología de grupoides

La idea de este apartado es construir una teoría de homología para grupoides amplios que recupere la homología de grupos. Esta teoría de homología fue estudiada por Xin Li en [Li25] o Alistair Miller en [Mil24]. Nuestra idea es dar una presentación ligeramente distinta de los mismos grupos de homología, mediante el lenguaje de conjuntos simpliciales, que simplifica y ordena los cálculos pertinentes.

Observación 1.5.18. El funtor $\mathbf{WeakBool}_{\text{ét}} \xrightarrow{C_c(-, \ell)} \ell\text{-mod}$ induce un funtor

$$\text{SemiS}(C_c(-, \ell)): \text{SemiS}(\mathbf{WeakBool}_{\text{ét}}) \rightarrow \text{SemiS}(\ell\text{-mod})$$

entre espacios débilmente Booleanos con morfismos etales y ℓ -módulos semi-simpliciales.

Recordar que si ℓ es un anillo conmutativo, entonces se tiene un funtor

$$\begin{aligned} \text{SemiS}(\ell\text{-mod}) &\rightarrow \text{Ch}(\ell) \\ (C_*, d^*) &\mapsto (C_*, \sum_{i=0}^* (-1)^i d_i^*). \end{aligned}$$

Esto define una teoría de homología para cualquier ℓ -módulo semi-simplicial. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, funtores

$$\text{SemiS}(\mathbf{WeakBool}_{\text{ét}}) \rightarrow \text{SemiS}(\ell\text{-mod}) \rightarrow \text{Ch}(\ell) \xrightarrow{H_n} \ell\text{-mod}.$$

Para asociar grupos de homología a un grupoide amplio $\mathcal{G}$, basta entonces producir un espacio débilmente Booleano semi-simplicial cuyas caras son homeomorfismos locales. Como $\mathcal{G}$ es una categoría pequeña, podemos considerar su nervio, el conjunto simplicial $\mathcal{N}(\mathcal{G})$. Olvidando la estructura de las degeneraciones, esto produce un conjunto semi-simplicial, que con la topología pullback resulta un espacio débilmente Booleano semi-simplicial. Resta verificar que las caras son homeomorfismos locales:

Proposición 1.5.19. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio, entonces $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ hereda una estructura de espacio Booleano semi-simplicial cuyas caras son homeomorfismos locales.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos $\mathcal{N}(\mathcal{G})_n = \mathcal{G}_d \times_r \mathcal{G}_d \times_r \cdots \times_r \mathcal{G}_d \times_r \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G} \times \cdots \times \mathcal{G}$ con la topología subespacio. Como $\mathcal{G}$ tiene una base de abiertos compactos Hausdorff por ser amplio, entonces los abiertos básicos del pullback resultan también compactos y Hausdorff, de modo

que $\mathcal{N}(\mathcal{G})_n$ es débilmente Booleano. Para cada $0 \leq i \leq n$ las caras del conjunto simplicial subyacente coinciden con:

$$d_i(g_1, \dots, g_n) = \begin{cases} (g_2, \dots, g_n) & \text{si } i = 0 \\ (g_1, \dots, g_{n-1}) & \text{si } i = n \\ (g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) & \text{si no} \end{cases}$$

que son homeomorfismos locales pues son proyecciones o la multiplicación de un par de coordenadas. ■

La proposición anterior muestra que $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ es un objeto de $\text{SemiS}(\mathbf{WeakBool}_{\text{ét}})$ y por lo tanto estamos listos para definir la homología de grupoides:

Definición 1.5.20. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio, la **homología** de $\mathcal{G}$ con coeficientes en un anillo conmutativo ℓ es la homología del ℓ -módulo simplicial $C_c(\mathcal{N}(\mathcal{G})_*, \ell)$. Es decir, para cada $n \in \mathbb{N}_0$

$$H_n(\mathcal{G}, \ell) := H_n(C_c(\mathcal{N}(\mathcal{G})_*, \ell)).$$

Ejemplo 1.5.21. Si G es un grupo discreto, entonces $\mathcal{B}G$ es un grupoide amplio y su nervio es un espacio semi-simplicial discreto. El funtor $C_c(-, \ell)$ aplicado a este conjunto semi-simplicial discreto da lugar a lugar el ℓ -módulo libre $\ell[\mathcal{N}(\mathcal{B}G)_*]$. La homología de este complejo de cadenas de ℓ -módulos es exactamente la homología de grupos $H(G, \ell)$. Es decir, la homología de grupoides recupera la homología de grupos.

Capítulo 2

Haces sobre grupoides étales

Uno de los invariantes asociados a —o quizás mejor, *por sobre*— los grupoides étales es el de los haces. Los haces conforman una herramienta global para estudiar objetos que varían localmente. En efecto, no debería sorprender que esta herramienta surja naturalmente en el estudio de los grupoides con propiedades locales deseables. La primera idea de este capítulo es la de dotar de contexto general al lector: recordar la noción general de haces de conjuntos sobre un sitio y dar ejemplos. Luego, especializaremos la definición de un sitio asociado a un grupoide étale $\mathcal{G}$ y estudiaremos los haces de módulos sobre $\mathcal{G}$. Finalmente, emplearemos la tecnología de los haces para estudiar la K -teoría del álgebra de Steinberg de una familia de grupoides amplios.

2.1. Sobre sitios, los haces

Dado un espacio topológico X cuya categoría poset de abiertos es $\mathcal{O}(X)$, llamamos **prehaz** a un funtor $F: \mathcal{O}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. Para cada inclusión $i: V \rightarrow U$ y cada $s \in F(U)$, denotamos $s|_V = F(i)(s) \in F(V)$. Decimos que F es un **haz sobre X** si satisface el siguiente axioma:

Para cualquier cubrimiento $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ y cualquier colección $s_i \in F(U_i)$, $i \in I$ tal que

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j},$$

para todo $i, j \in I$, existe un único $s \in F(U)$ tal que $s_i = s|_{U_i}$ para todo $i \in I$.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2.1.1 (Haz de funciones continuas). Sean X e Y espacios topológicos y consideremos el prehaz sobre X dado para cada abierto $U \subseteq X$ por el conjunto

$$C(U, Y) = \{f: U \rightarrow Y \mid f \text{ es continua}\},$$

con la restricción como imagen de las inclusiones. En particular, el hecho de que $C(-, Y)$ resulte un haz sobre X es exactamente la afirmación del *lema del pegado* para funciones continuas.

Ejemplo 2.1.2 (Haz de secciones de una función continua). Consideremos X un espacio topológico y $p: E \rightarrow X$ un espacio *sobre* X . Entonces se tiene un prehaz de secciones locales sobre

X dado para cada abierto $U \subseteq X$ por el conjunto

$$\Gamma(U, E) = \{s: U \rightarrow E \mid p \circ s = \text{id}_U\},$$

con la restricción como imagen de las inclusiones.

Los haces sobre un espacio topológico X junto a las transformaciones naturales forman una subcategoría plena de $\mathbf{Set}^{\mathcal{O}(X)^{\text{op}}}$ que denotamos $\mathbf{Sh}(X)$. El Ejemplo 2.1.2 define un funtor $\mathbf{Top}/X \rightarrow \mathbf{Sh}(X)$ que se restringe a la subcategoría plena $\mathbf{Etal}/X$ de espacios étales sobre X ; i.e., espacios sobre X junto a un homeomorfismo local $p: E \rightarrow X$. El siguiente teorema dice que ese funtor es precisamente una equivalencia de categorías:

Teorema 2.1.3 ([MM12, Corollary 3 Section II.6]). Si X es un espacio topológico, entonces hay una equivalencia de categorías:

$$\begin{aligned} \Gamma: \mathbf{Etal}/X &\rightarrow \mathbf{Sh}(X) \\ (E, p) &\mapsto \Gamma(-, E) \end{aligned}$$

■

El teorema anterior motiva la siguiente definición de haces sobre grupoides étales:

Definición 2.1.4 (Haz sobre un grupoide étale). Si $\mathcal{G}$ es un grupoide étale, un *haz sobre $\mathcal{G}$* (a derecha) es un $\mathcal{G}$ -espacio étal (E, p) a derecha. Es decir, un $\mathcal{G}$ -espacio E tal que su ancla $p: E \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ es un homeomorfismo local. Para cada $x \in \mathcal{G}^{(0)}$, un morfismo de haces es un morfismo de $\mathcal{G}$ -espacios. Denotamos $\mathbf{Sh}(\mathcal{G})$ a la categoría de haces sobre $\mathcal{G}$.

Distintas nociones de haces abundan en la geometría algebraica, en la geometría diferencial, en la teoría de Galois o en la topología. Una generalización conjunta de cada una de las nociones de haces en estos contextos fue propuesta por Grothendieck (alrededor de 1961, en [GR02]) al estudiar la relación entre el teorema de Galois y la clasificación de revestimientos sobre un espacio topológico. Una *topología de Grothendieck* sobre una categoría $\mathcal{C}$ es una colección $\text{Cov}(\mathcal{C})$ de familias de morfismos $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$ que satisfacen tres axiomas:

1. Si $V \rightarrow U$ es un isomorfismo, entonces $\{V \rightarrow U\} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$.
2. Si $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$ y para cada $i \in I$ tenemos que $\{V_{ij} \rightarrow U_i\}_{j \in J_i} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$, entonces $\{V_{ij} \rightarrow U\}_{i \in I, j \in J_i} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$.
3. Si $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$ y $V \rightarrow U$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces para todo $i \in I$ existe el pullback $U_i \times_U V$ y además $\{U_i \times_U V \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$.

Una categoría dotada de una topología de Grothendieck se conoce como *sitio*. Finalmente, se puede definir una noción de haces sobre un sitio para prehaces $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ que extiende a la anterior. Para cada $\{V \xrightarrow{i} U\} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$ y cada $s \in F(U)$, notamos $s|_V = F(i)(s)$ y decimos que F es un *haz sobre $\mathcal{C}$* si satisface el siguiente axioma:

Para cualquier familia $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ y cualquier colección $s_i \in F(U_i)$, $i \in I$ tal que

$$s_i|_{U_i \times_U U_j} = s_j|_{U_i \times_U U_j},$$

para todo $i, j \in I$, existe un único $s \in F(U)$ tal que $s_i = s|_{U_i}$ para todo $i \in I$.

Notar que esto recupera la definición de haces sobre un espacio topológico en el caso donde $\mathcal{C} = \mathcal{O}(X)$ es dotado de la topología de Grothendieck donde $\{U_i \rightarrow V\}_{i \in I} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$ si y solo si $\bigcup_{i \in I} U_i = U$. Por otra parte, tenemos la siguiente construcción:

Construcción 2.1.5 ([Gla25]). Considerando $\mathcal{G}$ un grupoide étale, definimos la categoría $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ cuyos objetos son los abiertos de $\mathcal{G}^{(0)}$ y un morfismo $U \xrightarrow{\sigma} V$ entre abiertos es una bisección $\sigma \subseteq \mathcal{G}$ de manera tal que $\mathbf{d}(\sigma) = U$ y $\mathbf{r}(\sigma) \subseteq V$. La composición en esta categoría es la multiplicación usual de bisecciones. Notar que para cada par de abiertos $V \subseteq U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$, la bisección trivial U es un morfismo $U \rightarrow V$ en $\mathcal{O}(\mathcal{G})$. De esta forma, la categoría poset de la topología $\mathcal{O}(\mathcal{G}^{(0)})$ es una subcategoría (no necesariamente plena) de $\mathcal{O}(\mathcal{G})$. Definimos una topología de Grothendieck sobre esta última donde $\text{Cov}(\mathcal{O}(\mathcal{G})) = \text{Cov}(\mathcal{O}(\mathcal{G}^{(0)}))$, la dada por los cubrimientos de abiertos de la subcategoría poset. Como la inclusión de $\mathcal{O}(\mathcal{G}^{(0)})$ en $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ preserva pullbacks (es decir, intersecciones) esta colección define una topología de Grothendieck en $\mathcal{O}(\mathcal{G})$. Más aún, los haces sobre esta categoría son exactamente aquellos funtores $F: \mathcal{O}(\mathcal{G})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ para los cuales su restricción a $\mathcal{O}(\mathcal{G}^{(0)})$ es un haz en el sentido de espacios topológicos. A la categoría cuyos objetos son estos haces y los morfismos transformaciones naturales la denotamos $\mathbf{Sh}(\mathcal{O}(\mathcal{G}))$. Recomendamos consultar la Tesis de Licenciatura [Gla25] de Janou Glaeser para una exposición detallada de las propiedades de este sitio.

Veamos un ejemplo de un haz sobre un grupoide étale:

Ejemplo 2.1.6. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide étale y $p: E \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ es un haz sobre $\mathcal{G}$, se tiene un prehaz $\Gamma(-, E): \mathcal{O}(\mathcal{G})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ que en cada abierto $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ es el conjunto $\Gamma(U, E)$ de secciones locales de p y en cada morfismo $V \xrightarrow{\sigma} U$ y cada $s \in \Gamma(U, E)$ toma como valor la composición:

$$\Gamma(\sigma, E)(s): V \xrightarrow{\mathbf{d}^{-1}} \sigma \xrightarrow{\mathbf{r}} \mathbf{r}(\sigma) \xrightarrow{s|_{\mathbf{r}(\sigma)}} p^{-1}(\mathbf{r}(\sigma)) \xrightarrow{T_\sigma} E,$$

donde $T_\sigma(e) := e \cdot \mathbf{r}^{-1}(p(e))$ para cada $e \in p^{-1}(\mathbf{r}(\sigma))$. Como p es homeomorfismo local y $p \circ T_\sigma = \mathbf{d} \circ \mathbf{r}^{-1} \circ p$, se sigue que T_σ es continua. Además, se tiene que

$$p \circ \Gamma(\sigma, E)(s) = (p \circ T_\sigma) \circ s \circ \mathbf{r} \circ \mathbf{d}^{-1} = \mathbf{d} \circ \mathbf{r}^{-1} \circ (p \circ s) \circ \mathbf{r} \circ \mathbf{d}^{-1} = \text{id}_V,$$

de modo que $\Gamma(\sigma, E): \Gamma(U, E) \rightarrow \Gamma(V, E)$ es una función bien definida. Más aún, al restringirnos a la subcategoría $\mathcal{O}(\mathcal{G}^{(0)})$, se obtiene exactamente el haz del Ejemplo 2.1.2. De este modo, se tiene que $\Gamma(-, E)$ define un haz sobre $\mathcal{O}(\mathcal{G})$.

El ejemplo anterior define un funtor que a cada haz sobre $\mathcal{G}$ le asigna un haz sobre $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ para la topología de Grothendieck dada anteriormente. El siguiente teorema dice que esta asignación es de hecho una equivalencia:

Teorema 2.1.7 ([KM91, Theorem 4.2]). Si $\mathcal{G}$ es un grupoide étale, entonces se tiene una equivalencia de categorías

$$\begin{aligned} \Gamma: \mathbf{Sh}(\mathcal{G}) &\rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{O}(\mathcal{G})) \\ (E, p) &\mapsto \Gamma(-, E). \end{aligned}$$

■

Notar que si X es un espacio topológico y $\mathcal{G}^{(1)} = \mathcal{G}^{(0)} = X$ es el grupoide que solo tiene identidades, entonces un $\mathcal{G}$ -espacio $p: E \rightarrow \mathcal{G}^{(0)} = X$ viene dado por una acción $E \cong E \times_{\mathcal{G}^{(0)}} \mathcal{G}^{(1)} \rightarrow E$ que, vía ese homeomorfismo, hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\cong} & E \times_{\mathcal{G}^{(0)}} X & \xrightarrow{\bullet} & E \\ & \searrow p & \downarrow \pi_2 & & \downarrow p \\ & & X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \end{array}$$

Por lo tanto, E debe tener la acción trivial de $\mathcal{G}$ y un $\mathcal{G}$ -espacio resulta simplemente un espacio $p: E \rightarrow X$ sobre X . Más aún, la categoría $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ es exactamente $\mathcal{O}(X)$ y por lo tanto el teorema anterior recupera la equivalencia del Teorema 2.1.3.

2.2. Haces de módulos sobre un grupoide amplio

Fijemos ℓ un anillo conmutativo con unidad y $\mathcal{G}$ un grupoide amplio. La idea de esta sección es incluir los resultados de Steinberg en [Ste14], donde muestra una equivalencia entre la categoría de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulos unitarios y la categoría de haces sobre $\mathcal{G}$ con valores en ℓ -módulos. Para eso, comencemos por definir esta noción. Para cada conjunto A , podemos considerar el **haz constante** $\Delta(A) \in \mathbf{Sh}(\mathcal{G})$, dado por el $\mathcal{G}$ -espacio etal

$$A \times \mathcal{G}^{(0)} \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{G}^{(0)},$$

donde A es dotado de la topología discreta y cuya acción para cada $a \in A$ y $g \in \mathcal{G}^{(1)}$ viene dada por $(a, \mathbf{r}(g)) \cdot g = (a, \mathbf{d}(g))$. En el sentido de la topología de Grothendieck sobre $\mathcal{O}(\mathcal{G})$, este coincide con el haz de funciones localmente constantes con valores en A . Esta definición determina un funtor $\Delta: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{G})$. El funtor Δ envía el singleton al haz trivial $\mathcal{G}^0 \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{G}^{(0)}$, que es el objeto final de la categoría $\mathbf{Sh}(\mathcal{G})$. Más aún, se puede ver que este funtor preserva productos y por ende preserva objetos anillos.¹ En particular, los anillos usuales son objetos anillos de la categoría de conjuntos y por ende diremos que un **haz de ℓ -módulos sobre $\mathcal{G}$** es un objeto $\Delta(\ell)$ -módulo en la categoría $\mathbf{Sh}(\mathcal{G})$. Desenredando las definiciones, se obtiene la siguiente descripción explícita:

Definición 2.2.1. Un haz (E, p) sobre $\mathcal{G}$ es un **haz de ℓ -módulos** si viene equipado con una estructura de ℓ -módulo en cada fibra $E_x = p^{-1}(x)$ de manera tal que:

1. La sección nula $0: \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow E$ que envía cada $x \in \mathcal{G}^{(0)}$ a 0_{E_x} es continua.
2. La suma $E \times_{\mathcal{G}^{(0)}} E \rightarrow E$ es continua.
3. La multiplicación por escalares $\ell \times E \rightarrow E$ es continua; donde ℓ tiene la topología discreta.
4. Para cada $g \in \mathcal{G}^{(1)}$, la multiplicación $R_g: E_{\mathbf{r}(g)} \rightarrow E_{\mathbf{d}(g)}$ es ℓ -lineal.

Un morfismo entre haces de ℓ -módulos es un morfismo de haces que es una transformación lineal en cada fibra. Denotamos $\mathbf{Sh}_\ell(\mathcal{G})$ a la categoría de haces de ℓ -módulos sobre $\mathcal{G}$.

¹Recordar que un objeto anillo de una categoría con productos y objeto final C es un objeto R junto a morfismos $s, m: R \times R \rightarrow R$, $u: 1 \rightarrow R$, $n: 1 \rightarrow R$ y $i: R \rightarrow R$ que verifiquen conmutatividad de ciertos diagramas.

2.2.1. La equivalencia de Steinberg

Como hemos visto, no es cierto en general que $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ sea un anillo unitario. Sin embargo sí es cierto que $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ tiene *unidades locales*.

Proposición 2.2.2 ([Ste14, Proposition 2.1]). Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio y ℓ un anillo conmutativo, entonces $\{\chi_U : U \subseteq \mathcal{G}^{(0)} \text{ abierto y compacto}\}$ es un sistema de unidades locales de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ tiene unidades locales. Es decir, para todos $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ existe un abierto compacto $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ tal que $f_i * \chi_U = \chi_U * f_i = f_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. ■

Recordemos que un módulo M sobre un anillo R es *unitario* si satisface que $M \cdot R = M$. Para anillos con unidades locales, un módulo M es unitario si y solo si para todo $m \in M$ existe un idempotente $e \in R$ tal que $m \cdot e = m$. Más aún, si R es una ℓ -álgebra y tiene unidades locales entonces todo R -módulo unitario M tiene una estructura natural de ℓ -módulo dada, para cada $m \in M$ y $a \in \ell$, por $m \cdot a = m \cdot (ea)$, con $e \in R$ cualquier idempotente para el cual $m \cdot e = m$. Denotamos $\text{Mod-}\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ a la categoría de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulos unitarios. Procedemos a definir un funtor

$$\Gamma_c : \mathbf{Sh}_\ell(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Mod-}\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}).$$

En objetos, asigna a cada haz de ℓ -módulos (E, p) $\Gamma_c(E, p)$ el conjunto de secciones $s : \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow E$ de p con soporte compacto. La estructura de grupo abeliano viene dada por la suma punto a punto en la fibra y la multiplicación por escalares por la regla:

$$(s \cdot f)(x) = \sum_{\mathbf{d}(g)=x} f(g) \cdot s(\mathbf{r}(g)) \cdot g, \quad (2.2.3)$$

para cada $s \in \Gamma_c(E, p)$ y $f \in \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$. Esta suma está definida pues $\mathbf{d}^{-1}(x) \cap \text{supp}(f)$ es un discreto en un compacto y por ende finito. Para ver que este módulo es de hecho unitario, requeriremos de la siguiente observación fundamental:

Proposición 2.2.4. Si $\sigma \subseteq \mathcal{G}$ es una bisección compacta y $s \in \Gamma_c(E, p)$, entonces

$$(s \cdot \chi_\sigma)(x) := \begin{cases} s(\mathbf{r}(g))g & \text{si } g \in \sigma, \mathbf{d}(g) = x \\ 0 & \text{si } x \notin \sigma^{-1}\sigma. \end{cases}$$

En particular, si $\sigma \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ es compacto y abierto entonces $(s \cdot \chi_\sigma)(x) = \chi_\sigma(x)s(x)$, para todo $x \in \mathcal{G}^{(0)}$.

Demostración. Se sigue directamente de reemplazar en la fórmula 2.2.3. ■

El módulo $\Gamma_c(E, p)$ es unitario pues si $s : \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow E$ tiene soporte compacto, entonces existe $\sigma \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ abierto compacto que contiene al soporte y por la Proposición 2.2.4 se verifica que $s \cdot \chi_\sigma = s$, donde χ_σ es un idempotente de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$. Finalmente, el funtor Γ_c queda definido en un morfismo $\varphi : (E, p) \rightarrow (F, q)$ para cada $s \in \Gamma(E, p)$ como $\Gamma_c(\varphi)(s) := \varphi \circ s$. Es directo verificar la asignación es funtorial y se tiene el siguiente resultado

Teorema 2.2.5 ([Ste14, Theorem 3.4]). Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio y ℓ un anillo conmutativo, entonces se tiene una equivalencia de categorías:

$$\Gamma_c : \mathbf{Sh}_\ell(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Mod-}\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}).$$

■

Corolario 2.2.6. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio y ℓ es un anillo conmutativo, entonces $\mathbf{Sh}_\ell(\mathcal{G})$ es una categoría abeliana.

2.3. Acciones propias, libres y básicas

Si $\mathcal{G}$ es cualquier grupoide étale y $\rho : E \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ es un $\mathcal{G}$ -espacio a derecha (resp. a izquierda), podemos considerar el siguiente mapa estructural asociado a la acción del grupoide:

$$\begin{aligned} \Gamma : E_\rho \times_{\mathbf{r}} \mathcal{G} &\rightarrow E \times E \\ (e, g) &\mapsto (e \cdot g, e) \end{aligned}$$

Considerando, por ejemplo, a las unidades $\mathcal{G}^{(0)}$ como un $\mathcal{G}$ -espacio a derecha con la conjugación, el mapa anterior se convierte salvo homeomorfismo en la asignación

$$(\mathbf{d}, \mathbf{r}) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)},$$

estudiada previamente durante la caracterización local de grupoides étales. La idea para esta sección es explorar, bajo ciertas condiciones, las propiedades que surgen de requerir condiciones sobre el mapa estructural anterior.

Definición 2.3.1. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide étale y $\rho : E \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ un $\mathcal{G}$ -espacio. La acción de $\mathcal{G}$ se dice:

1. **libre** si Γ es inyectiva,
2. **propia** si Γ es propia,
3. **básica** si Γ es un homeomorfismo con su imagen.

Observación 2.3.2. Un grupoide es propio si y solo si la acción de conjugación es propia.

Por analogía, diremos que un grupoide es **libre** si la acción por conjugación en sus unidades es libre y **básico** si dicha acción es básico.

Ejemplo 2.3.3 (Grupoides de transformación). Si G es un grupo discreto actuando sobre un espacio localmente compacto y Hausdorff X , el grupoide de transformación $G \ltimes X$ es propio si y solo si la acción de G es propia, y es libre si y solo si la acción de G es libre. En este caso el mapa estructural $G \times X \rightarrow X \times X$ es propia, inyectiva entre espacios localmente compactos y Hausdorff, de modo que es un homeomorfismo con su imagen y por ende $G \ltimes X$ es básico.

Veamos a continuación que la conclusión del ejemplo anterior se puede extender para $\mathcal{G}$ -espacios en general.

Definición 2.3.4. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide étale y $\rho : E \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ un $\mathcal{G}$ -espacio. El **espacio de órbitas** es el espacio topológico cociente

$$E/\mathcal{G} := E/\sim,$$

donde $e \sim f$ si y solo si existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $\rho(e) = \mathbf{r}(g)$ y $e \cdot g = f$.

Observación 2.3.5. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide étale y $\rho : E \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ un $\mathcal{G}$ -espacio básico, entonces la proyección al cociente $E \rightarrow E/\mathcal{G}$ es un homeomorfismo local sobreyectivo. En efecto, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} E_\rho \times_{\mathbf{r}} \mathcal{G} & \xrightarrow{\Gamma} & \text{im}(\Gamma) & \xrightarrow{\text{pr}_2} & E \\ & \searrow \text{mult} & \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \\ & & E & \twoheadrightarrow & E/\mathcal{G} \end{array}$$

Como la multiplicación en cualquier $\mathcal{G}$ -espacio es un homeomorfismo local y Γ es un homeomorfismo con su imagen, se sigue que $\text{pr}_1 : \text{im}(\Gamma) \rightarrow E$ es un homeomorfismo local. Finalmente, apelamos al siguiente hecho de topología general: si se tiene un diagrama pullback

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\text{pr}_2} & X \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

en el cual pr_1 es un homeomorfismo local y f es final, entonces f es un homeomorfismo local.

Recordemos que si X es un espacio topológico y $R \subseteq X \times X$ es una relación de equivalencia tal que la proyección $X \rightarrow X/R$ es abierta, entonces $R \subseteq X \times X$ es cerrada si y solo si X/R es Hausdorff. En consecuencia, obtenemos:

Lema 2.3.6. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide étale y $\rho : E \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ un $\mathcal{G}$ -espacio básico, entonces $E/\mathcal{G}$ es Hausdorff si y solo si $\text{im}(\Gamma) \subseteq E \times E$ es cerrado.

Demostración. Por la observación anterior, se tiene que $E \rightarrow E/\mathcal{G}$ es un homeomorfismo local y por ende abierta. Luego, basta observar que $\text{im}(\Gamma) \subseteq E \times E$ es exactamente la relación de equivalencia en el espacio de órbitas de la acción de $\mathcal{G}$ en E . ■

Se obtiene la caracterización:

Teorema 2.3.7. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide étale y $\rho : E \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ un $\mathcal{G}$ -espacio. Son equivalentes:

1. La acción es básica y $E/\mathcal{G}$ es Hausdorff.
2. La acción es libre y propia.

Demostración. Para la primera implicación, notemos que si la acción es básica entonces claramente es libre. Por otra parte, si $E/\mathcal{G}$ es Hausdorff, entonces por el Lema 2.3.6 $\text{im}(\Gamma) \subseteq E \times E$ es cerrado. En particular, la inclusión $\text{im}(\Gamma) \hookrightarrow E \times E$ es propia y la siguiente composición también lo es:

$$E_\rho \times_{\mathbf{r}} \mathcal{G} \xrightarrow[\cong]{\Gamma} \text{im}(\Gamma) \hookrightarrow E \times E.$$

En consecuencia, la acción es propia. Recíprocamente, si Γ es propia se sigue que es cerrada y por tanto $\text{im}(\Gamma) \subseteq E \times E$ es cerrada. Como la acción es libre, la correstricción $\Gamma|_{\text{im}(\Gamma)}$ es biyectiva y cerrada y por tanto un homeomorfismo. Es decir, la acción es básica. Finalmente, otra vez por el Lema 2.3.6 se sigue que $E/\mathcal{G}$ es Hausdorff. ■

Con esta terminología, podemos introducir una noción de equivalencia entre grupoides, estudiada por ejemplo en [CS15]:

Definición 2.3.8. Dos grupoides topológicos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ se dicen *equivalentes Morita* si existe un espacio topológico E que satisfice:

1. E es un $\mathcal{G}$ -espacio a izquierda con acción básica,
2. E es un $\mathcal{H}$ -espacio a derecha con acción básica,
3. las acciones de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ en E conmutan entre sí y las anclas inducen homeomorfismos en los cocientes $E/\mathcal{H} \cong \mathcal{G}^{(0)}$ y $E/\mathcal{G} \cong \mathcal{H}^{(0)}$.

Observación 2.3.9. Si bien en la literatura (e.g. [CS15]) la definición suele encontrarse utilizando acciones libres y propias, la presentamos aquí con la noción de acciones básicas para ilustrar la utilidad de este concepto. No obstante, en vista del Teorema 2.3.7 ambas definiciones coinciden.

La definición de haces de ℓ -módulos preserva equivalencias de grupoides en el siguiente sentido:

Lema 2.3.10. Dos grupoides amplios equivalentes Morita tienen categorías de haces de ℓ -módulos equivalentes.

Demostración. Moerdijk demuestra en [CM00] que dos grupoides equivalentes Morita tienen categorías de haces equivalentes. En particular, esta equivalencia conmuta con $\Delta: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{G})$ y por lo tanto preserva objetos $\Delta(\ell)$ -módulos. Esto implica que la equivalencia se restringe a una equivalencia entre las categorías de haces de ℓ -módulos. ■

La equivalencia de Steinberg 2.2.5 junto al lema anterior implican el siguiente resultado:

Teorema 2.3.11. Si $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son dos grupoides amplios equivalentes Morita, entonces $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ y $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{H})$ son anillos equivalentes Morita. ■

Veremos a continuación un resultado que dice que la ℓ -álgebra de Steinberg de un grupoide amplio propio y libre es equivalente Morita al algebra de funciones continuas compactamente soportadas con valores en ℓ . De hecho, veremos que un tal grupoide es equivalente Morita a un grupoide amplio que solo tiene identidades.

Lema 2.3.12. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide étale y consideremos su acción por conjugación (a derecha) en sus unidades. Entonces $\pi: \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ es abierta. En particular, si $\mathcal{G}$ es propio entonces $\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ es localmente compacto, Hausdorff y totalmente desconexo.

Demostración. Si $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ es abierto, entonces

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \mathbf{d}(\mathbf{r}^{-1}(U))$$

es abierto. Luego $\pi: \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ es abierta y sobreyectiva y por lo tanto el cociente es localmente compacto. A su vez, si $\mathcal{G}$ es propio entonces la relación $\text{im}(\Gamma) \subseteq \mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)}$ es cerrada y, como la proyección es abierta, entonces $\mathcal{G}/\mathcal{G}^{(0)}$ es Hausdorff. ■

En el Capítulo 4 estudiaremos una familia de espacios de órbitas en concreto correspondientes a cocientes por subgrupoides abiertos. De hecho, para esa familia de cocientes obtendremos que la proyección es un homeomorfismo local, al igual que pasa para acciones básicas.

Observación 2.3.13. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio y propio, entonces $\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ es localmente compacto, Hausdorff y totalmente desconexo. En efecto, como $\mathcal{G}$ es propio el cociente es localmente compacto y Hausdorff. Por lo tanto, basta ver que $\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ tiene una base de abiertos compactos. Si $[x] \in \mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ y $[x] \in V \subseteq \mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$, entonces podemos tomar un abierto compacto $x \in U \subseteq \pi^{-1}(V)$. Como la proyección es abierta, obtenemos $\pi(U)$ es un abierto compacto tal que $[x] \in \pi(U) \subseteq V$, de modo que $\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ tiene una base de abiertos compactos.

Si bien el siguiente resultado es parte del folclore, no conocemos una referencia precisa y por ende decidimos incluirlo por completitud.

Teorema 2.3.14. Si $\mathcal{G}$ un grupoide étale libre y propio, entonces $\mathcal{G}$ es equivalente Morita al espacio de órbitas $\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ de la acción por conjugación. En particular, si $\mathcal{G}$ es amplio, entonces $\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ es totalmente desconexo, localmente compacto y Hausdorff y sus álgebras de Steinberg son equivalentes Morita.

Demostración. Por hipótesis, tenemos que $\mathcal{G}^{(0)}$ es un $\mathcal{G}$ -espacio a derecha libre y propio con la acción de conjugación; es decir, un $\mathcal{G}$ -espacio básico a derecha. Por otra parte, considerando al espacio topológico cociente $\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ como un grupoide étale que solo tiene identidades, podemos darle estructura de $\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ -espacio a izquierda al espacio $\mathcal{G}^{(0)}$ como sigue: su ancla es la proyección al cociente $\pi: \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ y la multiplicación es la acción trivial dada por el homeomorfismo

$$\text{pr}_2: \mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}_{\text{id}} \times_{\pi} \mathcal{G}^{(0)} \cong \mathcal{G}^{(0)}.$$

La acción es básica porque el mapa estructural Γ resulta, a menos de homeomorfismo, la diagonal

$$\Gamma: \mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}_{\text{id}} \times_{\pi} \mathcal{G}^{(0)} \cong \mathcal{G}^{(0)} \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{G}^{(0)}}} \mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)}.$$

que es un homeomorfismo con su imagen. Esto garantiza las primeras dos condiciones de la Definición 2.3.8. A su vez, las acciones conmutan pues, si $[x] \in \mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$, $y \in \mathcal{G}^{(0)}$ y $g \in \mathcal{G}$ son tales que $[x] = \pi(y)$, $y = \mathbf{r}(g)$; entonces

$$[x] \cdot (y \cdot g) = [x] \cdot \mathbf{d}(g) = \mathbf{d}(g) = y \cdot g = ([x] \cdot y) \cdot g.$$

Veamos que las anclas inducen homeomorfismos en los cocientes. En primer lugar, el ancla de $\mathcal{G}^{(0)}$ como $\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ -espacio a izquierda es exactamente la proyección al cociente $\pi: \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$, luego ésta induce la identidad en el cociente, que es un homeomorfismo. Finalmente, debemos estudiar el cociente $\mathcal{G}^{(0)}/(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G})$. Sin embargo, dos elementos $x, y \in \mathcal{G}^{(0)}$ se relacionan si y solamente si existe $[z] \in \mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ tal que $x \cdot [z] = y$. Es decir, si y solamente si $x = y$. Como la relación de equivalencia es la trivial, se sigue que la proyección al cociente es la identidad y por lo tanto la factorización en el cociente es $\text{id}_{\mathcal{G}^{(0)}}$; o sea, un homeomorfismo. Esto muestra todas las condiciones de la Definición 2.3.8 y concluye que $\mathcal{G}$ es equivalente Morita a $\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$. ■

Finalmente, presentamos un resultado sobre acciones básicas debido a Miller que nos será de utilidad para lo que sigue. Primero, cierta terminología:

Definición 2.3.15. Sean $\mathcal{G}$ un grupoide étale, $q: E \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ un $\mathcal{G}$ -espacio a derecha y $\rho: Z \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ un $\mathcal{G}$ -espacio a izquierda. Entonces el **producto balanceado** es el espacio topológico

$$E \times_{\mathcal{G}} Z := E_q \times_{\rho} Z / \sim,$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por $(e \cdot g, z) \sim (e, g \cdot z)$.

En el caso donde E o Z resultan $\mathcal{G}$ -espacios a izquierda o derecha respectivamente, es fácil verificar que el producto balanceado resulta también un $\mathcal{G}$ -espacio de la misma varianza. El siguiente lema dice que el producto balanceado se corresponde, al tomar funciones continuas con soporte compacto, con el producto tensorial sobre el álgebra de Steinberg:

Lema 2.3.16 (Proposition 2.9 [Mil24]). Sean $\mathcal{G}$ un grupoide amplio, $q: E \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ un haz sobre $\mathcal{G}$ cuya acción es básica y $\rho: Z \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ un $\mathcal{G}$ -espacio a izquierda totalmente desconexo, localmente compacto y Hausdorff. Entonces $E \times_{\mathcal{G}} Z$ es totalmente desconexo y localmente compacto y Hausdorff y hay un isomorfismo de ℓ -módulos

$$C_c(E, \ell) \otimes_{\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})} C_c(Z, \ell) \cong C_c(E \times_{\mathcal{G}} Z, \ell).$$

Más aún, si E o Z son $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ -espacios a izquierda y a derecha, respectivamente, con acciones compatibles a las de $\mathcal{G}$, entonces el isomorfismo resulta de $\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{H}_1)$ - $\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{H}_2)$ bimódulos, para cualquier par de grupoides amplios $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$.

Tanto en [CS15] como en [CM00], las demostraciones de que las álgebras de Steinberg de grupoides equivalentes son equivalente Morita no construyen explícitamente el bimódulo que implementa la equivalencia. Utilizaremos el lema anterior para dar una demostración original de la equivalencia Morita entre grupoides propios y libres y su espacio de órbitas que sí describa los bimódulos que implementan dicha equivalencia. Para eso, notar que por la demostración del Teorema 2.3.14, el espacio de unidades $\mathcal{G}^{(0)}$ de un grupoide libre y propio resulta un $\mathcal{G}$ -espacio tanto a izquierda como a derecha y un $\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ espacio tanto a derecha como a izquierda, cuyas acciones son compatibles. Esto dice que $C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell)$ es tanto un $\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})$ - $\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G})$ como un $\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G})$ - $\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})$ bimódulo, por el Teorema 1.5.17. Veremos que éste implementa la equivalencia.

Teorema 2.3.17. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide libre y propio y ℓ un anillo conmutativo discreto. Entonces hay una equivalencia de categorías:

$$\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G})\text{-mod} \xrightarrow[-\simeq]{-\otimes_{\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell)} \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})\text{-mod}.$$

Demostración. Considerando a $C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell)$ como $\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})$ - $\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G})$ y como un $\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G})$ - $\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})$ bimódulo, basta verificar que hay isomorfismos de bimódulos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}) &\cong C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell) \otimes_{\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell) \\ \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}) &\cong C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell) \otimes_{\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell), \end{aligned}$$

con la varianza adecuada en cada caso. Para demostrar los isomorfismos, utilizaremos el Lema 2.3.16. En primer lugar, notar que la acción de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{G}^{(0)}$ a derecha es, por el Teorema 2.3.7, básica. Más aún, por definición obtenemos que

$$\mathcal{G}^{(0)} \times_{\mathcal{G}} \mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G}^{(0)}_{\text{id}} \times_{\text{id}} \mathcal{G}^{(0)} / \sim = \mathcal{G}^{(0)} / \sim,$$

donde $\sim$ es exactamente la inducida por la acción de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{G}^{(0)}$. Por lo tanto, se tiene que $\mathcal{G}^{(0)} \times_{\mathcal{G}} \mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ y por el Lema 2.3.16 hay isomorfismos de bimódulos

$$\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}) \cong C_c(\mathcal{G}^{(0)} \times_{\mathcal{G}} \mathcal{G}^{(0)}, \ell) \cong C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell) \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell).$$

Nuevamente, por la demostración del Teorema 2.3.14, la acción de $\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ es básica y se tiene que

$$\mathcal{G}^{(0)} \times_{\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}} \mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G}^{(0)} \times_{\pi} \mathcal{G}^{(0)} / \sim,$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia trivial. Por lo tanto, se obtiene que

$$\mathcal{G}^{(0)} \times_{\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}} \mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G}^{(0)} \times_{\pi} \mathcal{G}^{(0)} = \text{im}(\Gamma),$$

donde $\Gamma: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)}$ es el mapa estructural de la acción de $\mathcal{G}$ en sus unidades. Como $\mathcal{G}$ es libre y propio, se tiene que Γ es un isomorfismo con su imagen que es compatible con la acción a izquierda y a derecha, de modo que obtenemos isomorfismos de bimódulos

$$C_c(\mathcal{G}^{(0)} \times_{\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}} \mathcal{G}^{(0)}, \ell) \cong C_c(\mathcal{G}, \ell).$$

Finalmente, por el Lema 2.3.16, se tiene el isomorfismo deseado:

$$\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}) = C_c(\mathcal{G}, \ell) \cong C_c(\mathcal{G}^{(0)} \times_{\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}} \mathcal{G}^{(0)}, \ell) \cong C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell) \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell).$$

■

2.4. Extensión y restricción de haces

En su Def. 2.17 [Mil24], Miller considera, para cada subgrupoide abierto $\mathcal{H}$ de un grupoide amplio $\mathcal{G}$, un par adjunto de extensión-restricción entre las categorías de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{H})$ y $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulos. Considerando la equivalencia del Teorema 2.2.5, este par de funtores da lugar a una adjunción entre las categorías $\mathbf{Sh}_\ell(\mathcal{H})$ y $\mathbf{Sh}_\ell(\mathcal{G})$. No es una tarea sencilla, en general, dar una fórmula para el funtor de extensión. En esta sección, damos una descripción explícita de este par adjunto en el caso de que $\mathcal{H} = \mathcal{G}_U^U = \mathbf{d}^{-1}(U) \cap \mathbf{r}^{-1}(U)$ para algún abierto compacto $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$. Para concluir, proponemos una estrategia para clasificar módulos proyectivos sobre el álgebra de Steinberg, utilizando la teoría desarrollada.

Observación 2.4.1. Sean $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ un subespacio abierto. Entonces la multiplicación de $\mathcal{G}$ dota de estructura de $\mathcal{G}$ -espacio étale a izquierda a $\mathcal{G}^U = \mathbf{d}^{-1}(U)$ y de $\mathcal{G}$ -espacio étale a derecha (es decir, $\mathcal{G}$ -haz) a $\mathcal{G}_U = \mathbf{r}^{-1}(U)$. Más aún, el Teorema 1.5.17 implica que $C_c(\mathcal{G}^U, \ell)$ tiene estructura de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulo a izquierda y $C_c(\mathcal{G}_U, \ell)$ de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulo a derecha. A su vez, es claro por el mismo motivo que ambos resultan $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)$ -bimódulos.

Definición 2.4.2 (Extensión-restricción). Sea $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y $\mathcal{H}$ un subgrupoide abierto de $\mathcal{G}$. La **restricción** $\text{Res}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}}: \text{Mod-}\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Mod-}\mathcal{A}_\ell(\mathcal{H})$ es el funtor dado, para cada $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulo M , por

$$\text{Res}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}}(M) = M \cdot \mathcal{A}_\ell(\mathcal{H}).$$

A su vez, la **extensión** $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}: \text{Mod-}\mathcal{A}_\ell(\mathcal{H}) \rightarrow \text{Mod-}\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ es el funtor dado, para cada $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{H})$ -módulo N , por

$$\text{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(N) = N \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{H})} C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{H}^{(0)}}, \ell)$$

Proposición 2.4.3 ([Mil24, Proposition 2.18]). Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio y $\mathcal{H}$ es un subgrupoide abierto, entonces se tiene una adjunción

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} \dashv \mathrm{Res}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}}.$$

Más aún, ambos funtores son exactos. ■

Veamos una descripción alternativa de la adjunción en el caso donde $\mathcal{H} = \mathcal{G}_U^U$, la restricción a un compacto abierto $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$:

Proposición 2.4.4. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ un subespacio compacto abierto. Entonces, se tiene un isomorfismo natural

$$- \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^U, \ell) \cong \mathrm{Res}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}_U^U}.$$

Demostración. Comencemos notando que el siguiente morfismo de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)$ -módulos a derecha es un isomorfismo:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}) \cdot \chi_U &\rightarrow C_c(\mathcal{G}^U, \ell) \\ f * \chi_U &\mapsto f \end{aligned}$$

La buena definición y el hecho de que sea inyectivo se siguen de que para cada $g \in \mathcal{G}$

$$(f * \chi_U)(g) = \begin{cases} f(g) & \text{si } \mathbf{d}(g) \in U \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

La aplicación resulta morfismo de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)$ -módulos pues $\chi_U \in \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)$ es una unidad. Finalmente, la sobreyectividad se consigue extendiendo por 0 cualquier elemento de $C(\mathcal{G}^U, \ell)$. Se tiene la siguiente cadena de isomorfismos de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)$ -módulos a derecha naturales en M :

$$\begin{aligned} M \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^U, \ell) &\cong M \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})} (\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}) \chi_U) \\ &\cong (M \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})} \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})) \chi_U \\ &\cong M \cdot \chi_U. \end{aligned}$$

Finalmente, veamos que $M \cdot \chi_U = M \cdot \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)$. En efecto, si $m \cdot \chi_U \in M \chi_U$, entonces, como $\chi_U \in \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)$ se obtiene que $m \cdot \chi_U \in M \cdot \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)$. Por otra parte, si $f \in \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U) \subseteq \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ y $m \in M$ entonces, como χ_U es unidad de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)$, se sigue que

$$m \cdot f = m \cdot (f * \chi_U) = (m \cdot f) \cdot \chi_U \in M \cdot \chi_U.$$

Por lo tanto, obtuvimos un isomorfismo natural

$$M \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^U, \ell) \cong M \cdot \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U).$$

y luego usar que

$$M \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^U, \ell) \cong (M \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})} \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})) \chi_U = M \chi_U = M \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U).$$

■

En base a lo anterior, denotamos para cada abierto $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ como $\text{Ind}^U = -\otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)} C_c(\mathcal{G}_U, \ell)$ y también $\text{Res}_U = -\otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^U)$. Para subgrupoides de esta forma, el funtor de extensión tiene propiedades que nos serán útiles.

Proposición 2.4.5. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ abierto y compacto. Entonces Ind^U es plenamente fiel y preserva objetos proyectivos.

Demostración. Teniendo en cuenta el Lemma 4.5.13 de [Rie17], para probar que un adjunto a izquierda es plenamente fiel basta demostrar que la unidad

$$\eta_M: M \rightarrow \text{Res}_U \circ \text{Ind}^U(M) = M \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)} C_c(\mathcal{G}_U, \ell) \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^U, \ell)$$

es un isomorfismo, para cada $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)$ -módulo M . Considerando a $\mathbf{d}: \mathcal{G}_U \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ como un $\mathcal{G}$ -haz, se tiene que la acción del grupoide es básica pues se tiene el siguiente homeomorfismo con su inversa continua:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_U \times_{\mathbf{r}} \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G}_U \times \mathcal{G}_U \\ (u, g) &\mapsto (u \cdot g, u) \\ (u, u^{-1}v) &\mapsto (v, u) \end{aligned}$$

En consecuencia, por el Lema 2.3.16 tenemos un isomorfismo

$$C_c(\mathcal{G}_U) \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^U) \cong C_c(\mathcal{G}_U \times_{\mathcal{G}} \mathcal{G}^U, \ell).$$

Más aún, es directo verificar que la multiplicación define un homeomorfismo de $\mathcal{G}_U^U$ -espacios con su inversa:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_U \times_{\mathcal{G}} \mathcal{G}^U &\rightarrow \mathcal{G}_U^U \\ [g, h] &\mapsto gh \\ [r(g), g] &\mapsto g \end{aligned}$$

Juntando ambas cosas, se tiene un isomorfismo de módulos

$$C_c(\mathcal{G}_U, \ell) \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^U, \ell) \cong C_c(\mathcal{G}_U^U, \ell),$$

donde esto último coincide como módulo con el álgebra de Steinberg de $\mathcal{G}_U^U$. Más aún, por la naturalidad de la adjunción obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\eta_M} & M \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)} C_c(\mathcal{G}_U, \ell) \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^U, \ell) \\ & \searrow \cong & \downarrow \cong \\ & & M \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)} \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U) \end{array}$$

Por lo tanto, obtuvimos que Ind^U es plenamente fiel. Finalmente, como los adjuntos a izquierda de un funtor exacto preservan objetos proyectivos en cualquier categoría abeliana, se tiene que Ind^U los preserva. ■

Introduzcamos las versiones explícitas de la restricción y extensión de haces:

Definición 2.4.6 (Haces restringidos). Sea $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ un subespacio abierto. Dado un haz $(E, p) \in \mathbf{Sh}_\ell(\mathcal{G})$ definimos el **haz restringido** $\text{Res}_U(E, p)$ como el $\mathcal{G}$ -espacio étale a derecha $p^{-1}(U) \xrightarrow{p} U$, cuyas fibras heredan la estructura de ℓ -módulo de (E, p) y la acción es la restringida a $\mathcal{G}_U^U$. Es directo verificar que esta asignación define un funtor

$$\text{Res}_U : \mathbf{Sh}_\ell(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbf{Sh}_\ell(\mathcal{G}_U^U).$$

Definición 2.4.7 (Haces extendidos). Sea $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ un subespacio clopen $\mathcal{G}$ -invariante. Dado un haz $(E, p) \in \mathbf{Sh}_\ell(\mathcal{G}_U^U)$ definimos el **haz extendido** $\text{Ind}^U(E, p)$ como sigue. El espacio total será $E^U = E \sqcup (\mathcal{G}^{(0)} \setminus U)$ y el ancla $p^U : E^U \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ será el homeomorfismo local

$$p^U = p \sqcup \text{id}_{\mathcal{G}^{(0)} \setminus U} : E \sqcup (\mathcal{G}^{(0)} \setminus U) \rightarrow U \sqcup (\mathcal{G}^{(0)} \setminus U) = \mathcal{G}^{(0)}.$$

Notar que como U es clopen, la topología de la unión disjunta coincide con la de $\mathcal{G}^{(0)}$. A su vez, la estructura en las fibras correspondientes a U vendrán equipadas de la estructura de ℓ -módulo en (E, p) , mientras que las fibras de $\mathcal{G}^{(0)} \setminus U$ vendrán dadas por el ℓ -módulo trivial. La sección nula viene dada por la sección nula en U y por la identidad en $\mathcal{G}^{(0)} \setminus U$, la cual resulta continua porque U es clopen. Finalmente, equipamos a $\text{Ind}(E, p)$ con la acción de $\mathcal{G}$ como sigue: como U es $\mathcal{G}$ -invariante, consideramos el homeomorfismo

$$E^U_{p^U} \times_{\mathbf{r}} \mathcal{G} \cong (E_p \times_{\mathbf{r}} \mathcal{G}_U^U) \sqcup \mathcal{G}_{U^c}^{U^c}.$$

Definimos la acción en cada factor como la acción de $\mathcal{G}_U^U$ seguido de la inclusión abierta $E \subseteq E^U$ y como el dominio $\mathcal{G}_{U^c}^{U^c} \xrightarrow{d} U^c$, respectivamente. Es directo verificar que esta construcción se extiende funtorialmente

$$\text{Ind}^U : \mathbf{Sh}_\ell(\mathcal{G}_U^U) \rightarrow \mathbf{Sh}_\ell(\mathcal{G}).$$

Como veremos en los siguientes teoremas, la restricción y extensión de haces definidas previamente corresponden con la restricción y extensión de módulos, a través de la equivalencia de Steinberg 2.2.5.

Teorema 2.4.8. Sean $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ un abierto compacto. Entonces el siguiente diagrama conmuta a menos de isomorfismo natural:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sh}_\ell(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\text{Res}_U} & \mathbf{Sh}_\ell(\mathcal{G}_U^U) \\ \Gamma_c \downarrow & & \downarrow \Gamma_c \\ \text{Mod-}\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\text{Res}_U} & \text{Mod-}\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U) \end{array}$$

Demostración. Sea (E, p) un $\mathcal{G}$ -haz. Por la Proposición 2.4.4 sabemos que hay isomorfismos naturales

$$\text{Res}_U(\Gamma_c(E, p)) \cong \Gamma_c(E, p) \cdot \chi_U.$$

Por la Proposición 2.2.4, este último coincide con el ℓ -submódulo de $\Gamma_c(E, p)$ cuyos elementos son secciones soportadas dentro de U . En particular dada tal sección $s : \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow E$, la restricción

$s|_U: U \rightarrow p^{-1}(U)$ define un elemento de $\Gamma_c(\text{Res}_U(E, p))$ y por ende un morfismo de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)$ -módulos. Más aún, como las secciones están soportadas dentro de U , la asignación es inyectiva. Finalmente, la sobreyectividad es consecuencia se obtiene extendiendo por cero en el complemento de U , lo cual define globalmente una función continua porque $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ es clopen. La naturalidad es directa de la definición de la asignación. ■

Teorema 2.4.9. Sean $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ un clopen $\mathcal{G}$ -invariante. Entonces el siguiente diagrama conmuta a menos de isomorfismo natural:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sh}_\ell(\mathcal{G}_U^U) & \xrightarrow{\text{Ind}^U} & \mathbf{Sh}_\ell(\mathcal{G}) \\ \Gamma_c \downarrow & & \downarrow \Gamma_c \\ \text{Mod-}\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U) & \xrightarrow{\text{Ind}^U} & \text{Mod-}\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}) \end{array}$$

Demostración. Sea (E, p) un $\mathcal{G}_U^U$ haz y consideremos

$$\text{Ind}(\Gamma_c(E, p)) = \Gamma_c(E, p) \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)} C_c(\mathcal{G}_U, \ell)$$

Comencemos notando que, por construcción, hay un isomorfismo ℓ -lineal entre $\Gamma_c(E, p)$ y $\Gamma_c(\text{Ind}^U(E, p))$, pues las secciones del haz quedan determinadas por secciones $U \rightarrow E$. Por transporte de estructura, se sigue que $\Gamma_c(E, p)$ hereda una estructura de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulo que convierte al isomorfismo anterior en uno de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulos a derecha. Para dicha estructura, se tiene un morfismo lineal

$$\Gamma_c(E, p) \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)} C_c(\mathcal{G}_U, \ell) \rightarrow \Gamma_c(E, p) \cong \Gamma_c(\text{Ind}(E, p))$$

que proviene de la asignación bilineal y $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)$ -balanceada $(s, f) \mapsto s \cdot f$, para cada $s \in \Gamma_c(E, p)$ y $f \in C_c(\mathcal{G}_U, \ell) \subseteq \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$. Una verificación directa muestra que la asignación es natural y por lo tanto resta verificar componente a componente que es biyectiva. Si $s \in \Gamma_c(E, p)$ es cualquier sección y $\text{sop}(s) \subseteq V \subseteq U$ con V un abierto compacto en U , consideramos la asignación

$$s \mapsto s \otimes \chi_V \in \Gamma_c(E, p) \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)} C_c(\mathcal{G}_U, \ell).$$

La asignación anterior no depende del V elegido pues si $\text{sop}(s) \subseteq V, W \subseteq U$, con V y W abiertos compactos, entonces $V \cup W \subseteq U$ es un abierto compacto que contiene al soporte de s y $\chi_{V \cup W} \chi_V = \chi_{V \cup W} \chi_W$. Esto implica que

$$s \otimes \chi_V = s \otimes \chi_{V \cup W} = s \otimes \chi_W.$$

Por lo tanto, la asignación resulta bien definido y es directo verificar que constituye una inversa conjuntística del morfismo de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulos anterior. ■

De esta forma, se obtiene lo deseado:

Corolario 2.4.10. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio y $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ es un abierto compacto $\mathcal{G}$ -invariante, se tiene la siguiente adjunción:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Ind}^U & \\ \text{Sh}_\ell(\mathcal{G}) & \begin{array}{c} \perp \\ \text{Res}^U \end{array} & \text{Sh}_\ell(\mathcal{G}_U^U) \end{array}$$

2.4.1. Una posible estrategia

Algunas de las preguntas que surgen como consecuencia de la equivalencia de Steinberg 2.2.5 son las siguientes: ¿cuáles son los haces de ℓ -módulos sobre un grupoide $\mathcal{G}$ que se corresponden con los módulos proyectivos finitamente generados sobre $\mathcal{G}$? ¿Será posible recuperar una versión de la correspondencia de Serre-Swan [Swa62] para álgebras de Steinberg? A continuación, proponemos un camino mediante el cual es posible utilizar la teoría de extensión y restricción de haces para caracterizar módulos proyectivos finitamente generados sobre el álgebra de Steinberg.

Observación 2.4.11. Sea $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio. Como $\{\chi_U : U \subseteq \mathcal{G}^{(0)} \text{ compacto abierto}\}$ es un sistema de unidades locales para $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$, entonces cualquier $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulo (a derecha) proyectivo y finitamente generado es la imagen de un proyector

$$\chi_U \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})^n \xrightarrow{q} \chi_U \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})^n.$$

Supongamos que existen un abierto compacto $\mathcal{G}$ -invariante $V \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ y un $\mathcal{G}_V^U$ -haz (E, p) tales que $\chi_U \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})^n = \Gamma_c(\text{Ind}^V(E, p))$. Como Ind^V es plenamente fiel, debe existir un endomorfismo idempotente $e : (E, p) \rightarrow (E, p)$ tal que $\Gamma_c(\text{Ind}^V(e)) = q$. Más aún, como Ind^V es exacto, se tiene que

$$\text{im}(q) \cong \Gamma_c(\text{Ind}^V(\text{im}(e))) \cong \Gamma_c(\text{im}(e)) \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_V^V)} C_c(\mathcal{G}_V, \ell).$$

La observación anterior muestra que para conocer los módulos proyectivos finitamente generados sobre el álgebra de Steinberg $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ basta clasificar, para un abierto compacto $\mathcal{G}$ -invariante adecuado $V \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$, los morfismos idempotentes de $\mathcal{G}$ -haces:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{e^2=e} & E \\ & \searrow p \quad \swarrow p & \\ & V & \end{array}$$

En otras palabras, logramos traducir el problema algebraico a uno topológico para el cual la estructura adicional del anillo ℓ se concentra a un problema fibra a fibra en el endomorfismo.

2.5. Módulos proyectivos sobre grupoides propios y libres

La idea para esta sección es aplicar la estrategia descrita en la Observación 2.4.11 para clasificar los módulos proyectivos en el caso más sencillo en el cual el grupoide es un espacio

topológico que solo tiene identidades. Luego, lo extenderemos a cualquier grupoide propio y libre, dado que estos son equivalentes Morita a su espacio de órbitas.

Construcción 2.5.1. Sean $\mathcal{G}$ un grupoide amplio, ℓ un anillo conmutativo discreto y M un ℓ -módulo con la topología discreta. Denotamos $\mathcal{L}_{\mathcal{G},M}$ al **haz lineal** sobre $\mathcal{G}$, respecto a M dado por la proyección $M \times \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$, con la acción de conjugación; es decir, $(\lambda, x) \cdot g = (\lambda, \mathbf{d}(g))$, para cada $m \in M$, $x \in \mathcal{G}^{(0)}$ y $g \in \mathcal{G}$ compatibles. Dado un abierto $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ denotaremos $\mathcal{L}_{U,M} = \mathcal{L}_{\mathcal{G}_U^U, M}$. Notar que una sección $s: \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow M \times \mathcal{G}^{(0)}$ del haz $\mathcal{L}_{\mathcal{G}^{(0)},M}$ se corresponde con una función continua compactamente soportada $\mathcal{G}^{(0)} \rightarrow M$. Para cada clopen $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ notaremos como $C_c(U, M)$ al ℓ -módulo generado linealmente por las funciones constantes en un abierto compacto y nulas fuera (ver 2.3.1 en [Li25]). La estructura de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulo a derecha en $C_c(\mathcal{G}^{(0)}, M)$ es análoga a la de $C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell)$, pero teniendo en cuenta la acción por escalares de ℓ en M . Con esta notación, la identificación anterior resulta un isomorfismo de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulos

$$\Gamma_c(\mathcal{L}_{\mathcal{G}^{(0)}}) \cong C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell).$$

Vía la extensión de haces, es posible generalizar el isomorfismo anterior:

Proposición 2.5.2. Sean $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio, $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ un clopen $\mathcal{G}$ -invariante y M un ℓ -módulo. Hay un isomorfismo de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulos

$$\Gamma_c(\text{Ind}^U(\mathcal{L}_{U,M})) \cong C_c(U, M),$$

donde $C_c(U, M)$ tiene la estructura de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulo inducida por la $\mathcal{G}$ -acción de conjugación.

Demostración. Por el Teorema 2.4.9 y la construcción anterior, se tienen isomorfismos

$$\Gamma_c(\text{Ind}^U(\mathcal{L}_{U,M})) \cong \Gamma_c(\mathcal{L}_{U,M}) \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)} C_c(\mathcal{G}_U, \ell) \cong C_c(U, M) \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)} C_c(\mathcal{G}_U, \ell).$$

Como U es $\mathcal{G}$ -invariante, se tiene que $\mathcal{G}_U = \mathcal{G}_U^U$ y por lo tanto $C_c(\mathcal{G}_U, \ell) = C_c(\mathcal{G}_U^U, \ell) = \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)$. Por lo tanto, tenemos un isomorfismo de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulos a derecha

$$C_c(U, M) \otimes_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U)} \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}_U^U, \ell) \cong C_c(U, M),$$

concluyendo lo deseado. ■

Corolario 2.5.3. Sean $\mathcal{G}$ un grupoide amplio, $U, V \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ dos abiertos compactos, $\mathcal{G}$ -invariantes y disjuntos y M un ℓ -módulo. Hay un isomorfismo:

$$\text{Ind}^U(\mathcal{L}_{U,M}) \oplus \text{Ind}^V(\mathcal{L}_{V,M}) \cong \text{Ind}^{U \sqcup V}(\mathcal{L}_{U \sqcup V, M}).$$

Demostración. Como U, V son $\mathcal{G}$ -invariantes y disjuntos, la propiedad universal del coproducto induce un isomorfismo de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulos

$$C_c(U \sqcup V, M) \cong C_c(U, M) \oplus C_c(V, M).$$

Gracias a la Proposición 2.5.2, se obtienen isomorfismos

$$\Gamma_c(\text{Ind}^{U \sqcup V}(\mathcal{L}_{U \sqcup V, M})) \cong C_c(U \sqcup V, M) \cong C_c(U, M) \oplus C_c(V, M) \cong \Gamma_c(\text{Ind}^U(\mathcal{L}_{U, M})) \oplus \Gamma_c(\text{Ind}^V(\mathcal{L}_{V, M})).$$

Como Γ_c es una equivalencia, se obtiene el isomorfismo buscado. ■

Para lo que sigue, fijemos un grupo discreto G y consideremos el conjunto $\text{End}_\ell(\ell^n)$ de endomorfismos de ℓ -módulos, dotado de la topología subespacio de $(\ell^n)^{\ell^n}$ (con la topología compacto-abierto) y la acción trivial de G . Notamos $\text{Idem}_\ell(\ell^n) \subseteq \text{End}_\ell(\ell^n)$ al sub- G -espacio de proyectores. Probaremos una clasificación para los endomorfismos de haces en el caso donde $\mathcal{G} = G \ltimes X$ es el grupode de transformación por la acción del grupo discreto.

Teorema 2.5.4. Sea G un grupo discreto que actúa (a izquierda) en un espacio localmente compacto Hausdorff y totalmente desconexo X . Hay una correspondencia biyectiva

$$(-)^\sharp: \text{End}_{\text{Sh}_\ell(G \ltimes X)}(\mathcal{L}_{X, \ell^n}) \rightarrow \mathbf{Top}_G(X, \text{End}_\ell(\ell^n)), \quad (2.5.5)$$

donde $\mathbf{Top}_G$ denota la categoría de G -espacios.

Demostración. Un endomorfismo de haces $e: \mathcal{L}_{X, \ell^n} \rightarrow \mathcal{L}_{X, \ell^n}$ es una función continua $e: \ell^n \times X \rightarrow \ell^n \times X$ que: preserve la acción de $G \ltimes X$, es ℓ -lineal fibra a fibra y hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \ell^n \times X & \xrightarrow{e} & \ell^n \times X \\ & \searrow \text{pr}_2 & \swarrow \text{pr}_2 \\ & X & \end{array}$$

Una tal función e queda determinada por la proyección a ambas coordenadas, y la conmutatividad del diagrama dice que $e = (e_1, \text{pr}_2)$, para alguna función continua $e_1: \ell^n \times X \rightarrow \ell^n$. Como ℓ^n es discreto, en particular es localmente compacto y Hausdorff y por la ley exponencial en $\mathbf{Top}$ una tal función se corresponde con $e_1^\sharp: X \rightarrow \mathbf{Top}(\ell^n, \ell^n)$. Notar que $\mathbf{Top}(\ell^n, \ell^n) = \mathbf{Set}(\ell^n, \ell^n)$ podría no ser discreto pero, como ℓ^n lo es, su topología coincide con la subespacio de $(\ell^n)^{\ell^n}$. La condición de ser morfismo de haces se traduce, a través de la ley exponencial, en las siguientes dos condiciones:

- para cada $x \in X$ la función $e_1^\sharp(x): \ell^n \rightarrow \ell^n$ es una transformación lineal;
- para cada $g \in G$ y $x \in X$ $e_1^\sharp(g \cdot x) = e_1^\sharp(x)$, pues G actúa trivialmente en la primer coordenada.

Es decir, la ley exponencial se correstringe a las funciones G -equivariantes con codominio $\text{End}_\ell(\ell^n)$, equipado de la acción trivial de G . ■

Corolario 2.5.6. Un endomorfismo de haces $e: \mathcal{L}_{X, \ell^n} \rightarrow \mathcal{L}_{X, \ell^n}$ es de la forma $f \times \text{id}_X: \ell^n \times X \rightarrow \ell^n \times X$ si y solo si $e^\sharp: X \rightarrow \text{End}_\ell(\ell^n)$ es constante.

Corolario 2.5.7. Un endomorfismo de haces $e: \mathcal{L}_{X, \ell^n} \rightarrow \mathcal{L}_{X, \ell^n}$ es idempotente si y solo si para cada $x \in X$, el endomorfismo $e_1^\sharp(x): \ell^n \rightarrow \ell^n$ es idempotente. Es decir, hay una biyección:

$$(-)^\sharp: \text{Idem}_{\text{Sh}_\ell(G \ltimes X)}(\mathcal{L}_{X, \ell^n}) \cong \mathbf{Top}_G(X, \text{Idem}_\ell(\ell^n))$$

Para lo que sigue, requerimos de la siguiente observación topológica respecto a la ley exponencial:

Proposición 2.5.8. Sea ℓ un anillo discreto y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\text{End}_\ell(\ell^n) \subseteq (\ell^n)^{\ell^n}$ es un subespacio discreto de la topología compacto-abierto.

Demostración. Fijemos $f \in \text{End}_\ell(\ell^n)$. Como $(\ell^n)^{\ell^n}$ es Hausdorff porque ℓ^n lo es, basta encontrar un entorno abierto de f que contenga una cantidad finita de puntos de $\text{End}_\ell(\ell^n)$. Sea $K = \{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \ell^n$ el conjunto compacto de vectores canónicos y $U = \{f(e_1), \dots, f(e_n)\} \subseteq \ell^n$ el conjunto de sus imágenes por f , que es abierto pues ℓ^n es discreto. Es claro que $f \in S(K, U) \subseteq (\ell^n)^{\ell^n}$. Más aún, como ℓ^n es un ℓ -módulo libre, los morfismos $g \in \text{End}_\ell(\ell^n)$ quedan determinados por las imágenes en los vectores canónicos $\{e_1, \dots, e_n\}$. En particular, hay a lo sumo n^2 morfismos tales que $g(K) \subseteq U$. Esto dice que

$$|\text{End}_\ell(\ell^n) \cap S(K, U)| \leq n^2,$$

y por lo tanto $\text{End}_\ell(\ell^n) \subseteq (\ell^n)^{\ell^n}$ es discreto. ■

Siguiendo la estrategia de la Observación 2.4.11, el siguiente resultado nos dice que cuál es el haz que corresponde con $\chi_U C_c(X, \ell)$, para cada abierto compacto $U \subseteq X$.

Lema 2.5.9. Sean X un espacio localmente compacto Hausdorff y totalmente desconexo, $U \subseteq X$ un compacto abierto y $e \in \text{End}_\ell(\ell^n)$ un endomorfismo. Entonces para cada ℓ -módulo M hay isomorfismos de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulos a derecha

$$\begin{aligned} M \otimes_\ell C_c(U, \ell) &\xrightarrow{\cong} C_c(U, M) \cong \Gamma_c(\text{Ind}^U(\mathcal{L}_{U, M})) \\ m \otimes f &\mapsto (x \mapsto m \cdot f(x)) \end{aligned}$$

Más aún, bajo este isomorfismo, el morfismo $\Gamma_c(\text{Ind}^U(e \times \text{Id}_X))$ corresponde con

$$e \otimes_\ell \text{id}: \ell^n \otimes_\ell C_c(U, \ell) \rightarrow \ell^n \otimes_\ell C_c(U, \ell).$$

En particular, se tiene que

$$\Gamma_c(\text{Ind}^U(\text{im}(e \times \text{id}))) \cong \text{im}(e) \otimes_\ell C_c(U, \ell).$$

Demostración. El primer isomorfismo es el Corollary 2.3 de [Li25], debido a Xin Li. Por otra parte, por la Proposición 2.5.2 la proyección a la coordenada de M define un isomorfismo de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ -módulos $\Gamma_c(\text{Ind}^U(\mathcal{L}_{U, M})) \cong C_c(V, M)$. De hecho, una tal sección queda determinada por una función continua de soporte compacto $V \rightarrow M$ y, porque X es Hausdorff, esto es lo mismo que un elemento de $C_c(V, M)$. Si $e: \ell^n \rightarrow \ell^n$ es un endomorfismo, una verificación en tensores elementales muestra que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_c(\text{Ind}^U(\mathcal{L}_{U, \ell^n})) & \xrightarrow{(e \times \text{id}_U)_*} & \Gamma_c(\text{Ind}^U(\mathcal{L}_{U, \ell^n})) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ C_c(U, \ell^n) & \xrightarrow{e_*} & C_c(U, \ell^n) \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong \\ \ell^n \otimes C_c(U, \ell) & \xrightarrow{e \otimes \text{id}} & \ell^n \otimes C_c(U, \ell) \end{array}$$

Esto muestra la correspondencia de morfismos. Finalmente, la última afirmación se sigue inmediatamente de la exactitud de Ind^U y de Γ_c . ■

De lo anterior, podemos deducir el siguiente teorema:

Teorema 2.5.10. Sean X un espacio localmente compacto, Hausdorff y totalmente desconexo, $U \subseteq X$ un abierto compacto y $e: \mathcal{L}_{U, \ell^n} \rightarrow \mathcal{L}_{U, \ell^n}$ un idempotente. Entonces, existen $U_1, \dots, U_m \subseteq U$ abiertos compactos disjuntos tales que $U = \bigsqcup_{i=1}^m U_i$ e idempotentes $e_1, \dots, e_m \in \text{Idem}_\ell(\ell^n)$ tales que, bajo el isomorfismo del Corolario 2.5.3

$$\text{Ind}^U(\mathcal{L}_{U, \ell^n}) = \text{Ind}^{\bigsqcup_{i=1}^m U_i}(\mathcal{L}_{(\bigsqcup_{i=1}^m U_i), \ell^n}) \cong \bigoplus_{i=1}^m \text{Ind}^{U_i}(\mathcal{L}_{U_i, \ell^n}),$$

el idempotente $\text{Ind}^U(e)$ corresponde a

$$\bigoplus_{i=1}^m \text{Ind}^{U_i}(e_i \times \text{id}_{U_i}).$$

En particular, hay un isomorfismo

$$\Gamma_c(\text{Ind}^U(\text{im}(e))) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{im}(e_i) \otimes_\ell C_c(U_i, \ell).$$

Demostración. Por el Corolario 2.5.7 aplicado al caso donde G es el grupo trivial, un idempotente $e: \mathcal{L}_{U, \ell^n} \rightarrow \mathcal{L}_{U, \ell^n}$ corresponde con una función continua $e^\sharp: U \rightarrow \text{Idem}_\ell(\ell^n)$. Por la Proposición 2.5.8, el subespacio $\text{Idem}_\ell(\ell^n) \subseteq \text{End}_\ell(\ell^n)$ es discreto y, como U es compacto, la imagen de la función es un subespacio finito $\text{im}(e) \subseteq \text{Idem}_\ell(\ell^n)$. Sean $e_1, \dots, e_m \in \text{Idem}_\ell(\ell^n)$ idempotentes tales que $\text{im}(e) = \{e_1, \dots, e_m\}$. Consideremos, para cada $1 \leq i \leq m$, los subespacios $U_i := e^{-1}(e_i) \subseteq U$. Como e es una función continua, los U_i son subespacios compactos, abiertos y disjuntos tales que $U = \bigsqcup_{i=1}^m U_i$. Además, se tiene que $e|_{U_i}: U_i \rightarrow \text{Idem}_\ell(\ell^n)$ son constantes y, por el Corolario 2.5.6 corresponden con $e_i \times \text{id}: \mathcal{L}_{U_i, \ell^n} \rightarrow \mathcal{L}_{U_i, \ell^n}$. Esta descomposición junto al Corolario 2.5.3 da un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Ind}^U(\mathcal{L}_{U, \ell^n}) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{i=1}^m \text{Ind}^{U_i}(\mathcal{L}_{U_i, \ell^n}) \\ \text{Ind}^U(e) \downarrow & & \downarrow \bigoplus_{i=1}^m \text{Ind}^{U_i}(e_i \times \text{id}_{U_i}) \\ \text{Ind}^U(\mathcal{L}_{U, \ell^n}) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{i=1}^m \text{Ind}^{U_i}(\mathcal{L}_{U_i, \ell^n}) \end{array}$$

Esto muestra que el idempotente se corresponde con lo buscado y el Lema 2.5.9 concluye el último isomorfismo. ■

El teorema anterior clasifica los módulos proyectivos sobre el álgebra de funciones continuas compactamente soportadas:

Teorema 2.5.11. Sean X un espacio topológico localmente compacto, Hausdorff y totalmente desconexo, ℓ un anillo conmutativo discreto y P un $\mathcal{A}_\ell(X)$ -módulo (a derecha) proyectivo y finitamente generado. Entonces, existen abiertos compactos $U_1, \dots, U_m \subseteq X$ y ℓ -módulos proyectivos finitamente generados $Q_1, \dots, Q_m$ junto a un isomorfismo de $\mathcal{A}_\ell(X)$ -módulos

$$P \cong \bigoplus_{i=1}^m Q_i \otimes_\ell C_c(U_i, \ell) \cong \bigoplus_{i=1}^m Q_i \otimes_\ell \chi_{U_i} \mathcal{A}_\ell(X).$$

Demostración. En vista de la Observación 2.4.11, un tal proyectivo P es la imagen de un idempotente

$$\chi_U \mathcal{A}_\ell(X)^n \rightarrow \chi_U \mathcal{A}_\ell(X)^n,$$

para algún abierto compacto $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ y $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 2.5.9 y la Proposición 2.5.2 obtenemos isomorfismos de $\mathcal{A}_\ell(X)$ -módulos

$$\chi_U \mathcal{A}_\ell(X)^n \cong \chi_U (\ell^n \otimes_\ell \mathcal{A}_\ell(X)) \cong \chi_U C_c(X, \ell^n).$$

Notar que toda función $U \rightarrow \ell^n$ se extiende a una función $X \rightarrow \ell^n$ cuyo soporte está contenido en U . De esta forma, gracias a la fórmula 2.2.4 la restricción define un isomorfismo de $\mathcal{A}_\ell(X)$ -módulos a derecha

$$\begin{aligned} \chi_U C_c(X, \ell^n) &\cong C_c(U, \ell^n) \\ \chi_U * f &\mapsto f|_U \end{aligned}$$

Por lo tanto, gracias a la Proposición 2.5.2 tenemos un isomorfismo

$$\chi_U \mathcal{A}_\ell(X)^n \cong \Gamma_c(\text{Ind}^U(\mathcal{L}_{U, \ell^n})).$$

Siguiendo los pasos de la Observación 2.4.11, tomando $V = U$ y $(E, p) = \mathcal{L}_{U, \ell^n}$, existe un idempotente $e: \mathcal{L}_{U, \ell^n} \rightarrow \mathcal{L}_{U, \ell^n}$. Por el Teorema 2.5.10 existen $U_1, \dots, U_m \subseteq U$ abiertos compactos disjuntos tales que $U = \bigsqcup_{i=1}^m U_i$ e idempotentes $\text{Idem}_\ell(\ell^n)$ tales que

$$\Gamma_c(\text{Ind}^U(\text{im}(e))) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{im}(e_i) \otimes_\ell C_c(U_i, \ell).$$

En particular, cada $Q_i := \text{im}(e_i)$ es un ℓ -módulo proyectivo finitamente generado y obtenemos la escritura deseada. Finalmente, el último isomorfismo es consecuencia de que $C_c(U_i, \ell) \cong \chi_{U_i} \mathcal{A}_\ell(X)$ para cada $1 \leq i \leq n$ como $\mathcal{A}_\ell(X)$ -módulo. ■

2.5.1. El morfismo de comparación

La idea de este apartado es expresar el resultado del Teorema 2.5.11 en términos de un morfismo de comparación entre la homología del grupoide y la K-teoría en grado cero de su álgebra de Steinberg y utilizarlo para extender este resultado para grupoides libres y propios. Recomendamos consultar [AHL18] para conocer las propiedades básicas del grupo $K_0(R)$, cuando R es un anillo con unidades locales.

Observación 2.5.12. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio y k es un anillo conmutativo discreto, de la Definición 1.5.20 la homología de $\mathcal{G}$ en grado cero viene dada por

$$H_0(\mathcal{G}, k) = \frac{C_c(\mathcal{G}^{(0)}, k)}{\langle \chi_{\mathbf{r}(\sigma)} - \chi_{\mathbf{d}(\sigma)} : \sigma \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G}) \rangle}.$$

Construyamos un tal morfismo de comparación:

Teorema 2.5.13. Sean $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y ℓ un anillo conmutativo discreto. Entonces, hay un morfismo de grupos abelianos $c_{\mathcal{G}}: K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) \rightarrow K_0(\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}))$ dado en generadores por

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{G}}: K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) &\rightarrow K_0(\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})) \\ [P] \otimes [\chi_U] &\mapsto [P \otimes_{\ell} \chi_U \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})] \end{aligned}$$

Demostración. Notemos que la homología en grado cero es un cociente de $C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \mathbb{Z})$ y a su vez, por el Lema 1.5.16, éste es un cociente por un $\mathbb{Z}$ -módulo cuyo núcleo conocemos explícitamente. Considerando esto, construiremos paso a paso el morfismo de comparación. Con la notación del Lema 1.5.16, para cada $[P] \in K_0(\ell)$, $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ y $\lambda \in \mathbb{Z}$, extendemos $\mathbb{Z}$ -bilinealmente la asignación $([P], \lambda \cdot U) \mapsto [P \cdot \lambda \otimes_{\ell} \chi_U \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})] \in K_0(\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}))$. La asignación está bien definida pues si P es ℓ -módulo proyectivo finitamente generado sobre ℓ y $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ es un abierto compacto, entonces $\chi_U \in \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})$ es idempotente y $\chi_U \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})$ es un módulo proyectivo finitamente generado a derecha sobre $\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})$. Además, como ℓ es conmutativo con unidad, $P \cdot \lambda$ es proyectivo finitamente generado y por lo tanto $P \otimes_{\ell} \chi_U \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})$ es un proyectivo finitamente generado sobre $\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})$ a derecha; i.e. su clase en $K_0(\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}))$ está bien definida. Finalmente, resulta directo verificar que esta asignación no depende del representante elegido en $K_0(\ell)$. Por lo tanto, obtenemos un morfismo de grupos abelianos bien definido:

$$\begin{aligned} K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{(\beta_{\mathcal{G}^{(0)}})} &\rightarrow K_0(\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})) \\ [P] \otimes \lambda \cdot U &\mapsto [P \cdot \lambda \otimes_{\ell} \chi_U \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})] \end{aligned} \tag{2.5.14}$$

Como el funtor $K_0 \otimes_{\mathbb{Z}}$ es exacto a derecha preserva conúcleos y por lo tanto tenemos una sucesión exacta corta

$$K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \ker(\pi_{\mathcal{G}^{(0)}}) \xrightarrow{\text{id} \otimes \text{inc}} K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{(\beta_{\mathcal{G}^{(0)}})} \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_{\mathcal{G}^{(0)}}} K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

Veamos que la asignación 2.5.14 anula a $(\text{id} \otimes \text{inc})$ para obtener una factorización por el cociente. En efecto, por el Lema 1.5.16 basta ver que si $U, V \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ son abiertos compactos disjuntos, entonces para todo ℓ -módulo proyectivo finitamente generado P se tiene que

$$[P \otimes_{\ell} \chi_{U \sqcup V} \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})] = [P \otimes_{\ell} \chi_U \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})] + [P \otimes_{\ell} \chi_V \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})].$$

De hecho, como U y V son disjuntos y clopens, se sigue que

$$\chi_U \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}) \oplus \chi_V \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}) \cong (\chi_U + \chi_V) \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}) = \chi_{U \sqcup V} \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}),$$

y por lo tanto que

$$(P \otimes_{\ell} \chi_U \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})) \oplus (P \otimes_{\ell} \chi_V \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})) \cong P \otimes_{\ell} \chi_{U \sqcup V} \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}).$$

Luego, por la sucesión exacta corta se obtiene una aplicación

$$\begin{aligned} K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \mathbb{Z}) &\rightarrow K_0(\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})) \\ [P] \otimes \chi_U &\mapsto [P \otimes_{\ell} \chi_U \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})] \end{aligned} \tag{2.5.15}$$

Nuevamente, como tensorizar es exacto a derecha, por un argumento análogo al anterior y la descripción del $H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$ basta verificar que si $\sigma \subseteq \mathcal{G}$ es una bisección abierta y compacta y P es un ℓ -módulo proyectivo finitamente generado, entonces

$$[P \otimes_{\ell} \chi_{r(\sigma)} \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})] = [P \otimes_{\ell} \chi_{d(\sigma)} \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})].$$

Como $\chi_{r(\sigma)}$ y $\chi_{d(\sigma)}$ son idempotentes y $\chi_{\sigma}, \chi_{\sigma^{-1}} \in \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})$ son tales que

$$\chi_{r(\sigma)} = \chi_{\sigma} \chi_{\sigma^{-1}} \quad \text{y} \quad \chi_{d(\sigma)} = \chi_{\sigma^{-1}} \chi_{\sigma},$$

multiplicar por χ_{σ} define un isomorfismo de $\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})$ -módulos a derecha

$$\chi_{d(\sigma)} \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\chi_{\sigma}^{*-}} \chi_{r(\sigma)} \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})$$

cuya inversa es la multiplicación por $\chi_{\sigma^{-1}}$. Esto dice que

$$P \otimes_{\ell} \chi_{r(\sigma)} \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}) \cong P \otimes_{\ell} \chi_{d(\sigma)} \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}).$$

Finalmente, por la propiedad universal del cociente, la asignación 2.5.15 se factoriza por el cociente:

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{G}}: K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) &\rightarrow K_0(\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})) \\ [P] \otimes [\chi_U] &\mapsto [P \otimes_{\ell} \chi_U \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})]. \end{aligned}$$

■

Observemos que en el caso de que $\mathcal{G} = X$ sea un espacio localmente compacto, Hausdorff y totalmente desconexo, se tiene que $H_0(X, k) = C_c(X, k)$. Por lo tanto, el Teorema 2.5.11 dice exactamente que el morfismo de comparación es sobreyectivo:

Corolario 2.5.16 (del Teorema 2.5.11 y Teorema 2.5.13). Sean X un espacio localmente compacto, Hausdorff y totalmente desconexo y ℓ un anillo conmutativo discreto. Entonces, hay un epimorfismo de grupos abelianos:

$$\begin{aligned} c_X: K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} C_c(X, \mathbb{Z}) &\twoheadrightarrow K_0(\mathcal{A}_{\ell}(X)) \\ [P] \otimes \chi_U &\mapsto [P \otimes_{\ell} \chi_U \mathcal{A}_{\ell}(X)] \end{aligned}$$

La forma de proceder para extender el resultado anterior a un grupoide $\mathcal{G}$ propio y libre es producir algún morfismo de comparación entre la homología de $\mathcal{G}$ y de su espacio de órbitas.

Lema 2.5.17. Sean $\mathcal{G}$ un grupoide amplio propio y libre y k un anillo conmutativo discreto. Entonces, hay un epimorfismo de k -módulos

$$\begin{aligned} H_0(\pi): H_0(\mathcal{G}, k) &\twoheadrightarrow C_c(\mathcal{G}^{(0)}, k) \\ [\chi_U] &\mapsto \chi_{\pi(U)}, \end{aligned}$$

donde $\pi: \mathcal{G}^{(0)} \twoheadrightarrow \mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ es la proyección al cociente.

Demostración. Como $\mathcal{G}$ es propio y libre, por la Observación 2.3.5 la proyección al cociente es un homeomorfismo local. Por lo tanto, por la funtorialidad en homeomorfismos locales de la Proposición 1.5.15, obtenemos un morfismo de k -módulos

$$\begin{aligned}\pi_* : C_c(\mathcal{G}^{(0)}, k) &\rightarrow C_c(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}, k) \\ \chi_U &\mapsto \chi_{\pi(U)}.\end{aligned}$$

Veamos primero que π_* es un epimorfismo. Para ello, basta ver que si $V \subseteq \mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ es abierto y compacto, entonces $\chi_V \in \text{im}(\pi_*)$. Como π es un homeomorfismo local sobreyectivo y $\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ Hausdorff y totalmente desconexo, podemos cubrir a V por abiertos compactos en donde π es un homeomorfismo con algún abierto de $\mathcal{G}^{(0)}$. Más aún, por la compacidad de V podemos quedarnos con finitos $U_1, \dots, U_n \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ abiertos tales que

$$V = \bigcup_{i=1}^n \pi(U_i) \quad \text{y} \quad U_i \xrightarrow[\cong]{\pi} \pi(U_i).$$

En particular, como $\pi|_{U_i}$ es un homeomorfismo, cada $U_i \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ es compacto y su unión $\bigcup_{i=1}^n U_i \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ es un abierto compacto. Esto implica que $\chi_{\bigcup_{i=1}^n U_i} \in C_c(\mathcal{G}^{(0)}, k)$ es un elemento bien definido que cumple que

$$\pi_*(\chi_{\bigcup_{i=1}^n U_i}) = \chi_{\pi(\bigcup_{i=1}^n U_i)} = \chi_{\bigcup_{i=1}^n \pi(U_i)} = \chi_V.$$

Resta ver que π_* se factoriza por el cociente $H_0(\mathcal{G}, k)$. Para ello, basta ver que para toda bi-sección abierta y compacta $\sigma \subseteq \mathcal{G}$, se tiene que $\pi_*(\chi_{\mathbf{r}(\sigma)}) = \pi_*(\chi_{\mathbf{d}(\sigma)})$. Sin embargo, por la definición del espacio de órbitas tenemos que $\pi \circ \mathbf{d} = \pi \circ \mathbf{r}$ y por lo tanto que

$$\pi_*(\chi_{\mathbf{r}(\sigma)}) = \chi_{\pi(\mathbf{r}(\sigma))} = \chi_{\pi(\mathbf{d}(\sigma))} = \pi_*(\chi_{\mathbf{d}(\sigma)}).$$

Luego, por la propiedad universal del cociente obtenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} C_c(\mathcal{G}^{(0)}, k) & \xrightarrow{\pi_*} & C_c(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}, k) \\ \downarrow & \nearrow H_0(\pi) & \\ H_0(\mathcal{G}, k) & & \end{array}$$

Finalmente, como π_* es un epimorfismo se sigue que $H_0(\pi)$ también lo es. ■

El siguiente teorema muestra que para un grupoide propio y libre $\mathcal{G}$ es posible relacionar el morfismo de comparación con el de su espacio de órbitas. Para ello, utilizaremos el lema anterior junto a la descripción explícita de la equivalencia Morita del Teorema 2.3.17.

Teorema 2.5.18. Sean $\mathcal{G}$ un grupoide amplio propio y libre y ℓ un anillo conmutativo discreto. Entonces, hay un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{G}}} & K_0(\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})) \\ \text{id}_{\otimes_{\mathbb{Z}} H_0(\pi)} \downarrow & & \uparrow -\otimes_{C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell)} \\ K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} C_c(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}}} & K_0(C_c(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}, \ell)) \end{array}$$

Demostración. Basta verificar la conmutatividad el diagrama en generadores. En particular, como $\mathcal{G}^{(0)}$ tiene una base de abiertos compactos en donde $\pi: \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$ es un homeomorfismo con su imagen, basta verificarlo en elementos de la forma $[P] \otimes \lambda \cdot \chi_U$ para cada ℓ -módulo proyectivo P , cada $\lambda \in \mathbb{Z}$ y cada abierto compacto $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ en donde π es un homeomorfismo con su imagen. Para un tal elemento tenemos que

$$\mathfrak{c}_{\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}} \circ (\text{id} \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(\pi))([P] \otimes \lambda \cdot \chi_U) = [P \cdot \lambda \otimes_{\ell} \chi_{\pi(U)} C_c(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}, \ell)].$$

Al aplicar el isomorfismo en K_0 inducido por tensorizar, obtenemos la siguiente clase:

$$[P \cdot \lambda \otimes_{\ell} \chi_{\pi(U)} C_c(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}, \ell) \otimes_{\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell)].$$

Como $U \xrightarrow{\pi} \pi(U)$ es un homeomorfismo, entonces induce isomorfismos de $\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G})$ -módulos

$$\chi_U C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell) \cong C_c(U, \ell) \cong C_c(\pi(U), \ell) \cong \chi_{\pi(U)} C_c(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}, \ell).$$

Tensorizando por $C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell)$ obtenemos

$$\chi_U C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell) \otimes_{\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell) \cong \chi_{\pi(U)} C_c(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}, \ell) \otimes_{\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell).$$

Finalmente, por la equivalencia Morita tenemos isomorfismos de $\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})$ -módulos

$$\chi_U \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}) \cong \chi_{\pi(U)} C_c(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}, \ell) \otimes_{\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell)$$

y por ende concluimos que

$$[P \cdot \lambda \otimes_{\ell} \chi_U \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})] = [P \cdot \lambda \otimes_{\ell} \chi_{\pi(U)} C_c(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}, \ell) \otimes_{\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G})} C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell)],$$

lo cual es exactamente la conmutatividad del diagrama. ■

Corolario 2.5.19. Sean $\mathcal{G}$ un grupoide amplio propio y libre y ℓ un anillo conmutativo discreto. Entonces, el morfismo de comparación $\mathfrak{c}_{\mathcal{G}}: K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) \rightarrow K_0(\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}))$ es un epimorfismo.

Demostración. En primer lugar, por el Lema 2.5.17, el morfismo $H_0(\pi)$ es un epimorfismo y como tensorizar es exacto a derecha, entonces $\text{id} \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(\pi)$ también lo es. Además, por el Corolario 2.5.16, se tiene que $\mathfrak{c}_{\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}}$ es un epimorfismo. Además, por el Teorema 2.3.17, tensorizar por $C_c(\mathcal{G}^{(0)}, \ell)$ implementa la equivalencia Morita entre $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}$, de modo que induce isomorfismos entre los grupos de K-teoría en grado cero. Todo esto, junto al Teorema 2.5.18, nos dice que $\mathfrak{c}_{\mathcal{G}}$ es una composición de epimorfismos y, por ende, un epimorfismo. ■

Para concluir con lo trabajado a lo largo de este capítulo, veremos que para el caso en el cual $\ell = \mathbb{Z}$ y el grupoide es Hausdorff, el morfismo de comparación es un isomorfismo. Para eso, consideraremos la **traza de Denis** [Mad95]

$$D_*: K_*(\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})) \rightarrow HH_*(\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})),$$

que relaciona la K -teoría de un álgebra con su homología de Hoschild. Su relación con la homología de grupoides es estudiada por Arnone, Cortiñas y Mukherjee en [ACM24]. Para lo que sigue, solo nos será de utilidad $D_0: K_0(\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})) \rightarrow HH_0(\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}))$. En efecto, la traza de Denis en grado cero le asigna, a cada clase de un proyector $p: \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})^n \rightarrow \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})^n$ en $K_0(\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}))$, la clase de su traza $[\text{tr}(p)] \in HH_0(\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})) = \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})/[\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}), \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})]$.

Lema 2.5.20 ([ACM24, Theorem 1.1]). Sea $\mathcal{G}$ un grupoide amplio Hausdorff y ℓ un anillo discreto. Entonces el morfismo canónico

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathcal{G}} : H_0(\mathcal{G}, \ell) &\rightarrow HH_0(\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})) = \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}) / [\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}), \mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G})] \\ [\chi_U] &\mapsto [\chi_U] \end{aligned}$$

admite una retracción. ■

Observación 2.5.21. En el caso donde $\ell = \mathbb{Z}$, el lado izquierdo del morfismo de comparación del Teorema 2.5.13 se reduce a $K_0(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) \cong H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$. Vía esta identificación y componiendo con la traza de Denis obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{G}}} & K_0(\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{G})) \\ & \searrow \alpha_{\mathcal{G}} & \downarrow D_0 \\ & & HH_0(\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{G})) \end{array}$$

En consecuencia, obtenemos el resultado deseado:

Teorema 2.5.22. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio Hausdorff el morfismo $\epsilon_{\mathcal{G}} : H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) \rightarrow K_0(\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{G}))$ es un monomorfismo. En particular, si $\mathcal{G}$ es propio y libre entonces el morfismo es un isomorfismo:

$$H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) \cong K_0(\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{G})).$$

Demostración. Por el Lema 2.5.20, tenemos que el morfismo $\alpha_{\mathcal{G}} : H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) \rightarrow HH_0(\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{G}))$ es un monomorfismo. En consecuencia, la conmutatividad del diagrama en la Observación 2.5.21 implica que el morfismo de comparación $\epsilon_{\mathcal{G}} : H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) \rightarrow K_0(\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{G}))$ es inyectivo y, por el Corolario 2.5.19, resulta un isomorfismo si $\mathcal{G}$ es libre y propio. ■

Capítulo 3

La perspectiva homotópica

In homotopy theory, the notion of ‘sameness’ is not a property (a binary yes/no question) but rather structure that must be explicitly provided (a homotopy, isomorphism, etc.).

B. CROSSEN [CNO25]

A lo largo de este capítulo, trabajaremos en la subcategoría plena $\mathfrak{Top} \hookrightarrow \mathbf{Top}$ de espacios topológicos compactamente generados, junto a su versión punteada $\mathfrak{Top}_*$. El motivo por el cual restringirnos a esta clase de espacios se resume en el siguiente resultado:

Teorema (Apéndice A.2). La categoría de espacios compactamente generados es completa, co-completa, cartesiana cerrada y la inclusión $\mathfrak{Top} \hookrightarrow \mathbf{Top}$ es adjunta a izquierda. En particular, los colímites se calculan como $\mathbf{Top}$. Más aún, los límites se calculan aplicando el adjunto a derecha $k: \mathbf{Top} \rightarrow \mathfrak{Top}$ a los límites usuales de espacios topológicos. Finalmente, el producto binario coincide con el de espacios topológicos en el caso donde uno de los espacios es localmente compacto y Hausdorff. ■

Recomendamos consultar el Apéndice A.2 para familiarizarse con las propiedades fundamentales de esta clase de espacios.

3.1. Espacios sobre una categoría

Para lo que viene a continuación, seguiremos la exposición del artículo [DL98] que permitió un acercamiento unificado a algunas de las conjeturas de isomorfismos centrales para la K-teoría topológica y algebraica.

Definición 3.1.1. Dada una categoría pequeña $\mathcal{C}$, un *$\mathcal{C}$ -espacio covariante* es un funtor covariante $Y: \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{Top}$ y un *$\mathcal{C}$ -espacio contravariante* es un funtor $X: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Top}$.

Los espacios sobre una categoría pequeña forman a su vez una categoría enriquecida en espacios topológicos compactamente generados:

Definición 3.1.2. Dados dos $\mathcal{C}$ -espacios de igual varianza $Y, \tilde{Y}$ notamos $\text{nat}_{\mathcal{C}}(Y, \tilde{Y})$ al espacio

de transformaciones naturales, dotado de la topología subespacio

$$\text{nat}_{\mathcal{C}}(Y, \tilde{Y}) \subseteq \prod_{c \in \mathcal{C}} \mathfrak{Top}(Y(c), \tilde{Y}(c))$$

con el producto de la categoría $\mathfrak{Top}$.

Veamos algunos ejemplos de espacios sobre categorías:

Ejemplo 3.1.3 (Espacios topológicos). Si $\mathcal{C}$ es cualquier categoría pequeña, todo espacio topológico compactamente generado Z es un $\mathcal{C}$ -espacio covariante o contravariante como funtor constante.

Ejemplo 3.1.4 (G -espacios). Si $\mathcal{BG}$ es la categoría de un grupo discreto G , entonces un G -espacio a izquierda (resp. a derecha) compactamente generado es exactamente un $\mathcal{BG}$ -espacio covariante (resp. contravariante).

Ejemplo 3.1.5 (Conjuntos simpliciales). Consideremos Δ la categoría de ordinales finitos. Un Δ -espacio covariante usual viene dado por $|\Delta|: \Delta \rightarrow \mathfrak{Top}$ el funtor que a un ordinal $\llbracket n \rrbracket \in \Delta$ le asigna el n -simplex topológico:

$$|\Delta^n| := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 + \dots + x_n = 1, x_i \geq 0\}.$$

Como $|\Delta^n|$ es compacto para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que el funtor toma valores en espacios compactamente generados. Para cada $i \in \llbracket n \rrbracket$, los morfismos $|d^i|: |\Delta^{n-1}| \rightarrow |\Delta^n|$ son aquellos que insertan un 0 en la i -ésima coordenada, mientras que los $|s^i|: |\Delta^{n+1}| \rightarrow |\Delta^n|$ suman las coordenadas x_i e x_{i+1} . Como estos verifican las identidades cosimpliciales, se tiene un funtor bien definido. Un **conjunto simplicial** es exactamente un Δ -espacio contravariante $X: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Top}$ equipado con la topología discreta lugar a lugar.

Veamos un par de ejemplos más abstractos:

Ejemplo 3.1.6 (Producto por un espacio). Si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña, X es un $\mathcal{C}$ -espacio de cualquier varianza y Z es un espacio compactamente generado, entonces $X \times_k Z$, el funtor que un objeto $c \in \mathcal{C}$ viene dado por $X(c) \times_k Z$, es un $\mathcal{C}$ -espacio de la misma varianza que X . En el caso donde Z es un espacio localmente compacto y Hausdorff, se tiene que el producto coincide con el usual de espacios topológicos.

Ejemplo 3.1.7 (Funciones continuas). Si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña, Y es un $\mathcal{C}$ -espacio covariante y Z un espacio compactamente generado, podemos considerar un $\mathcal{C}$ -espacio contravariante dado en objetos por

$$\begin{aligned} \text{map}(Y, Z): \mathcal{C} &\rightarrow \mathfrak{Top} \\ c &\mapsto \mathfrak{Top}(Y(c), Z), \end{aligned}$$

y en cada morfismo $\alpha: c \rightarrow d$ por la función continua $Y(\alpha)^*: \mathfrak{Top}(Y(d), Z) \rightarrow \mathfrak{Top}(Y(c), Z)$. Es evidente que esta construcción resulta functorial en Y y en Z ; es decir, tenemos un funtor covariante:

$$\text{map}(Y, -): \mathfrak{Top} \rightarrow \mathfrak{Top}$$

y otro funtor contravariante:

$$\text{map}(-, Z): \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathfrak{Top}) \rightarrow \mathfrak{Top}.$$

Introduciremos el siguiente objeto que surge como un análogo al producto tensorial de módulos. La siguiente definición será un caso particular de un coend y recomendamos consultar las páginas 219-222 de [ML98]. La idea es utilizar esta construcción para formular versiones homotópicas para los límites y colímites sobre una categoría pequeña $\mathcal{C}$, que modelen la noción de poner *coeficientes* sobre una categoría.

Definición 3.1.8. Sean $\mathcal{C}$ una categoría pequeña, $X: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Top}$ un $\mathcal{C}$ -espacio contravariante e $Y: \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{Top}$ un $\mathcal{C}$ -espacio covariante, se define el **producto tensorial** $X \otimes_{\mathcal{C}} Y$ como el espacio topológico cociente

$$X \otimes_{\mathcal{C}} Y := \coprod_{c \in \text{obj}(\mathcal{C})} X(c) \times_k Y(c) / \sim,$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por $(X(\varphi)(x), y) \sim (x, Y(\varphi)(y))$ para todos $\varphi: c \rightarrow d$, $x \in X(d)$ e $y \in Y(c)$.

Observación 3.1.9. El producto tensorial de un $\mathcal{C}$ -espacio contravariante X y un $\mathcal{C}$ -espacio covariante Y coincide con el siguiente coegalizador:

$$\coprod_{\varphi \in \mathcal{C}(c,d)} X(d) \times_k Y(c) \begin{array}{c} \xrightarrow{\coprod X(\varphi) \times_k \text{id}} \\ \xleftarrow{\coprod \text{id} \times_k Y(\varphi)} \end{array} \coprod_{x \in \mathcal{C}} X(c) \times_k Y(c) \twoheadrightarrow X \otimes_{\mathcal{C}} Y$$

Como los colímites de espacios topológicos coinciden con los colímites en $\mathfrak{Top}$, se sigue que el producto tensorial de dos $\mathcal{C}$ -espacios define un espacio topológico compactamente generado. En particular, la expresión del coegalizador muestra que se tiene un bifunctor:

$$(- \otimes_{\mathcal{C}} -): \text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathfrak{Top}) \times \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathfrak{Top}) \rightarrow \mathfrak{Top}.$$

Veamos algunos ejemplos que esta construcción recupera:

Ejemplo 3.1.10 (Producto balanceado). Sea G un grupo discreto y consideremos $X: \mathcal{B}G^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Top}$ e $Y: \mathcal{B}G \rightarrow \mathfrak{Top}$ dos G -espacios a derecha e izquierda, respectivamente. Entonces su producto tensorial coincide con el producto balanceado:

$$X \otimes_{\mathcal{B}G} Y = X \times_G Y = X \times_k Y / \sim$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por $(x \cdot g, y) \sim (x, g \cdot y)$ para cada $x \in X$, $y \in Y$ y $g \in G$.

Ejemplo 3.1.11 (Realización geométrica). Sea $X: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Top}$ un Δ -espacio contravariante, como por ejemplo un conjunto simplicial. El producto tensorial de X con el funtor covariante $|\Delta|: \Delta \rightarrow \mathfrak{Top}$ es exactamente la realización geométrica

$$X \otimes_{\Delta} |\Delta| = |X| = \left(\coprod_{n \geq 0} X_n \times |\Delta^n| \right) / \sim$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por $(x, |d^i|(p)) \sim (X(d^i)(x), p)$ y $(x, |s^i|(q)) \sim (X(s^i)(x), q)$ para cada $x \in X_n$, $p \in |\Delta^{n-1}|$, $q \in |\Delta^{n+1}|$ e $i \in \llbracket n \rrbracket$.

En analogía a lo sabido en el caso de módulos sobre un anillo, el producto tensorial define una adjunción:

Lema 3.1.12 (Ley exponencial). Sean X un $\mathcal{C}$ -espacio contravariante, Y un $\mathcal{C}$ -espacio covariante y Z un espacio topológico compactamente generado. Entonces hay una biyección natural

$$\mathfrak{Top}(X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z) \cong \text{nat}_{\mathcal{C}}(X, \text{map}(Y, Z))$$

Demostración. Por la propiedad universal del coegalizador, se tiene una biyección natural

$$\mathfrak{Top}(X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z) \cong \left\{ (f_c)_{c \in \mathcal{C}} : \bigsqcup_{x \in \mathcal{C}} X(c) \times_k Y(c) \rightarrow Z \mid f_c \circ (X(\varphi), \text{id}) = f_d \circ (\text{id}, Y(\varphi)) \right. \\ \left. \forall \varphi : c \rightarrow d \right\}.$$

Por la ley exponencial en $\mathfrak{Top}$, cada $f_c : X(c) \times Y(c) \rightarrow Z$ corresponde con una función continua $f_c^{\sharp} : X(c) \rightarrow \mathfrak{Top}(Y(c), Z)$. Gracias a la naturalidad de la ley exponencial, la condición de coegalizar se traduce, para cada $\varphi : c \rightarrow d$, a la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X(d) & \xrightarrow{X(\varphi)} & X(c) \\ f_d^{\sharp} \downarrow & & \downarrow f_c^{\sharp} \\ \mathfrak{Top}(Y(d), Z) & \xrightarrow{Y(\varphi)} & \mathfrak{Top}(Y(c), Z) \end{array}$$

Esto último es la condición de naturalidad para una familia de funciones continuas

$$\left((f_c^{\sharp}) : X(c) \rightarrow \mathfrak{Top}(Y(c), Z) \right)_{c \in \mathcal{C}}.$$

Esto dice que la ley exponencial en $\mathfrak{Top}$ se restringe y correstringe para dar una biyección natural

$$\left\{ (f_c)_{c \in \mathcal{C}} : \bigsqcup_{x \in \mathcal{C}} X(c) \times_k Y(c) \rightarrow Z \mid f_c \circ (X(\varphi), \text{id}) = f_d \circ (\text{id}, Y(\varphi)) \right. \\ \left. \forall \varphi : c \rightarrow d \right\} \cong \text{nat}_{\mathcal{C}}(X, \text{map}(Y, Z)),$$

lo cual concluye la demostración. ■

Observación 3.1.13. Especializando la Ley Exponencial 3.1.12 en el caso donde $\mathcal{C} = \Delta$ e $Y = |\Delta|$, recuperamos la adjunción entre la realización geométrica y el conjunto singular para conjuntos simpliciales.

Para lo que sigue, estudiaremos cómo se relacionan espacios sobre distintas categorías, cuando éstas admiten un functor que las compara. En analogía a los bimódulos, se tiene la siguiente construcción:

Ejemplo 3.1.14 ($\mathcal{C}$ – $\mathcal{D}$ espacios). Denominamos $\mathcal{C}$ – $\mathcal{D}$ -espacio a un $(\mathcal{C} \times \mathcal{D}^{\text{op}})$ -espacio, que puede pensarse como $\mathcal{C}$ -espacio covariante y un $\mathcal{D}$ -espacio contravariante con alguna condición de compatibilidad. Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor entre categorías pequeñas, podemos definir un $\mathcal{C}$ – $\mathcal{D}$ -espacio dado en objetos por

$$(c, d) \mapsto \text{hom}_{\mathcal{D}}(d, F(c)),$$

dotando al conjunto de morfismos de la categoría $\mathcal{D}$ con la topología discreta. Análogamente, F induce un $\mathcal{D}$ – $\mathcal{C}$ -espacio dado en objetos por

$$(d, c) \mapsto \text{hom}_{\mathcal{D}}(F(c), d),$$

Veamos el análogo de extensión-restricción de escalares para espacios sobre categorías:

Definición 3.1.15. Sean $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor entre categorías pequeñas y X un $\mathcal{C}$ -espacio covariante (resp. contravariante). Se define la **extensión** de X por F como el $\mathcal{D}$ -espacio covariante F_*X (resp. contravariante) dado en objetos por

$$d \mapsto \text{hom}_{\mathcal{D}}(F(-), d) \otimes_{\mathcal{C}} X,$$

y en morfismos inducido por la funtorialidad del producto tensorial. Respectivamente, obtenemos en objetos la versión contravariante:

$$d \mapsto X \otimes_{\mathcal{C}} \text{hom}_{\mathcal{D}}(d, F(-)).$$

Finalmente, dado un $\mathcal{D}$ -espacio X de cualquier varianza, se define la **restricción** de Y por F como el $\mathcal{D}$ -espacio $F^*X = X \circ F$, de la misma varianza que X .

Se obtiene la adjunción esperada:

Teorema 3.1.16 (Extensión-restricción contravariante). Sean $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor entre categorías pequeñas, $X: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Top}$ un $\mathcal{C}$ -espacio contravariante y $W: \mathcal{D}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Top}$ un $\mathcal{D}$ -espacio contravariante. Se tiene una biyección natural:

$$\text{nat}_{\mathcal{D}}(F_*X, W) \cong \text{nat}_{\mathcal{C}}(X, F^*W).$$

Demostración. Realicemos la construcción en ambas direcciones de la biyección. Un morfismo de $\mathcal{C}$ -espacios $f: F_*X \rightarrow W$ se corresponde por la Ley Exponencial 3.1.12 con una familia de transformaciones naturales

$$f_d: X \Rightarrow \text{map}(\text{hom}_{\mathcal{D}}(d, F(-)), W(d))$$

que satisfacen cierta condición de naturalidad. A su vez, una tal familia es precisamente una colección de transformaciones naturales

$$(f_d)_c: X(c) \rightarrow \mathfrak{Top}(\text{hom}_{\mathcal{D}}(d, F(c)), W(d)),$$

para cada objeto $c \in \mathcal{C}$ y $d \in \mathcal{D}$; que satisfacen la siguiente condición de compatibilidad: para cada $c \in \mathcal{C}$, $x \in X(c)$ y cada morfismo $\alpha: d \rightarrow e$ en $\mathcal{D}$, se tiene la siguiente igualdad:

$$(f_d)_c(x)(\varphi \circ \alpha) = W(\alpha)((f_e)_c(x)(\varphi)), \quad \forall \varphi \in \text{hom}_{\mathcal{D}}(e, F(c)). \quad (3.1.17)$$

Definimos, para cada $c \in \mathcal{C}$, la función continua $f_c^\sharp: X(c) \rightarrow W(F(c))$ como aquella dada por

$$f_c^\sharp(x) := (f_{F(c)})_c(x)(\text{id}_{F(c)}), \quad \forall x \in X(c).$$

La función es continua pues, gracias a la topología compacto-abierta, la evaluación

$$\text{ev}_{\text{id}_{F(c)}}: \mathfrak{Top}(\text{hom}_{\mathcal{D}}(F(c), F(c)), W(F(c))) \rightarrow W(F(c)),$$

es continua para cada $c \in \mathcal{C}$. La naturalidad es consecuencia de la igualdad 3.1.17. De hecho, si $\beta: b \rightarrow c$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, considerando $d = F(b)$, $e = F(c)$, $\alpha = F(\beta)$ y $\varphi = \text{id}_{F(c)}$, se tiene que la siguiente igualdad:

$$W(F(\beta))((f_{F(c)})_c(x)(\text{id}_{F(c)})) = (f_{F(b)})_c(x)(F(\beta)), \quad \forall x \in X(c).$$

A su vez, la naturalidad de $f_{F(b)}: X \Rightarrow \text{map}(\text{hom}_{\mathcal{D}}(F(b), F(-)), W(F(b)))$ aplicado a $\beta: b \rightarrow c$ nos dice precisamente que esto último es igual a

$$(f_{F(b)})_c(x)(F(\beta)) = (f_{F(b)})_b(X(\beta)(x)) \quad \forall x \in X(c).$$

En otras palabras, se tiene la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X(c) & \xrightarrow{X(\beta)} & X(b) \\ f_c^\# \downarrow & & \downarrow f_b^\# \\ W(F(c)) & \xrightarrow{W(F(\beta))} & W(F(b)) \end{array}$$

Lo cual demuestra la naturalidad¹ de $f^\#: X \Rightarrow W \circ F$. Para la dirección opuesta, comencemos considerando $g: X \Rightarrow W \circ F$ una transformación natural. Como $\text{hom}(d, F(c))$ es discreto para cada $d \in \mathcal{D}$ y $c \in \mathcal{C}$, tenemos que las siguientes topologías coinciden:

$$X(c) \times_k \text{hom}_{\mathcal{D}}(d, F(c)) = X(c) \times \text{hom}_{\mathcal{D}}(d, F(c)) = \bigsqcup_{\text{hom}_{\mathcal{D}}(d, F(c))} X(c).$$

Para cada $\alpha \in \text{hom}_{\mathcal{D}}(d, F(c))$, tenemos una función continua

$$X(c) \xrightarrow{g_c} W(F(c)) \xrightarrow{W(\alpha)} W(d)$$

que induce en la unión disjunta la siguiente asignación continua

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{c \in \mathcal{C}} (X(c) \times_k \text{hom}_{\mathcal{D}}(d, F(c))) &\rightarrow W(d) \\ (x, \alpha) &\mapsto W(\alpha) \circ g_c(x). \end{aligned}$$

La asignación respeta la relación del cociente en el producto tensorial como consecuencia de la naturalidad de $g: X \Rightarrow W \circ F$. De hecho, si $\varphi: b \rightarrow c$, $x \in X(c)$ y $\alpha: d \rightarrow F(b)$ son tales que $(X\varphi(x), \alpha) \sim (x, F(\varphi) \circ \alpha)$ tenemos, por naturalidad, que $g_d \circ X\varphi = W(F(\varphi)) \circ g_c$ y por ende por funtorialidad que

$$W(\alpha) \circ g_d(X\varphi(x)) = W(F(\varphi) \circ \alpha) \circ g_c(x).$$

Esto implica que exista, para cada $d \in \mathcal{D}$, una función continua

$$g_d^b: X \otimes_{\mathcal{C}} \text{hom}_{\mathcal{D}}(d, F(-)) \rightarrow W(d).$$

Resta ver la naturalidad de esta colección. No obstante, una verificación directa en los representantes del cociente muestra, que para cada $\beta: d \rightarrow e$ en $\mathcal{D}$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X \otimes_{\mathcal{C}} \text{hom}_{\mathcal{D}}(e, F(-)) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \beta^*} & X \otimes_{\mathcal{C}} \text{hom}_{\mathcal{D}}(d, F(-)) \\ g_e^b \downarrow & & \downarrow g_d^b \\ W(e) & \xrightarrow{W(\beta)} & W(d) \end{array}$$

¹Para el lector atento: la biyección descrita se factoriza por la biyección del Lema de Yoneda enriquecido. No obstante, preferimos por fines de simplicidad exhibir explícitamente la construcción.

Veamos que son mutuamente inversas. Si $f = (f_d)_{d \in \mathcal{D}}: X \otimes_{\mathcal{C}} \text{hom}_{\mathcal{D}}(d, F(-)) \rightarrow W(d)$ es una transformación natural, entonces para cada morfismo $\alpha: d \rightarrow F(c)$ en Δ y cada $x \in X(c)$ tenemos, por construcción, la siguiente igualdad

$$(f^\sharp)_d[x, \alpha] = W(\alpha) \circ f_{F(c)}(x, \text{id}_{F(c)}).$$

La naturalidad en d dice que esto último coincide precisamente con $f_d[x, \alpha]$, como queríamos. Recíprocamente, considerando una transformación natural $g = (g_c)_{c \in \mathcal{C}}: X(c) \rightarrow W(F(c))$, por construcción se tiene para cada $c \in \mathcal{C}$ y $x \in X(c)$ la siguiente igualdad:

$$(g^\flat)_c(x) = (g_{F(c)}^\flat)(x, \text{id}_{F(c)}) = g_c(x).$$

Esto concluye que las asignaciones son mutuamente inversas y por ende que tenemos la biyección del enunciado. La naturalidad de esta biyección se sigue de una verificación directa a través de las expresiones explícitas construidas. ■

De igual forma, es posible obtener una versión covariante del teorema anterior, aunque no la requeriremos para lo que sigue. En concreto, nos interesa el siguiente corolario:

Corolario 3.1.18. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías pequeñas, $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor, $X: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Top}$ un $\mathcal{C}$ -espacio contravariante e $Y: \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{Top}$ un $\mathcal{C}$ -espacio covariante. Se tiene un homeomorfismo natural

$$F_*X \otimes_{\mathcal{D}} Y \cong X \otimes_{\mathcal{C}} F^*Y$$

Demostración. Para cualquier espacio topológico $Z \in \mathfrak{Top}$, gracias a la Ley Exponencial 3.1.12 y el Teorema 3.1.16 tenemos una cadena de biyecciones naturales

$$\begin{aligned} \mathfrak{Top}(F_*X \otimes_{\mathcal{D}} Y, Z) &\cong \text{nat}_{\mathcal{D}}(F_*X, \text{map}(Y, Z)) \\ &\cong \text{nat}_{\mathcal{C}}(X, F^*\text{map}(Y, Z)) \\ &= \text{nat}_{\mathcal{C}}(X, \text{map}(F^*Y, Z)) \\ &\cong \mathfrak{Top}(X \otimes_{\mathcal{C}} F^*Y, Z) \end{aligned}$$

y por lo tanto por el Lema de Yoneda debe ser que $F_*X \otimes_{\mathcal{D}} Y \cong X \otimes_{\mathcal{C}} F^*Y$. ■

3.2. (Co)límites homotópicos

La idea para lo que sigue es construir ciertas versiones homotópicas de los límites o colímites en la categoría de espacios topológicos. Para ello, nos independizaremos del rumbo tomado por Davis y Lück en su artículo [DL98] y realizaremos las construcciones utilizando un modelo concreto adaptado del Capítulo 11 de [BK72]. Introduciremos una noción de homotopía para transformaciones naturales entre $\mathcal{C}$ -espacios y demostraremos algunas propiedades que nos serán útiles para realizar cálculos concretos como el del Ejemplo 3.2.11.

Definición 3.2.1. Decimos que dos morfismos $f, g: X \Rightarrow \tilde{X}$ entre $\mathcal{C}$ -espacios covariantes (resp. contravariantes) son **homotópicos** si existe una transformación natural $H: X \times I \Rightarrow \tilde{X}$ de manera tal que $f = H \circ i_0 =: H_0$ y $g = H \circ i_1 =: H_1$, donde $i_0, i_1: X \Rightarrow X \times I$ son las transformaciones naturales inducidas por las inclusiones lugar a lugar. En este caso, lo notamos $f \simeq g$.

Esta noción de homotopía entre morfismos resulta una condición más fuerte que solo requerir que lugar a lugar los morfismos sean homotópicos. La ventaja es que resulta una versión coherente con la 2-categoría de funtores.

Definición 3.2.2. Decimos que un morfismo $f : X \Rightarrow \tilde{X}$ entre $\mathcal{C}$ -espacios es una **equivalencia homotópica** si existe un morfismo $g : \tilde{X} \Rightarrow X$ de manera tal que $f \circ g \simeq \text{Id}_{\tilde{X}}$ y $g \circ f \simeq \text{Id}_X$. Decimos que f es una **equivalencia débil** si induce lugar a lugar equivalencias débiles. Dos $\mathcal{C}$ -espacios se dicen **homotópicamente equivalentes** si existe una equivalencia homotópica entre ellos y también lo notamos $X \simeq \tilde{X}$.

De forma análoga al caso de los espacios topológicos, se sigue que $\simeq$ es una relación de equivalencia y que los isomorfismos de espacios sobre una categoría son equivalencias homotópicas. Estudiemos algunas propiedades de exactitud del producto tensorial que utilizaremos para ver sus propiedades homotópicas.

Lema 3.2.3. Sean $X : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Top}$ e $Y : \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{Top}$ dos $\mathcal{C}$ -espacios y Z un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff. Se tienen homeomorfismos

$$(X \times Z) \otimes_{\mathcal{C}} Y \cong (X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \times Z \cong X \otimes_{\mathcal{C}} (Z \times Y)$$

$$[(x, z), y] \longleftarrow ([x, y], z) \longmapsto [x, (z, y)]$$

Demostración. Comencemos notando que, como Z es localmente compacto y Hausdorff, los productos por Z se calculan como en la categoría de espacios topológicos. A su vez, como Z es exponenciable el cociente $\bigsqcup_{c \in \mathcal{C}} X(c) \times Y(c) \twoheadrightarrow X \otimes_{\mathcal{C}} Y$ induce una función cociente

$$q : \bigsqcup_{c \in \mathcal{C}} (X(c) \times_k Y(c) \times Z) \cong \left(\bigsqcup_{c \in \mathcal{C}} X(c) \times Y(c) \right) \times Z \twoheadrightarrow (X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \times Z.$$

Como Z es constante como $\mathcal{C}$ -espacio, las relaciones de equivalencia en $\bigsqcup_{c \in \mathcal{C}} (X(c) \times_k Y(c) \times Z)$ son independientes de dicha coordenada. En particular, $(x, y, z) \sim (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ si y solamente si $z = \tilde{z}$ y $[x, y] = [\tilde{x}, \tilde{y}]$ en $X \otimes_{\mathcal{C}} Y$. Esto dice que $(x, y, z) \sim (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ si y solamente si $q(x, y, z) = q(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ y, como q es cociente, la propiedad universal del cociente implica que existen homeomorfismos que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & \bigsqcup_{c \in \mathcal{C}} (X(c) \times Z \times Y(c)) & & \\ & \swarrow & \downarrow q & \searrow & \\ (X \times Z) \otimes_{\mathcal{C}} Y & \xleftarrow{\cong} & (X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \times Z & \xrightarrow{\cong} & X \otimes_{\mathcal{C}} (Z \times Y) \end{array}$$

■

Proposición 3.2.4. Si $f, g : X \rightarrow \tilde{X}$ son morfismos de $\mathcal{C}$ -espacios contravariantes (resp. covariantes) homotópicos, entonces para cualquier $\mathcal{C}$ -espacio covariante Y (resp. contravariante) los morfismos $(f \otimes \text{id}), (g \otimes \text{id}) : X \otimes_{\mathcal{C}} Y \rightarrow \tilde{X} \otimes_{\mathcal{C}} Y$ son homotópicos (resp. su versión covariante).

Demostración. Demostremos la proposición para morfismos entre $\mathcal{C}$ -espacios contravariantes. Como f y g son homotópicos como morfismos de $\mathcal{C}$ -espacios, existe una transformación natural

$H: X \times I \Rightarrow \tilde{X}$ tal que $H_0 = f$ y $H_1 = g$. Por el homeomorfismo explícito en el Lema 3.2.3, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 X \otimes_{\mathcal{C}} Y & & & & \\
 \downarrow i_0 & \searrow f \otimes \text{id} & & & \\
 (X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \times I & \xrightarrow{\cong} & (X \times I) \otimes_{\mathcal{C}} Y & \xrightarrow{H \otimes \text{id}} & \tilde{X} \otimes_{\mathcal{C}} Y \\
 \uparrow i_1 & & & \nearrow g \otimes \text{id} & \\
 X \otimes_{\mathcal{C}} Y & & & &
 \end{array}$$

Se sigue que la composición horizontal es una homotopía entre $f \otimes \text{id}$ y $g \otimes \text{id}$. La versión covariante de la proposición se sigue de forma análoga. ■

La proposición anterior muestra que la definición del producto tensorial es coherente con las equivalencias homotópicas:

Corolario 3.2.5. Si $f: X \xrightarrow{\sim} \tilde{X}$ es una equivalencia homotópica entre $\mathcal{C}$ -espacios contravariantes y $g: Y \xrightarrow{\sim} \tilde{Y}$ es una equivalencia homotópica entre $\mathcal{C}$ -espacios covariantes, vale que $f \otimes g: X \otimes_{\mathcal{C}} Y \xrightarrow{\sim} \tilde{X} \otimes_{\mathcal{C}} \tilde{Y}$ es una equivalencia homotópica de espacios topológicos.

Demostración. Por la Proposición 3.2.4 se sigue que $f \otimes \text{id}: X \otimes_{\mathcal{C}} Y \rightarrow \tilde{X} \otimes_{\mathcal{C}} Y$ y $\text{id} \otimes g: \tilde{X} \otimes_{\mathcal{C}} Y \rightarrow \tilde{X} \otimes_{\mathcal{C}} \tilde{Y}$ son equivalencias homotópicas de espacios topológicos. De hecho, si existe un morfismo de $\mathcal{C}$ -espacios contravariantes $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow X$ tal que $f \circ \tilde{f} \simeq \text{id}_{\tilde{X}}$ y $\tilde{f} \circ f \simeq \text{id}_X$, entonces por functorialidad

$$(f \otimes \text{id}) \circ (\tilde{f} \otimes \text{id}) \simeq \text{id}_{\tilde{X} \otimes_{\mathcal{C}} Y} \quad \text{y} \quad (\tilde{f} \otimes \text{id}) \circ (f \otimes \text{id}) \simeq \text{id}_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y}.$$

Esto prueba que $f \otimes \text{id}$ es una equivalencia homotópica y de manera análoga se deduce que $\text{id} \otimes g$ también lo es. Finalmente, la siguiente composición es una equivalencia homotópica de espacios topológicos:

$$(f \otimes g): X \otimes_{\mathcal{C}} Y \xrightarrow{f \otimes \text{id}} \tilde{X} \otimes_{\mathcal{C}} Y \xrightarrow{\text{id} \otimes g} \tilde{X} \otimes_{\mathcal{C}} \tilde{Y}.$$

■

Veamos una construcción que funcionará como un reemplazo del espacio de un solo punto por alguno *mejor* comportado homotópicamente. Para ello, utilizaremos nociones básicas de conjuntos simpliciales que recomendamos consultar en [GJ09]. Es posible dar una perspectiva más categórica a la construcciones de los colímites homotópicos, como lo desarrollan Davis y Lück en [DL98]. No obstante, como mencionamos previamente, en este trabajo utilizaremos el siguiente modelo concreto para los espacios:

Construcción 3.2.6 (Fórmula de Bousfield-Kan). Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña. Para cada objeto c de $\mathcal{C}$, denotamos $c \backslash \mathcal{C}$ a la categoría **co-slice** cuyos objetos son flechas $c \rightarrow x$ en $\mathcal{C}$ y cuyos

morfismos son triángulos conmutativos apropiados. Más aún, la asignación $c \rightarrow c \backslash \mathcal{C}$ induce funtor

$$-\backslash \mathcal{C}: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Cat}$$

dado en morfismos por la precomposición. Como $c \backslash \mathcal{C}$ tiene como objeto inicial a id_c , entonces el único funtor $c \backslash \mathcal{C} \rightarrow *$ a la categoría de un solo punto es adjunto a izquierda. Esto implica que la unidad y counidad de la adjunción inducen equivalencias homotópicas entre los espacios clasificantes $|\mathcal{N}(c \backslash \mathcal{C})|$ y el punto $*$ $= |\mathcal{N}(*)|$. Consideremos el $\mathcal{C}$ -espacio contravariante

$$EC: \mathcal{C}^{\text{op}} \xrightarrow{-\backslash \mathcal{C}} \mathbf{Cat} \xrightarrow{\mathcal{N}} \mathbf{sSet} \xrightarrow{|\cdot|} \mathfrak{Top},$$

que toma valores en la subcategoría de CW-complejos. Por lo anterior, se tiene que EC es contráctil punto a punto. De hecho, la transformación natural $EC \Rightarrow *$ es una equivalencia débil de $\mathcal{C}$ -espacios. Este espacio sobre $\mathcal{C}$ lo llamaremos *reemplazo homotópico* del punto $*$.

No es cierto para cualquier categoría pequeña $\mathcal{C}$ que el morfismo de $\mathcal{C}$ -espacios contravariantes $EC \rightarrow *$ sea una equivalencia homotópica. El siguiente lema da condiciones suficientes para que eso ocurra:

Lema 3.2.7. Si $\mathcal{C}$ tiene objeto final entonces EC y $*$ son homotópicamente equivalentes como $\mathcal{C}$ -espacios contravariantes.

Demostración. Sea $1 \in \mathcal{C}$ el objeto final de $\mathcal{C}$ y, para cada $c \in \mathcal{C}$ consideremos $1_c: c \rightarrow 1$ el único morfismo de c en el objeto final. Para lo que sigue, recordar que un funtor cuyo dominio es la categoría $[0]$ de un solo objeto 0 y un solo morfismo queda unívocamente determinado al elegir la imagen del objeto 0 . Debemos ver que la única transformación natural $EC \Rightarrow *$ es una equivalencia homotópica de $\mathcal{C}$ -espacios. Para ello, consideramos como candidata a inversa homotópica la transformación natural inducida vía composición horizontal:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}^{\text{op}} & \xrightarrow{-\backslash \mathcal{C}} & \mathbf{Cat} & \xrightarrow{\mathcal{N}} & \mathbf{sSet} & \xrightarrow{|\cdot|} & \mathbf{Top} \\ & \uparrow \mathbb{1} & & & & & \\ & [0] & & & & & \end{array}$$

Aquí $[0]: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$ es el funtor que es constantemente la categoría $[0]$; mientras que $\mathbb{1}: [0] \Rightarrow -\backslash \mathcal{C}$ es la transformación natural que en cada objeto $c \in \mathcal{C}$ viene dada por el funtor:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_c: [0] &\rightarrow c \backslash \mathcal{C} \\ 0 &\mapsto 1_c. \end{aligned}$$

Esta colección es natural pues si $\alpha: c \rightarrow d$ es un morfismo en la categoría $\mathcal{C}$, entonces el siguiente diagrama conmuta en objetos

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xlongequal{\quad} & 0 \\ \mathbb{1}_d \downarrow & & \downarrow \mathbb{1}_c \\ d \backslash \mathcal{C} & \xrightarrow{\alpha^*} & c \backslash \mathcal{C} \end{array}$$

puesto que $\alpha^*(1_d) = 1_d \circ \alpha = 1_c$. Luego, por el comentario anterior, el diagrama conmuta también en morfismos y por ende la transformación $\mathbb{1}: [0] \Rightarrow -\backslash \mathcal{C}$ es natural. Como $[0]$ es objeto final en $\mathbf{Cat}$, se sigue que la composición

$$[0] \xRightarrow{\mathbb{1}} -\backslash \mathcal{C} \Rightarrow [0]$$

es la transformación natural identidad. Esto implica que, luego de componer horizontalmente con el funtor espacio clasificante, que la composición

$$* \xrightarrow{|\mathcal{N}| \circ \mathbb{1}} EC \Rightarrow *$$

es la identidad. Basta hallar una homotopía entre la identidad de EC y la composición en el orden contrario. Una tal homotopía, en el sentido de $\mathcal{C}$ -espacios contravariantes, es una transformación natural $EC \times I \Rightarrow EC$. Como el funtor espacio clasificante conmuta con productos por categorías finita, se tiene un isomorfismo natural de $\mathcal{C}$ -espacios contravariantes

$$EC \times I \cong |N(-\backslash \mathcal{C} \times [1])|.$$

Por lo tanto, basta exhibir una transformación natural $H: (-\backslash \mathcal{C}) \times [1] \Rightarrow -\backslash \mathcal{C}$ para la cual

$$H_0: -\backslash \mathcal{C} \Rightarrow [0] \xRightarrow{\mathbb{1}} -\backslash \mathcal{C}$$

y H_1 sea la transformación natural identidad de $-\backslash \mathcal{C}$. Luego, tras aplicar la composición horizontal se obtendrá la homotopía deseada. Dado $c \in \mathcal{C}$, una tal componente $H_c: (c \backslash \mathcal{C}) \times [1] \rightarrow c \backslash \mathcal{C}$, para la cual $(H_c)_0 = 1_c$ y $(H_c)_1 = \text{id}_c$, es exactamente una transformación natural entre los siguientes funtores:

$$\begin{array}{ccc} c \backslash \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbb{1} \circ [0]} & c \backslash \mathcal{C} \\ & \uparrow H_c & \\ & \text{id} & \end{array}$$

Para cada objeto $(c \rightarrow x) \in c \backslash \mathcal{C}$, definimos $(H_c)_{c \rightarrow x}$ como el diagrama inducido por el único morfismo $x \dashrightarrow 1$. Es decir, como el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} c & \longrightarrow & x \\ & \searrow 1_c & \downarrow (H_c)_{c \rightarrow x} \\ & & 1 \end{array}$$

Es directo verificar que, para cada $c \in \mathcal{C}$, esto define una transformación natural $H_c: \text{id} \Rightarrow \mathbb{1} \circ [0]$ y por lo tanto un funtor $H_c: (c \backslash \mathcal{C}) \times [1] \rightarrow c \backslash \mathcal{C}$. Basta ver que es natural en la variable $c \in \mathcal{C}$. De hecho, si $\alpha: c \rightarrow d$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, una sencilla verificación en objetos y morfismos muestra que el siguiente diagrama de funtores conmuta:

$$\begin{array}{ccc} (d \backslash \mathcal{C}) \times [1] & \xrightarrow{\alpha^* \times \text{id}} & (c \backslash \mathcal{C}) \times [1] \\ H_d \downarrow & & \downarrow H_c \\ d \backslash \mathcal{C} & \xrightarrow{\alpha^*} & c \backslash \mathcal{C} \end{array}$$

Lo anterior prueba que $H : (-\backslash \mathcal{C}) \times [1] \Rightarrow (-\backslash \mathcal{C})$ es una transformación natural que induce una homotopía deseada y, por ende, muestra que hay una equivalencia homotópica de $\mathcal{C}$ -espacios contravariantes $EC \simeq *$. ■

Considerando lo anterior, este $\mathcal{C}$ -espacio funciona como una *aproximación* del $\mathcal{C}$ -espacio constante $*$. Notemos que si Y es un $\mathcal{C}$ -espacio covariante, entonces el producto tensorial recupera el colímite:

$$* \otimes_{\mathcal{C}} Y = \frac{\bigsqcup_{c \in \mathcal{C}} Y(c)}{\substack{Y(\varphi)(x) \sim x \\ \forall \varphi : c \rightarrow d}} = \text{colím}_{\mathcal{C}} Y.$$

Notar que en la igualdad anterior, el producto coincide con el de espacios topológicos porque el punto $*$ es localmente compacto y Hausdorff. El $\mathcal{C}$ -espacio EC recibe el nombre de reemplazo homotópico del punto en vista de la siguiente definición:

Definición 3.2.8. Sean $\mathcal{C}$ una categoría pequeña e $Y : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{T}\text{op}$ un $\mathcal{C}$ -espacio covariante. Su **colímite homotópico** es el producto tensorial

$$\text{hocolím}_{\mathcal{C}} Y := EC \otimes_{\mathcal{C}} Y.$$

Observación 3.2.9. Si $\mathcal{C}$ tiene un objeto final $1 \in \mathcal{C}$ y $Y : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{T}\text{op}$ es un $\mathcal{C}$ -espacio covariante, entonces por el Corolario 3.2.5 el colímite homotópico es homotópicamente equivalente al colímite:

$$\text{hocolím}_{\mathcal{C}} Y = EC \otimes_{\mathcal{C}} X \simeq * \otimes_{\mathcal{C}} Y = \text{colím}_{\mathcal{C}} Y = Y(1).$$

Pese a que no trabajaremos con ella en este trabajo, por completitud incluimos la versión dual para los límites:

Definición 3.2.10. Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña e $Y : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{T}\text{op}$ un $\mathcal{C}$ -espacio covariante. Su **límite homotópico** es el espacio de morfismos

$$\text{holím}_{\mathcal{C}} Y := \text{nat}_{\mathcal{C}}(E(\mathcal{C}^{\text{op}}), Y).$$

Es posible verificar que, de manera dual que los colímites homotópicos, cuando $\mathcal{C}$ tiene objeto inicial $0 \in \mathcal{C}$ se tiene una equivalencia homotópica

$$\text{holím}_{\mathcal{C}} Y \simeq \text{nat}_{\mathcal{C}}(*, Y) = \text{límit}_{\mathcal{C}} Y.$$

Este modelo homotópico de los colímites para los espacios sobre una categoría recupera construcciones conocidas de topología general:

Ejemplo 3.2.11 (Pushout homotópico). Recordemos que el **pushout homotópico** de un diagrama $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$ de espacios topológicos viene dado por el espacio

$$X \sqcup_Z^h Y := (X \sqcup ([0, 1] \times Z) \sqcup Y) / \sim$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por $(0, z) \sim f(z)$ y $(1, z) \sim g(z)$. Esta noción surge en la búsqueda de una versión de pushout universal cuyo tipo homotópico quede determinado unívocamente por el tipo homotópico de los espacios en el diagrama. Recomendamos consultar el Capítulo 2 de [Cno25] para más detalles sobre su construcción, junto a ilustraciones esclarecedoras como la Figura 3.1. Veamos que nuestra definición de colímite homotópico

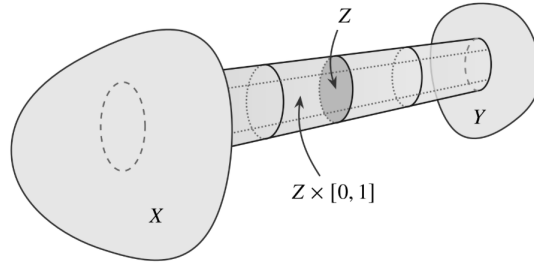
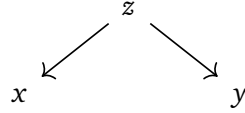


Figura 3.1: Representación del pushout homotópico

recupera esta noción de pushout homotópico. Supongamos que X, y, Z son compactamente generados y consideremos la categoría **span** $\mathcal{C}$ dada por el diagrama



junto a un funtor $\Gamma: \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{Top}$ que corresponde al diagrama $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$. Veamos que el colímite homotópico de Γ es exactamente el pushout homotópico. Para eso, debemos conocer el $\mathcal{C}$ -espacio contravariante $EC: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathfrak{Top}$. Es claro que tanto $x \backslash \mathcal{C}$ como $y \backslash \mathcal{C}$ son isomorfos como categoría a $[0]$, la categoría de un solo objeto y un solo morfismo. De este modo, se tiene que $EC(x) = EC(y) = *$. Por otra parte, se tiene que $z \backslash \mathcal{C} = \mathcal{C}$, pues z es un objeto inicial de $\mathcal{C}$. Esto implica que $EC(z)$ es homeomorfo al espacio clasificante de la categoría **span** $\mathcal{C}$, que es el intervalo $[0, 1]$. Más aún, es fácil verificar que los homeomorfismos corresponden a $EC(z \rightarrow x)$ con la inclusión $\{0\} \hookrightarrow I$ y a $EC(z \rightarrow y)$ con la inclusión $\{1\} \hookrightarrow I$. Como todos los espacios son localmente compactos y Hausdorff, de nuestra definición se tiene que

$$\text{hocolim}_{\mathcal{C}} \Gamma = \frac{(\{0\} \times X) \sqcup ([0, 1] \times Z) \sqcup (\{1\} \times Y)}{\substack{(0, f(z)) \sim (0, z) \\ (1, g(z)) \sim (1, z) \quad \forall z \in Z}} = X \sqcup_Z^h Y.$$

3.2.1. Mapas de ensamble

Veamos cómo un funtor entre dos categorías pequeñas induce un morfismo de comparación entre colímites homotópicos.

Construcción 3.2.12. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías pequeñas y $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor entre ellas. Consideremos la transformación natural $F_*: (- \backslash \mathcal{C}) \Rightarrow (- \backslash \mathcal{D}) \circ F$ inducida por post-composición en cada componente. Mediante la composición horizontal de esta transformación natural con el funtor $|\mathcal{N}(-)|: \mathbf{Cat} \rightarrow \mathfrak{Top}$, obtenemos un morfismo de $\mathcal{C}$ -espacios $EC \rightarrow ED \circ F = F^*ED$ que por el Teorema 3.1.16 se corresponde con un morfismo de $\mathcal{D}$ -espacios

$$f: F_*EC \rightarrow ED.$$

Si Y es un $\mathcal{D}$ -espacio covariante, el **mapa de ensamble** $\mathfrak{Ass}_Y: \text{hocolim}_{\mathcal{C}} F^*Y \rightarrow \text{hocolim}_{\mathcal{D}} Y$ es la composición

$$\mathfrak{Ass}_Y: EC \otimes_{\mathcal{C}} F^*Y \xrightarrow{\cong} F_*EC \otimes_{\mathcal{D}} Y \xrightarrow{f \otimes \text{id}} ED \otimes_{\mathcal{D}} Y, \quad (3.2.13)$$

donde el primer homeomorfismo es aquel del Corolario 3.1.18.

Fijando un funtor entre dos categorías pequeñas, el morfismo de ensamble resulta natural en el sentido de la siguiente proposición:

Proposición 3.2.14. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías pequeñas y $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor entre ellas, junto a $Y, \tilde{Y}: \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{Top}$ dos $\mathcal{D}$ -espacios covariantes y $\xi: Y \Rightarrow \tilde{Y}$ una transformación natural entre ellos. Entonces, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}} F^* Y & \xrightarrow{\mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}} F^* \xi} & \mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}} F^* \tilde{Y} \\ \downarrow \mathfrak{Ass}_Y & & \downarrow \mathfrak{Ass}_{\tilde{Y}} \\ \mathrm{hocolim}_{\mathcal{D}} Y & \xrightarrow{\mathrm{hocolim}_{\mathcal{D}} \xi} & \mathrm{hocolim}_{\mathcal{D}} \tilde{Y} \end{array}$$

donde $F^* \xi$ denota la composición horizontal de ξ con F .

Demostración. Probemos la conmutatividad en dos partes. En primer lugar, la naturalidad del homeomorfismo del Corolario 3.1.18 implica la conmutatividad del siguiente diagrama de espacios topológicos:

$$\begin{array}{ccc} EC \otimes_{\mathcal{C}} F^* Y & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_{\mathcal{C}} F^* \xi} & EC \otimes_{\mathcal{C}} F^* \tilde{Y} \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ F_* EC \otimes_{\mathcal{D}} Y & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_{\mathcal{D}} \xi} & F_* EC \otimes_{\mathcal{D}} \tilde{Y} \end{array}$$

Finalmente, por funtorialidad del producto tensorial el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F_* EC \otimes_{\mathcal{D}} Y & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_{\mathcal{D}} \xi} & F_* EC \otimes_{\mathcal{D}} \tilde{Y} \\ f \otimes \mathrm{id}_Y \downarrow & & \downarrow f \otimes \mathrm{id}_{\tilde{Y}} \\ ED \otimes_{\mathcal{D}} Y & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_{\mathcal{D}} \xi} & ED \otimes_{\mathcal{D}} \tilde{Y} \end{array}$$

Esto concluye, juntando los diagramas conmutativos, la naturalidad del mapa de ensamble. ■

3.3. Espectros

Ein Gespenst geht um in Europa – das
Gespenst des Kommunismus.

FRIEDRICH ENGELS Y KARL MARX

Gracias al trabajo de Quillen [Qui06], fue posible concentrar la información de todos los grupos de K-teoría algebraica (y más generalmente, una categoría) en los grupos de homotopía de un espacio. La idea de que la teoría de homotopía permitiría codificar invariantes homológicos se materializó con el Teorema de Representabilidad de Brown [Bro62]. En concreto,

los **espectros**, introducidos por Lima [Lim59], surgieron como la clase de objetos topológicos que describen las teorías de cohomología y que permitieron investigar fenómenos de dualidad de los espacios [SW53]. Hoy en día, existen diferentes definiciones de espectro de uso común, muchas de las cuales no son equivalentes. Si tuviéramos que decir qué es la categoría de espectros en una oración, Cary Malkiewich en [Mal23] sugiere que digamos alguna de las siguientes:

- espacios topológicos en donde la suspensión Σ es una equivalencia de categorías,
- CW-complejos con celdas de dimensión negativa,
- grupos abelianos a menos de homotopía,
- complejos de cadena con coeficientes en el espacio de funciones continuas de la esfera.

La herramienta de los grupos de homotopía usuales utilizada por Quillen trae consigo la desventaja de que los grupos de homotopía en grados superiores son inviables de calcular. En su lugar, la teoría de homotopía **estable**, centrada en entender la categoría de espectros, funciona como una aproximación a los espacios. En este sentido, Malkiewich nos ofrece la siguiente analogía:

La categoría de espectros es a los espacios lo que el álgebra lineal es al álgebra.

La idea de esta sección es introducir la noción de espectros con la que trabajaremos y mediante la cual se puede definir la K-teoría para cualquier categoría aditiva. Recomendamos consultar el Apéndice B.1 para conocer la consolidación de la K-teoría como un invariante de categorías, así como una *muy* breve introducción al lenguaje moderno de la infinito-categoría de los espectros. Este nuevo enfoque permite describir naturalmente los fenómenos estables y, junto al reciente trabajo de Efimov [Efi25], permite ampliar considerablemente el dominio de la K-teoría algebraica. A su vez, recomendamos consultar la sección A.2 para las propiedades básicas de espacios topológicos compactamente generados punteados y la adjunción entre el funtor suspensión y espacio de loops.

Definición 3.3.1. Un **espectro** es una sucesión de espacios topológicos compactamente generados punteados $(\mathbf{E}_n)_{n \geq 0}$ junto a mapas estructurales

$$\xi_n : \Sigma \mathbf{E}_n \rightarrow \mathbf{E}_{n+1}.$$

Un **morfismo de espectros** $f : (\mathbf{E}, \xi) \rightarrow (\mathbf{F}, \zeta)$ es una sucesión de funciones continuas $f_n : \mathbf{E}_n \rightarrow \mathbf{F}_n$ tales que, para cada $n \geq 0$, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma \mathbf{E}_n & \xrightarrow{\xi_n} & \mathbf{E}_{n+1} \\ \Sigma f_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ \Sigma \mathbf{F}_n & \xrightarrow{\zeta_n} & \mathbf{F}_{n+1} \end{array}$$

Llamamos **Spectra** a la categoría de espectros y la notamos **Sp**.

Al olvidar los mapas estructurales, un espectro resulta una colección de espacios y la evaluación es funtorial:

Observación 3.3.2. Para cada $n \geq 0$, la evaluación determina un funtor $ev_n: \mathbf{Sp} \rightarrow \mathcal{T}op_*$. Más aún, la información de los mapas estructurales determina transformaciones naturales $\Sigma \circ ev_n \Rightarrow ev_{n+1}$ que a cada espectro (E, ξ) le asigna el correspondiente mapa estructural $\xi_n: \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$.

Al estudiar un espectro E , estamos interesados en comprender el comportamiento límite de los espacios E_n mediante $n \rightarrow \infty$. Definiremos una noción de grupos de homotopía para espectros que tenga esto en consideración. Recordando que el funtor suspensión Σ preserva homotopías y que, para cada $n \geq 0$, se tiene que $\Sigma S^n = S^{n+1}$, tenemos una asignación natural

$$\pi_n(X) \xrightarrow{\sigma} \pi_{n+1}(\Sigma X).$$

Esto, junto a que los grupos de homotopía mayores a 1 son todos abelianos, permiten definir los grupos de homotopía para los espectros:

Definición 3.3.3. Si E es un espectro y $k \in \mathbb{Z}$ el *k -ésimo grupo de homotopía* $\pi_k(E) = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} \pi_{n+k}(E_n)$ es el colímite de grupos del diagrama

$$\cdots \rightarrow \pi_{k+n}(E_n) \xrightarrow{\sigma} \pi_{k+n+1}(\Sigma E_n) \xrightarrow{(\xi_n)_*} \pi_{k+n+1}(E_{n+1}) \rightarrow \cdots$$

El colímite resulta un grupo abeliano y cuando $k < 0$, definimos el diagrama para cada $n > -k$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, los grupos de homotopías dan lugar a un funtor

$$\pi_k: \mathbf{Sp} \rightarrow \mathbf{Ab}.$$

Decimos que un espectro es *conectivo* si su grupos de homotopía negativos son nulos.

Veamos algunos ejemplos de las definiciones anteriores:

Ejemplo 3.3.4 (Espectro esférico). El *espectro esférico* $\mathbb{S}$ es el espectro dado, para cada $n \geq 0$, por la esfera S^n y cuyos mapas estructurales son los homeomorfismos

$$\xi_n: \Sigma S^n \xrightarrow{\cong} S^{n+1}.$$

Los grupos de homotopía negativos son nulos, pues si $k < 0$ entonces $\pi_{k+n}(S^n) = 0$ para cualquier $n \geq 0$. Conocer el valor de los grupos de homotopía positivos es uno de los problemas centrales de la teoría de homotopía moderna y resulta una tarea para nada sencilla.

Ejemplo 3.3.5 (Espectro suspendido). Si X es cualquier espacio compactamente generado punteado, el *espectro suspendido* $\Sigma^\infty X$ es el espectro dado, para cada $n \geq 0$ por $\Sigma^n X = X \wedge S^n$ y cuyos mapas estructurales vienen dados por los homeomorfismos

$$\xi_n: (X \wedge S^n) \wedge S^1 \cong X \wedge S^{n+1}.$$

Este ejemplo implementa una generalización del anterior, tomando $X = S^0$. Más aún, se puede probar que este espectro también es conectivo como consecuencia de ciertos teoremas de estabilidad. El espectro suspendido determina un funtor

$$\Sigma^\infty: \mathcal{T}op_* \rightarrow \mathbf{Sp}.$$

Recordando la adjunción del Corolario A.2.17, determinar los mapas estructurales de un espectro $\mathbf{E}$ equivale a determinar, para cada $n \geq 0$ ciertas funciones continuas $\xi_n^\sharp: \mathbf{E}_n \rightarrow \Omega \mathbf{E}_{n+1}$. La definición de espectro nos dice, intuitivamente, que una esfera en $\mathbf{E}_n$ determina una esfera en $\mathbf{E}_{n+1}$ de una dimensión mayor. A continuación consideramos una familia de espectros para los cuales dar una esfera en $\mathbf{E}_n$ es exactamente lo mismo que dar una esfera en $\mathbf{E}_{n+1}$ de una dimensión mayor:

Definición 3.3.6. Un Ω -espectro es un espectro $\mathbf{E}$ cuyos mapas estructurales inducen equivalencias homotópicas débiles $\xi_n^\sharp: \mathbf{E}_n \xrightarrow{\sim} \Omega \mathbf{E}_{n+1}$. Denotamos $\mathbf{Sp}_\Omega \hookrightarrow \mathbf{Sp}$ a la subcategoría de Ω -espectros. El espacio $\mathbf{E}_0$ se denomina un *espacio de loops infinito*.

No es cierto, en general, que la adjunción entre el funtor suspensión y el funtor espacio de loops preserve equivalencias débiles. En evidencia, no es cierto que el espectro esférico sea un Ω -espectro, pues el mapa inducido por $\Sigma S^1 \cong S^2$ entre S^1 y ΩS^2 no puede ser una equivalencia débil.

Observación 3.3.7. Si $\mathbf{E}$ es un Ω -espectro, entonces para cada $k, n \geq 0$ hay una equivalencia débil $\mathbf{E}_k \sim \Omega^n \mathbf{E}_{n+k}$ lo cual motiva el nombre que recibe el espacio de loops infinito. Además, como el funtor espacio de loops aumenta en una unidad el grado del grupo de homotopía, obtenemos, para cada $n, k \geq 0$ isomorfismos $\pi_{n+k}(\mathbf{E}_n) \cong \pi_{n+k+1}(\mathbf{E}_{n+1})$ y por ende isomorfismos:

$$\pi_k(\mathbf{E}) \cong \pi_{n+k}(\mathbf{E}_n).$$

La observación anterior muestra que, en el caso de Ω -espectros, computar los grupos de homotopía equivale a conocer el espacio de loops infinito. En este sentido, otro de los grandes problemas en la teoría de homotopía es el problema del *delooping*: dado un espacio punteado $\mathbf{E}_0$, ¿podemos hallar un espacio topológico $\mathbf{E}_1$ para el cual $\Omega \mathbf{E}_1 \sim \mathbf{E}_0$? Los espacios *infinitamente deloopeables* resultarán aquellos para los cuales es posible conseguir un Ω -espectro conectivo cuyo espacio de loops infinito sea $\mathbf{E}_0$. Veamos cómo acercarnos a posibles respuestas de esta pregunta.

Proposición 3.3.8 ([Mal23, Proposition 2.2.9]). Existe un funtor $Q: \mathbf{Sp} \rightarrow \mathbf{Sp}_\Omega$ junto a una transformación natural $\eta: \text{id}_{\mathbf{Sp}} \Rightarrow \text{inc} \circ Q$ tales que para todo espectro $\mathbf{E}$ la transformación natural induce isomorfismos $\pi_k(\mathbf{E}) \xrightarrow{\cong} \pi_k(Q\mathbf{E})$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. ■

La expresión explícita del funtor Q , al cual denominamos *espectrificación*, no resulta tan significativa como sí su existencia. Mediante la espectrificación, podremos promover naturalmente construcciones sobre espectros a los Ω -espectros. A su vez, el resultado anterior nos dice que estudiar la categoría Spectra a menos de isomorfismos en los grupos de homotopías corresponde a estudiar Ω -espectros. Finalmente, gracias a la espectrificación podemos asignar canónicamente un espacio de loops infinitos a cualquier espectro:

Definición 3.3.9. Si $\mathbf{E}$ es un espectro, su *espacio de loops infinito* $\Omega^\infty \mathbf{E}$ es el espacio $(Q\mathbf{E})_0$.

Por lo visto anteriormente, para cualquier $k \geq 0$ podemos calcular los grupos de homotopía del espectro conociendo su espacio de loops infinito:

$$\pi_k(\Omega^\infty \mathbf{E}) \cong \pi_k(\mathbf{E}).$$

El espacio de loops infinito determina un funtor

$$\Omega^\infty : \mathbf{Sp} \rightarrow \mathcal{T}\mathbf{op}_*.$$

La construcción de la espectralización funciona como un reemplazo fibrante de los espectros. Si bien el espectro suspendido permite *incluir* a la categoría de espacios en Spectra, resulta un error denominar a Σ^∞ como una inclusión. De hecho, este funtor no resulta plenamente fiel. Es por esto que una de las preguntas relevantes respecto del modelo de categoría de los espectros que elegimos es si hay alguna forma canónica de embeber a los espacios dentro. En esta dirección, también corresponde cuestionar si la adjunción suspensión-loops se extiende para las construcciones anteriores:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\Sigma^\infty} & \\ \mathcal{T}\mathbf{op}_* & & \mathbf{Sp} \\ & \xleftarrow{\Omega^\infty} & \end{array}$$

En su artículo [LJ91], Gaunce Lewis demuestra que no existe un modelo *1-categorico* para Spectra que haga del par anterior una adjunción, junto a una estructura monoidal compatible con estos funtores y el espectro esférico. La necesidad de trabajar con algún modelo homotópicamente coherente, conduce inevitablemente al uso del lenguaje de ∞ -categorías.

3.3.1. Teorías de homología

Dedicaremos un pequeño apartado a mencionar cómo, mediante el uso de espectros, es posible definir invariantes homológicos. Recordemos que, según Eilenberg-Steenrod, una **teoría de homología** es una familia de funtores $H_n(-, -)_{n \geq 0}$ que a cada par topológico (X, A) le asigna grupos abelianos $H_*(X, A)$, junto a transformaciones naturales $\partial_n^{(X, A)} : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, \emptyset)$ que verifican los siguientes axiomas:

1. **(Homotopía)** Funciones homotópicas inducen el mismo morfismo en la homología.
2. **(Exactitud)** Cada par (X, A) junto a las inclusiones $i : (A, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset)$ y $j : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ inducen una sucesión exacta larga en la homología:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}^{(X, A)}} H_n(A, \emptyset) \xrightarrow{i_*} H_n(X, \emptyset) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n^{(X, A)}} \cdots$$

3. **(Escisión)** Para toda cofibración $A \hookrightarrow X$, el cociente $(X, A) \twoheadrightarrow (X/A, *)$ induce isomorfismos en la homología.
4. **(Aditividad)** Cada vez que $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ se escribe como la unión de sus componentes arcoconexas, las inclusiones inducen para cada $n \geq 0$ un isomorfismo

$$\bigoplus_{i \in I} H_n(X_i, \emptyset) \cong H_n(X, \emptyset),$$

5. **(Dimensión)** Para todo $n > 0$ la homología del punto es nula: $H_n(*, \emptyset) = 0$.

Recordemos que un CW-par (X, A) es una elección de un CW complejo X junto a un subcomplejo $A \subseteq X$. Partiendo de los axiomas anteriores, se obtiene la siguiente noción más general de teoría de homología:

Definición 3.3.10. Una *teoría de homología generalizada* es una familia de funtores $H_k(-, -)_{k \in \mathbb{Z}}$ de CW-pares en grupos abelianos, junto a transformaciones naturales para cada $k \in \mathbb{Z}$

$$\partial_k^{(X, A)}: H_k(X, A) \rightarrow H_{k-1}(A, \emptyset)$$

que verifican los primeros cuatro axiomas de Eilenberg-Steenrod: homotopía, exactitud, escisión y aditividad.

Veamos cómo podemos asociarle a cada espectro $\mathbf{E}$ una teoría de homología generalizada. Para ello, necesitamos de la siguiente construcción:

Construcción 3.3.11. Si X es un espacio topológico compactamente generado punteado en $\mathfrak{Top}_*$ y $(\mathbf{E}, \xi)$ es un espectro, definimos su *producto smash* $X \wedge \mathbf{E}$ como el espectro que en grado $n \geq 0$ tiene al espacio

$$(X \wedge \mathbf{E})_n = X \wedge \mathbf{E}_n$$

y cuyos mapas estructurales vienen dados por

$$\text{id} \wedge \xi_n: \Sigma(X \wedge \mathbf{E}_n) \cong X \wedge \Sigma(\mathbf{E}_n) \rightarrow X \wedge \mathbf{E}_{n+1}.$$

Si Z es un espacio no punteado en $\mathfrak{Top}$, entonces consideramos su versión punteada Z_+ en $\mathfrak{Top}_*$ y definimos el producto smash como $Z \wedge \mathbf{E} := Z_+ \wedge \mathbf{E}$.

Ejemplo 3.3.12. Dado un espacio topológico compactamente generado punteado X , su espectro suspendido coincide con el producto smash por el espectro esférico:

$$\Sigma^\infty X = X \wedge \mathbb{S}.$$

Con esta construcción, podemos introducir la teoría de homología generalizada asociada a un espectro:

Proposición 3.3.13 ([Mal23, Prop. 2.5.7]). Sean $\mathbf{E}$ un espectro, (X, A) un CW-par. La *teoría de homología asociada*, dada para cada $k \in \mathbb{Z}$ por

$$\mathcal{H}_k(X, A) := \pi_k(X/A \wedge \mathbf{E})$$

define una teoría de homología generalizada. ■

Ciertos resultados, así como el Teorema de Representabilidad de Brown [Bro62] para cohomología (y alguna de sus versiones homológicas), establecen que bajo ciertas hipótesis adicionales las teorías de (co)homología sobre espacios *buenos* se corresponden, a menos de homotopía, con espectros. Es decir, existe una construcción funtorial que a cada teoría de homología le asigna, a menos de homotopía, un espectro que *representa* dicha teoría. Este hecho termina de estrechar el vínculo entre el álgebra homológica y el álgebra homotópica.

3.3.2. Espectros sobre una categoría

La idea de este apartado será extender las construcciones realizadas para espacios sobre una categoría al considerar funtores con valores en la categoría $\mathbf{Spectra}$. Definiremos una noción de colímites homotópicos para espectros sobre una categoría y definiremos el mapa de ensamble para este contexto. Gracias a estas construcciones, habremos establecido todo el lenguaje necesario para formular las conjeturas de isomorfismos en términos de invariantes homotópicos. Vale la pena realizar la siguiente aclaración: por definición, nuestros espectros se constituyen a base de espacios punteados; no obstante, gracias a la maquinaria del Apéndice A.2, una pequeña inspección de las demostraciones muestra que

Observación 3.3.14. Todos los resultados para espacios sobre una categoría siguen siendo ciertos en su versión punteada al reemplazar $\mathcal{T}\mathbf{op}$ por $\mathcal{T}\mathbf{op}_*$, intercambiando las uniones disjuntas por productos wedge, los productos cartesianos por productos smash y los espacios de funciones continuas por espacios de funciones continuas punteadas.

En particular, la observación anterior dice que si $Y : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{T}\mathbf{op}_*$, entonces hay un isomorfismo natural

$$\Sigma(\mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}} Y) = \mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}} Y \wedge S^1 \cong \mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}} (\Sigma \circ Y),$$

pues el producto tensorial preserva los productos, en vista del Lema 3.2.3. Usando esto, buscamos extender la noción de colímite homotópicos, descrita para diagramas en $\mathcal{T}\mathbf{op}$ (como así para su análogo punteado), a todo $\mathbf{Spectra}$.

Definición 3.3.15. Sean $\mathcal{C}$ una categoría pequeña y $\mathbf{K} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sp}$ un funtor. Su **colímite homotópico** es el espectro que en grado $n \geq 0$ tiene el espacio

$$(\mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}} \mathbf{K})_n := \mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}} (\mathrm{ev}_n \circ \mathbf{K})$$

y cuyos mapas estructurales vienen dados por

$$\Sigma(\mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}} (\mathrm{ev}_n \circ \mathbf{K})) \cong \mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}} (\Sigma \circ (\mathrm{ev}_n \circ \mathbf{K})) \xrightarrow{\mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}} \xi_n} \mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}} (\mathrm{ev}_{n+1} \circ \mathbf{K}),$$

donde el último morfismo es el inducido en el colímite homotópico por la transformación natural $\xi_n : \Sigma \circ \mathrm{ev}_n(\mathbf{K}) \Rightarrow \mathrm{ev}_{n+1}(\mathbf{K})$ que a cada objeto $c \in \mathcal{C}$ le asigna el mapa estructural $\Sigma(\mathbf{K}(c)_n) \rightarrow \mathbf{K}(c)_{n+1}$. Es decir, es la transformación natural que proviene de la composición horizontal entre aquella de la Observación 3.3.2 y el funtor $\mathbf{K}$, según muestra el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbf{K}} & \mathbf{Sp} \\ & & \downarrow \mathrm{ev}_{n+1} \\ & & \mathcal{T}\mathbf{op}_* \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\Sigma \circ \mathrm{ev}_n} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{\mathrm{ev}_{n+1}} \end{array}$$

La idea a continuación es construir, dados un funtor entre categorías pequeñas $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y un funtor $K : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Sp}$, un morfismo de comparación entre los colímites homotópicos de $F^*K = K \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sp}$ y de K . Para ello, definiremos un morfismo de espectros usando grado a grado el mapa de ensamble 3.2.13.

Construcción 3.3.16. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías pequeñas y $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor entre ellas. Sea $\mathbf{K}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Sp}$ un funtor con valores en Spectra y consideremos, para cada $n \geq 0$, el mapa de ensamble 3.2.13:

$$\mathfrak{Ass}_{\mathbf{K}_n}: \text{hocolim}_{\mathcal{C}}(\text{ev}_n \circ F^* \mathbf{K}) \rightarrow \text{hocolim}_{\mathcal{D}}(\text{ev}_n \circ \mathbf{K}).$$

Veamos que esta colección de funciones continuas define un morfismo de espectros. Comencemos notando que, por definición, para todo $n \geq 0$ se tiene que

$$\Sigma(\text{ev}_n F^* \mathbf{K}) = F^*(\Sigma(\text{ev}_n \mathbf{K})).$$

Con esto en consideración, la naturalidad de los homeomorfismos en el Lema 3.2.3 dice que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(\text{hocolim}_{\mathcal{C}}(\text{ev}_n \circ F^* \mathbf{K})) & \xrightarrow{\cong} & \text{hocolim}_{\mathcal{C}}(F^*(\Sigma(\text{ev}_n \circ \mathbf{K}))) \\ \Sigma(\mathfrak{Ass}_{\mathbf{K}_n}) \downarrow & & \downarrow \mathfrak{Ass}_{\Sigma(\mathbf{K}_n)} \\ \Sigma(\text{hocolim}_{\mathcal{D}}(\text{ev}_n \circ \mathbf{K})) & \xrightarrow{\cong} & \text{hocolim}_{\mathcal{D}}(\Sigma(\text{ev}_n \circ \mathbf{K})) \end{array}$$

Por otra parte, considerando la naturalidad del mapa de ensamble según la Proposición 3.2.14 y la transformación natural $\xi_n: \Sigma \circ \text{ev}_n(\mathbf{K}) \Rightarrow \text{ev}_{n+1}(\mathbf{K})$, obtenemos otro diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{hocolim}_{\mathcal{C}}(F^*(\Sigma(\text{ev}_n \circ \mathbf{K}))) & \xrightarrow{\text{hocolim}_{\mathcal{C}} F^* \xi_n} & \text{hocolim}_{\mathcal{C}}(F^*(\text{ev}_{n+1} \circ \mathbf{K})) \\ \mathfrak{Ass}_{\Sigma(\mathbf{K}_n)} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{Ass}_{\mathbf{K}_{n+1}} \\ \text{hocolim}_{\mathcal{D}}(\Sigma(\text{ev}_n \circ \mathbf{K})) & \xrightarrow{\text{hocolim}_{\mathcal{D}} \xi_n} & \text{hocolim}_{\mathcal{D}}(\text{ev}_{n+1} \circ \mathbf{K}) \end{array}$$

Juntando los diagramas conmutativos, se obtiene para cada $n \geq 0$ el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(\text{hocolim}_{\mathcal{C}}(\text{ev}_n \circ F^* \mathbf{K})) & \longrightarrow & \text{hocolim}_{\mathcal{C}}(\text{ev}_{n+1} \circ F^* \mathbf{K}) \\ \Sigma(\mathfrak{Ass}_{\mathbf{K}_n}) \downarrow & & \downarrow \mathfrak{Ass}_{\mathbf{K}_{n+1}} \\ \Sigma(\text{hocolim}_{\mathcal{D}}(\text{ev}_n \circ \mathbf{K})) & \longrightarrow & \text{hocolim}_{\mathcal{D}}(\text{ev}_{n+1} \circ \mathbf{K}) \end{array}$$

En otras palabras, obtuvimos un *mapa de ensamble* para espectros sobre una categoría:

$$\mathfrak{Ass}_{\mathbf{K}}: \text{hocolim}_{\mathcal{C}} F^* \mathbf{K} \rightarrow \text{hocolim}_{\mathcal{D}} \mathbf{K}.$$

Es posible obtener una versión análoga de los colímites homotópicos componiendo con el funtor de espectralización. Esto da lugar a un mapa de ensamble con valores en Ω -espectros, producto de replicar los cálculos expuestos. Para terminar, veamos otra clase de morfismo de comparación para el caso en que $\mathcal{C}$ tenga objeto final, con la intención de extender lo visto en la Observación 3.2.9.

Observación 3.3.17. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto final $1 \in \mathcal{C}$ y $\mathbf{K}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sp}$ un $\mathcal{C}$ -espectro. Para cada $n \geq 0$, por la Observación 3.2.9 hay una equivalencia homotópica

$$\text{pr}_n: \text{hocolim}_{\mathcal{C}}(\text{ev}_n \circ \mathbf{K}) \xrightarrow{\cong} \text{colim}_{\mathcal{C}}(\text{ev}_n \circ \mathbf{K}) = \mathbf{K}(1)_n.$$

Esta equivalencia homotópica define un morfismo de espectros. En efecto, para cada $n \geq 0$ la naturalidad del homeomorfismo del Lema 3.2.3 y la funtorialidad del producto tensorial determina el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 \Sigma(EC \otimes_C \text{ev}_n \circ \mathbf{K}) & \xrightarrow{\cong} & EC \otimes_C \Sigma(\text{ev}_n \circ \mathbf{K}) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \xi_n} & EC \otimes_C (\text{ev}_{n+1} \circ \mathbf{K}) \\
 \downarrow \Sigma(\text{pr}_n) & & \downarrow * \otimes \text{id} & & \downarrow \text{pr}_{n+1} \\
 \Sigma(* \otimes_C \text{ev}_n \circ \mathbf{K}) & \xrightarrow{\cong} & * \otimes_C \Sigma(\text{ev}_n \circ \mathbf{K}) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \xi_n} & * \otimes_C (\text{ev}_{n+1} \circ \mathbf{K})
 \end{array}$$

El morfismo de espectros $\text{pr}: \text{hocolim}_C \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}(1)$ es lugar a lugar una equivalencia homotópica y por ende induce isomorfismos, para cada $k \in \mathbb{Z}$ en los grupos de homotopía del espectro:

$$\text{pr}_*: \pi_k(\text{hocolim}_C \mathbf{K}) \xrightarrow{\cong} \pi_k(\mathbf{K}(1)).$$

Es posible mejorar el resultado anterior mediante una noción adecuada de equivalencia homotópica para espectros. En concreto, se define una noción de homotopías entre morfismos de espectros (Definition 2.3.11 en [Mal23]) y solo basta observar que las homotopías lugar a lugar definidas en la demostración del Lema 3.2.7 son un caso de estas homotopías en $\mathbf{Sp}$.

3.4. La conjetura de Farrell-Jones

En esta sección abordaremos el estudio de una de las conjeturas de isomorfismos abiertas más importantes para la teoría de grupos y la K -teoría. Recordemos que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, hay un funtor $K_n: \mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Ab}$ (Recomendamos consultar el Apéndice B.1 para ampliar detalles al respecto de la construcción de este funtor y del espectro de K -teoría). Motivada por fenómenos de índole topológico, la conjetura de Farrell-Jones nace de la observación de que, para cada grupo libre de torsión G y un anillo regular ℓ fijo, la asignación $G \mapsto K_*(\ell[G])$ presenta cierto comportamiento² homológico.

¿Existe una teoría de homología (generalizada) $\mathcal{H}$ para la cual $\mathcal{H}_(B(G)) = K_*(\ell[G])$?*

Es claro que, en caso de que la pregunta anterior tenga una respuesta afirmativa, dicha teoría de homología debe verificar que

$$\mathcal{H}_*(\text{pt}) = \mathcal{H}_*(B(1)) = K_*(\ell).$$

De esta manera, el único candidato razonable para $\mathcal{H}_*$ es el de $\mathcal{H}(-; \mathbf{K}(\ell))$, la teoría de homología asociada (en el sentido de la Proposición 3.3.13) a algún espectro $\mathbf{K}(\ell)$, cuyos grupos de homotopía sean los grupos de K -teoría. Tal espectro configuró el principal objeto de estudio de la K -teoría algebraica, desde la propia definición de Quillen. Recomendamos, nuevamente, ver el Apéndice B.1 para más información sobre su existencia y construcción.

Conjetura 3.4.1 (Farrell-Jones regular-libre de torsión). Sean ℓ un anillo regular y G un grupo libre de torsión. Entonces el denominado *mapa de ensamble* canónico

$$\mathcal{H}_*(BG, \mathbf{K}(\ell)) \rightarrow K_*(\ell[G])$$

es un isomorfismo de grupos abelianos lugar a lugar.

²Para precisar el significado de *comportamiento*, recomendamos consultar la Sección 5 de [Lue25].

Pese al descuidado uso de la palabra *canónico* en la conjetura anterior, la construcción original del mapa de ensamble, debida³ a Loday en su tesis doctoral [Lod76] de 1976, es más bien técnica y se puede encontrar en el artículo [HP01] de Hambleton y Pedersen. Allí, los autores prueban la equivalencia entre las distintas formulaciones existentes para los mapas de ensambles, una de las cuales daremos a continuación. Contraejemplos no demasiado elaborados surgen cuando uno remueve las hipótesis de regularidad o torsión sobre el anillo o el grupo. No obstante, famosas conjeturas de topología general como la siguiente se seguirían de la validez de la conjetura anterior, de modo que su estudio resulta muy relevante incluso bajo estas hipótesis:

Conjetura 3.4.2 (Farrell-jones para el grupo de Whitehead). Sea G un grupo libre de torsión. Entonces, el grupo de Whitehead $\text{Wh}(G) := K_1(\mathbb{Z}[G])/\{\pm G\}$ es el grupo trivial.

El objetivo para lo que resta de esta sección es valernos de la teoría de (co)límites homotópicos desarrollada en el presente capítulo para, siguiendo la exposición y el formalismo de Davis y Lück en su artículo [DL98], construir un mapa de ensamble y enunciar una generalización de la conjetura de Farrell-Jones que no porte hipótesis sobre el grupo o el anillo. Finalmente, haremos una pequeña inspección del estado actual de esta conjetura.

Definición 3.4.3. Dado G un grupo y $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos, cerrada por subgrupos y conjugación, denotamos $\text{Or}(G, \mathcal{F})$ a la **categoría de órbitas** de G respecto $\mathcal{F}$; cuyos objetos son los G -espacios discretos G/H , para cada $H \in \mathcal{F}$, y cuyos morfismos son las funciones G -equivariantes. Escribimos $\text{Or}(G)$ para el caso particular en el cual $\mathcal{F}$ es la familia de todos los subgrupos de G .

Definida por Glen Bredon en [Bre67], la categoría de órbitas de un grupo fue utilizada para definir teorías de cohomología equivariantes. La idea de Davis y Lück es estudiar los $\text{Or}(G, \mathcal{F})$ -espacios y extender la K -teoría a un $\text{Or}(G, \mathcal{F})$ -espectro, mediante el uso de categorías lineales. Recomendamos consultar el Apéndice B.2 para conocer la construcción de la K -teoría para una categoría lineal. Veamos algunas propiedades de $\text{Or}(G, \mathcal{F})$.

Observación 3.4.4. Un morfismo $f : G/H \rightarrow G/K$ en la categoría $\text{Or}(G, \mathcal{F})$ queda completamente determinado por $f(H) \in G/K$. En concreto, si $f(H) = sK$, para algún $s \in G$, entonces por la equivarianza debe ser que para todo $h \in H$

$$sK = f(H) = f(hH) = hsK;$$

lo cual equivale a que

$$s^{-1}hs \in K \quad \text{para todo } h \in H.$$

Es decir, los morfismos $G/H \rightarrow G/K$ se corresponden con los elementos de G para los cuales $sHs^{-1} \subseteq K$. Más aún, dos elementos representan el mismo morfismo si y solo si $sK = tK$; es decir, si y solamente si $s^{-1}t \in K$.

Rumbo a una generalización de todas estas construcciones para grupoides, la observación anterior será crucial para definir un posible modelo de la categoría de órbitas de un grupoide. En efecto, surgen inconveniencias al definir la categoría de órbitas como aquella de todos los

³Según Valette en [Val02], la definición original del mapa de ensamble en el contexto de la conjetura de Baum-Connes se remonta al artículo [Kas83] de Kasparov en 1983.

morfismos de $\mathcal{G}$ -espacios entre cocientes, para $\mathcal{G}$ un grupoide amplio; de modo que utilizaremos las clases de conjugación para los fines de tal generalización. Veamos algunos ejemplos de familias de subgrupos relevantes:

Ejemplo 3.4.5. Si G es un grupo, las siguientes denotan algunas familias de subgrupos cerradas por subgrupos y conjugación relevantes en el estudio de la conjetura de Farrell-Jones:

- $\{1\}$, la familia que solo tiene al subgrupo trivial;
- $\mathcal{FCY}$, la de subgrupos finitos y cíclicos;
- $\mathcal{FLN}$, la de subgrupos finitos;
- $\mathcal{CCY}$, la de subgrupos cíclicos;
- $\mathcal{VCY}$, la de *virtualmente cíclicos*: que contienen a un subgrupo cíclico de índice finito;
- $\mathcal{ALL}$, la de todos los subgrupos.

Veamos, para una dada familia de subgrupos, algunos ejemplos de espacios sobre la categoría de órbitas:

Ejemplo 3.4.6. Sean G es un grupo, $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos cerrada por subgrupos y conjugación, y Z un G -espacio a izquierda en $\mathfrak{Top}$. Se define el $\text{Or}(G, \mathcal{F})$ -espacio covariante cociente como el funtor

$$\begin{aligned} Z/-: \text{Or}(G, \mathcal{F}) &\rightarrow \mathbf{Top} \\ G/H &\mapsto Z/H \end{aligned}$$

Además, definimos el $\text{Or}(G, \mathcal{F})$ -espacio contravariante de puntos fijos como

$$\begin{aligned} \text{map}_G(-, Z): \text{Or}(G, \mathcal{F}) &\rightarrow \mathbf{Top} \\ G/H &\mapsto Z^H. \end{aligned}$$

La notación $\text{map}_G(-, Z)$ es sugerida por el siguiente homeomorfismo de espacios topológicos

$$\begin{aligned} \text{map}_G(G/H, Z) &\cong Z^H \\ f &\mapsto f(H), \end{aligned}$$

donde $\text{map}_G(G/H, Z)$ denota el espacio de funciones continuas G -equivariantes con la topología subespacio de la compacto-abierta, y $Z^H \subseteq Z$ viene dotado de la topología subespacio. En la Proposición 4.1.4 del Capítulo 4 mostramos que, para nuestra generalización en los grupoides étales, una tal biyección (no un homeomorfismo) sigue valiendo.

Con el objetivo de formular la conjetura de Farrell-Jones en términos de mapas de ensamblajes, fijado un grupo G construiremos un funtor $\underline{\mathbb{K}}_\ell: \text{Or}(G) \rightarrow \mathbf{Sp}$ que compute, para cada objeto $G/H \in \text{Or}(G)$, la K -teoría $K(\ell[H])$. El acercamiento *naive* a este problema consiste de definir el funtor punto a punto de esta manera. No obstante, rápidamente uno observa que no es posible extender la definición de los objetos a morfismos, como consecuencia de que los

morfismos en $\text{Or}(G)$ están definidos a menos de clases de conjugación. De esta forma, la manera que proponen Davis y Lück en su artículo [DL98] es realizar esta construcción en dos pasos. Primero, construir un funtor $\text{Or}(G) \rightarrow \ell\text{-cat}$, y luego componerlo con el funtor $\mathbb{K}_\ell : \ell\text{-cat} \rightarrow \mathbf{Sp}$ desarrollado en el Apéndice B.2.

Construcción 3.4.7. Dado un grupo G , definimos un funtor $G \ltimes - : \text{Or}(G) \rightarrow \mathbf{Grpd}$. En objetos, le asigna a cada órbita G/H el grupoide de transformación discreto $G \ltimes G/H$, y en cada morfismo $f : G/H \rightarrow G/K$ viene dado por $\text{id} \times f : G \ltimes G/H \rightarrow G \ltimes G/K$. Por otra parte, a cada grupoide (discreto) $\mathcal{G} \in \mathbf{Grpd}$ podemos asignarle $\ell\mathcal{G}$, la categoría ℓ -lineal *libre* dada en objetos por los mismos que $\mathcal{G}$ y tal que $\text{hom}_{\ell\mathcal{G}}(x, y)$ sea el ℓ -módulo libre generado por $\text{hom}_{\mathcal{G}}(x, y)$. Esto define un funtor

$$\begin{aligned} \text{Or}(G) &\rightarrow \ell\text{-cat} \\ G/H &\mapsto \ell(G \ltimes G/H) \end{aligned}$$

De esta manera, conseguimos el funtor buscado:

$$\underline{\mathbb{K}}_\ell : \text{Or}(G) \rightarrow \ell\text{-cat} \xrightarrow{\mathbb{K}_\ell} \mathbf{Sp}. \quad (3.4.8)$$

El siguiente lema dice que el anterior funtor computa la K -teoría lugar a lugar:

Lema 3.4.9 ([DL98, Lemma 2.4]). Sean G un grupo y $G/H \in \text{Or}(G, F)$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ hay isomorfismos de grupos abelianos

$$\pi_n(\underline{\mathbb{K}}_\ell(G/H)) \cong K_n(\ell[H]).$$

Construyamos, utilizando el lenguaje de colímites homotópicos, el mapa de ensamble de Farrell-Jones:

Construcción 3.4.10. Sean G un grupo y $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos cerrada por subgrupos y conjugaciones. Considerando que la categoría $\text{Or}(G)$ tiene como objeto final a $G/G = \text{pt}$, la Observación 3.3.17 aplicado al funtor 3.4.8 dice que la proyección

$$\text{pr}_* : \text{hocolim}_{\text{Or}(G)} \underline{\mathbb{K}}_\ell \rightarrow \underline{\mathbb{K}}_\ell(G/G)$$

induce isomorfismos en los grupos de homotopía. A su vez, la inclusión $\iota_{\mathcal{F}} : \text{Or}(G, \mathcal{F}) \hookrightarrow \text{Or}(G)$ induce, en vista de la Construcción 3.3.16, el siguiente mapa de ensamble de espectros:

$$\mathfrak{Ass}_{\mathcal{F}} : \text{hocolim}_{\text{Or}(G, \mathcal{F})} \iota_{\mathcal{F}}^* \underline{\mathbb{K}}_\ell \rightarrow \text{hocolim}_{\text{Or}(G)} \underline{\mathbb{K}}_\ell \xrightarrow{\text{pr}_*} \underline{\mathbb{K}}_\ell(G/G). \quad (3.4.11)$$

La conjetura de Farrell-Jones, que enunciaremos a continuación, intenta determinar para qué familia adecuada de subgrupos el Mapa de Ensamble 3.4.11 induce isomorfismos en los grupos de homotopía. Es claro que tomando la familia $\mathcal{F} = \mathcal{ALL}$ de todos los subgrupos, el morfismo anterior se reduce a la identidad y por lo tanto induce isomorfismos. Para el caso donde G es libre de torsión y R regular, se puede ver que el mapa de ensamble anterior es precisamente el de la Conjetura 3.4.1, tomando la familia trivial $\mathcal{F} = \{1\}$. De esta manera, en un sentido heurístico la conjetura se trata encontrar la familia *más pequeña* que induzca isomorfismos en los grupos de homotopía. Contemplando el Lema 3.4.9, la conjetura propone la familia más pequeña de subgrupos $H \leq G$ donde la K -teoría de $\ell[H]$ determine la K -teoría de $\ell[G]$.

Conjetura 3.4.12 (Conjetura de Farrell-Jones). Dados G un grupo y ℓ un anillo, el Mapa de Ensamble 3.4.11 asociado a la familia de subgrupos virtualmente cíclicos induce isomorfismos en los grupos de homotopía

$$\mathfrak{Ass}_{\mathcal{VCYC}} : \pi_* \left(\operatorname{hocolim}_{\operatorname{Or}(G, \mathcal{VCYC})} \iota_{\mathcal{VCYC}}^* \mathbb{K}_\ell \right) \xrightarrow{\cong} K_*(\ell[G]).$$

La conjetura anterior presenta aplicaciones en diversas áreas y supone implicancias en numerosas conjeturas abiertas: la Conjetura de Novikov, la Conjetura de Bass, las Conjeturas de Serre, la Conjetura de Borel; entre otras. Si bien las estrategias actuales conocidas no permiten atacar directamente el caso general de la conjetura; ha habido numerosos avances en probar la validez para una gran familia de grupos, que ilustra cómo la comunidad de K -teoristas de todo el mundo ha trabajado en conjunto por un mismo fin:

Teorema 3.4.13 (Bartels, Bestvina, Farrell, Kammeyer, Lück, Reich, Rüpping, Wegner). La Conjetura de Farrell-Jones 3.4.12 es válida para las siguientes familias de grupos:

- grupos hiperbólicos,
- grupos $\operatorname{CAT}(0)$ de dimensión finita,
- grupos virtualmente solubles,
- reticulados en grupos de Lie cuasiconexos
- grupos fundamentales de variedades conexas de dimensión hasta 3,
- subgrupos de $GL_n(\mathbb{Q})$ y de $GL_n(\mathbb{F}(t))$ para un cuerpo finito $\mathbb{F}$,
- grupos S -aritméticos,
- grupos de Coxeter,
- grupos fundamentales de grafos asociados a grupos abelianos,
- grupos fundamentales de grafos asociados a grupos virtualmente cíclicos,
- grupos de n -trenzas.

Capítulo 4

Conjeturas de isomorfismo sobre grupoides étales

La idea de esta sección es presentar parte del trabajo actual de Guillermo Cortiñas, en colaboración con Xin Li, de su artículo en preparación [CL26]. En el mismo, proponen una generalización de la conjetura de Farrell-Jones utilizando la estrategia de Davis y Lück de definir una categoría de órbitas y extender la K -teoría a un funtor con ese dominio. Comenzaremos introduciendo dicha propuesta para la categoría de órbitas, demostrando al pasar algunas propiedades deseables que tiene. Luego, extenderemos la K -teoría a la categoría de órbitas para luego finalmente enunciar la generalización de la conjetura por Cortiñas-Li.

4.1. La categoría de órbitas

Definición 4.1.1. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide topológico y $\mathcal{H}$ un subgrupoide abierto. Se define el $\mathcal{G}$ -espacio (a izquierda) $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ como el cociente de $\mathcal{G}^{\mathcal{H}} = \mathbf{d}^{-1}(\mathcal{H}^{(0)})$ por la relación de equivalencia

$$g \sim \tilde{g} \iff \mathbf{r}(g) = \mathbf{r}(\tilde{g}) \text{ y } \tilde{g}^{-1}g \in \mathcal{H},$$

dotado de la topología cociente. Notamos a la clase de un elemento $s \in \mathcal{G}$ como $s\mathcal{H}$. Su ancla $\rho: \mathcal{G}/\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ viene dada por la factorización al cociente de $\mathbf{r}: \mathcal{G}^{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ y su multiplicación definida por la factorización al cociente de $\mathcal{G}_{\mathbf{d}} \times_{\mathbf{r}} \mathcal{G}^{\mathcal{H}} \xrightarrow{m} \mathcal{G}^{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Explícitamente, si $\mathbf{d}(g) = \mathbf{r}(s) = \rho(s \cdot \mathcal{H})$ entonces $g \cdot s\mathcal{H} = (g \cdot s)\mathcal{H}$.

Este cociente recupera $\mathcal{G}$ -espacios triviales de la forma esperada:

Observación 4.1.2. Todo grupoide topológico $\mathcal{G}$ es un $\mathcal{G}$ -espacio con la multiplicación a izquierda para el cual vale que $\mathcal{G} = \mathcal{G}/\mathcal{G}^{(0)}$. A su vez, vale que $\mathcal{G}^{(0)}$ es un $\mathcal{G}$ -espacio con la acción trivial para el cual $\mathcal{G}/\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)}$.

Como mencionamos en el Capítulo 2, la proyección al $\mathcal{G}$ -espacio cociente es un homeomorfismo local cuando el grupoide es étale:

Lema 4.1.3. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide étale y $\mathcal{H}$ un subgrupoide abierto. Entonces la proyección al cociente $\pi: \mathcal{G}^{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ es un homeomorfismo local de $\mathcal{G}$ -espacios.

Demostración. Es inmediato, por la definición de la acción en $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, que π es un morfismo de $\mathcal{G}$ -espacios continuo. Veamos primero que π es abierta. Como $\mathcal{H}$ es abierto y $\mathcal{G}$ es étale, entonces existen bisecciones $(\sigma_i)_{i \in I}$ de forma tal que

$$\mathcal{H} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i.$$

Si $U \subseteq \mathcal{G}^{\mathcal{H}}$ es cualquier abierto, entonces basta ver que $\pi(U)$ tiene preimagen por π abierta. En particular, tenemos que

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{i \in I} U\sigma_i,$$

que es una unión de abiertos. Por otra parte, si $g \in \mathcal{G}^{\mathcal{H}}$ y $\sigma \subseteq \mathcal{G}^{\mathcal{H}}$ es una bisección que contiene a g , veamos que $\pi|_{\sigma}: \sigma \rightarrow \pi(\sigma)$ es biyectiva. Es claro que es sobreyectiva. Más aún, si $\pi(g) = \pi(\tilde{g})$, para algunos $g, \tilde{g} \in \sigma$, entonces $\mathbf{r}(g) = \mathbf{r}(\tilde{g})$ y como σ es bisección $g = \tilde{g}$. Esto prueba que $\pi|_{\sigma}$ es biyectiva y abierta y por ende un homeomorfismo local. ■

Estudiemos cómo son los morfismos de $\mathcal{G}$ -espacios cuyo dominio es un $\mathcal{G}$ -espacio cociente. En particular, si $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ es un subgrupoide abierto y $X \xrightarrow{\rho} \mathcal{G}^{(0)}$ es un $\mathcal{G}$ -espacio (a izquierda), podemos considerar el $\mathcal{H}$ -espacio $X|_{\mathcal{H}}$ que proviene de restringir la acción, cuyo espacio topológico subyacente es $\rho^{-1}(\mathcal{H}^{(0)})$ y su ancla viene dada por el pullback:

$$\begin{array}{ccc} X|_{\mathcal{H}} & \hookrightarrow & X \\ \rho|_{\mathcal{H}} \downarrow & & \downarrow \rho \\ \mathcal{H}^{(0)} & \hookrightarrow & \mathcal{G}^{(0)} \end{array}$$

Recordando que $\mathcal{H}^{(0)}$ es un $\mathcal{H}$ -espacio con la acción de conjugación, obtenemos la siguiente caracterización:

Proposición 4.1.4. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide topológico y $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ un subgrupoide abierto. Entonces, para cualquier $\mathcal{G}$ -espacio X se tiene una biyección natural

$$\begin{aligned} \text{map}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}/\mathcal{H}, X) &\cong \text{map}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}^{(0)}, X|_{\mathcal{H}}) \\ f &\mapsto f|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

donde $\pi: \mathcal{G}^{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ es la proyección al cociente.

Demostración. Dado un morfismo de $\mathcal{G}$ -espacios $f: \mathcal{G}/\mathcal{H} \rightarrow X$, consideramos el siguiente diagrama conmutativo, inducido por la propiedad universal del pullback:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^{(0)} & \xrightarrow{\pi|_{\mathcal{H}^{(0)}}} & \mathcal{G}/\mathcal{H} & & \\ & \searrow f|_{\mathcal{H}} & \searrow f & & \\ & & X|_{\mathcal{H}} & \hookrightarrow & X \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \rho|_{\mathcal{H}} & & \downarrow \rho \\ & & \mathcal{H}^{(0)} & \hookrightarrow & \mathcal{G}^{(0)} \end{array}$$

Por construcción la flecha punteada $f|_{\mathcal{H}}: \mathcal{H}^{(0)} \rightarrow X|_{\mathcal{H}}$ conmuta con las anclas y preserva la acción pues, si $h \in \mathcal{H}$, entonces

$$f|_{\mathcal{H}}(h \cdot \mathbf{d}(h)) = f(h \cdot \mathbf{d}(h)\mathcal{H}) = h \cdot f(\mathbf{d}(h)\mathcal{H}) = h \cdot f|_{\mathcal{H}}(\mathbf{d}(h)).$$

Recíprocamente, si $g: \mathcal{H}^{(0)} \rightarrow X|_{\mathcal{H}}$ es un morfismo de $\mathcal{H}$ -espacios, entonces consideramos la siguiente función continua:

$$\mathcal{G}^{\mathcal{H}} \xrightarrow{(\text{id}, \mathbf{d})} \mathcal{G}^{\mathcal{H}}_{\mathbf{d}} \times_{\text{id}} \mathcal{H}^{(0)} \xrightarrow{\text{id} \times g} \mathcal{G}^{\mathcal{H}}_{\mathbf{d}} \times_{\rho} X|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{\mu} X$$

que viene dada, para cada $h \in \mathcal{G}^{\mathcal{H}}$, por la asignación $h \mapsto h \cdot g(\mathbf{d}(h))$. En particular, la asignación es morfismo de $\mathcal{G}$ -espacios y respeta la relación inducida por $\mathcal{H}$, pues si $\mathbf{r}(h) = \mathbf{r}(\tilde{h})$ y $\tilde{h}^{-1}h \in \mathcal{H}$, entonces

$$h \cdot g(\mathbf{d}(h)) = \tilde{h}(\tilde{h}^{-1}h) \cdot g(\mathbf{d}(h)) = \tilde{h} \cdot g(\mathbf{r}(\tilde{h}^{-1}h)) = \tilde{h} \cdot g(\mathbf{d}(\tilde{h})).$$

Por lo tanto, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}^{\mathcal{H}} & \xrightarrow{(\text{id}, \mathbf{d})} & \mathcal{G}^{\mathcal{H}}_{\mathbf{d}} \times_{\text{id}} \mathcal{H}^{(0)} \xrightarrow{\text{id} \times g} \mathcal{G}^{\mathcal{H}}_{\mathbf{d}} \times_{\rho} X|_{\mathcal{H}} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \mu \\ \mathcal{G}/\mathcal{H} & \xrightarrow{\hat{g}} & X \end{array}$$

Explícitamente, para cada $h\mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ tenemos que $\hat{g}(h\mathcal{H}) = h \cdot g(\mathbf{d}(h))$. Con esta definición, es inmediato que $\hat{g}$ es morfismo de $\mathcal{G}$ -espacios y que las construcciones realizadas son mutuamente inversas. Más aún, una sencilla verificación muestra que para cualquier morfismo de $\mathcal{G}$ -espacios $\alpha: X \rightarrow Y$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \text{map}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}/\mathcal{H}, X) & \xrightarrow{\alpha_*} & \text{map}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}/\mathcal{H}, Y) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{map}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}^{(0)}, X|_{\mathcal{H}}) & \xrightarrow{(\alpha|_{\mathcal{H}})_*} & \text{map}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}^{(0)}, Y|_{\mathcal{H}}) \end{array}$$

y por lo tanto la biyección es natural. ■

Para el caso donde $\mathcal{G} = G$ es un grupo discreto, los cocientes por subgrupoides abiertos coinciden con los cocientes de grupos y para un G -espacio X tenemos que $X|_H = X$. En particular, las funciones H -equivariantes $\star \rightarrow X$ coinciden con los puntos fijos de la acción X^H . En particular, se recupera el Ejemplo 3.4.6:

Corolario 4.1.5. Si G es un grupo y X un G -espacio, se tiene una biyección natural

$$\text{map}_G(G/H, X) \cong X^H.$$

Consideramos $\mathcal{G}$ un grupoide étale. La idea es introducir una generalización de la categoría $\text{Or}(G, F)$ introducida en el Ejemplo 3.4.3.

Construcción 4.1.6. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subgrupoides abiertos cerrada por subgrupoides y conjugación por bisecciones abiertas. La **categoría de órbitas** $\text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ es la categoría cuyos objetos son los subgrupoides de $\mathcal{F}$ y un morfismo $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ es una clase de equivalencia $[\sigma]$ de una bisección que cumple

1. $\mathcal{H}^{(0)} = \mathbf{r}(\sigma)$,
2. $\sigma^{-1}\mathcal{H}\sigma \subseteq \mathcal{K}$.

Dos tales bisecciones $\sigma \sim \tau$ están relacionadas si cumplen que $\sigma^{-1}\tau \subseteq \mathcal{K}$. La composición de dos morfismos $\mathcal{H}^{(0)} \xrightarrow{[\sigma]} \mathcal{K}^{(0)}$ y $\mathcal{K} \xrightarrow{[\tau]} \mathcal{L}$ en esta categoría viene dada por la multiplicación de bisecciones $[\sigma\tau]$.

Observación 4.1.7. La composición en esta categoría está bien definida. En particular, si $\mathcal{H}^{(0)} \xrightarrow{[\sigma]} \mathcal{K}^{(0)}$ y $\mathcal{K} \xrightarrow{[\tau]} \mathcal{L}$ son dos morfismos, entonces $\mathbf{r}(\tau) = \mathcal{K}^{(0)}$ implica que $\mathbf{d}(\sigma) = \mathbf{d}(\sigma^{-1}\mathcal{H}\sigma) \subseteq \mathcal{K}^{(0)}$, que a su vez juntos implican que $\mathbf{r}(\sigma\tau) = \mathbf{r}(\sigma) = \mathcal{H}^{(0)}$. Además, se tiene que

$$(\sigma\tau)^{-1}\mathcal{H}(\sigma\tau) = \tau^{-1}\sigma^{-1}\mathcal{H}\sigma\tau \subseteq \tau^{-1}\mathcal{K}\tau \subseteq \mathcal{L}.$$

De manera análoga a la construcción anterior, podemos definir la categoría de órbitas asociada a un grupoide *amplio*. Esta categoría considerará solamente los morfismos que provengan de bisecciones abiertas y compactas y familias cuyo espacio de unidades sea compacto. Las propiedades que se desarrollan a continuación todas valen suponiendo que se trabaja con la categoría de órbitas de un grupoide amplio y aclararemos, en caso de ser necesario, qué caso estamos considerando.

Observación 4.1.8. Si $\mathcal{G}$ pertenece a la familia $\mathcal{F}$ de subgrupoides en consideración, entonces $\mathcal{G}$ es un objeto final de $\text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$. En efecto, para cualquier subgrupoide abierto $\mathcal{H} \in \mathcal{F}$ se tiene que $\mathcal{H}^{(0)}$ define un morfismo $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$. Cualquier otra bisección σ tal que $\mathbf{r}(\sigma) = \mathcal{H}^{(0)}$ y $\sigma^{-1}\mathcal{H}\sigma \subseteq \mathcal{G}$, debe verificar que $\sigma^{-1}\mathcal{H}^{(0)} = \sigma^{-1} \subseteq \mathcal{G}$, con lo cual $[\sigma] = [\mathcal{H}^{(0)}]$ y este es el único morfismo $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$.

La categoría $\text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ presta grandes similitudes con $\mathcal{O}(\mathcal{G})$, sobre la cual definimos una topología de Grothendieck.

Proposición 4.1.9. Sean $\mathcal{G}$ un grupoide étale y $\mathcal{F}$ la familia de abiertos de $\mathcal{G}^{(0)}$. Entonces, la categoría $\text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ es isomorfa a $\mathcal{O}(\mathcal{G})$.

Demostración. Es claro que los objetos de ambas categorías son los mismos. Por otra parte, si $U, V \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ son abiertos, un morfismo $U \xrightarrow{[\sigma]} V$ en $\text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ es una clase de equivalencia de bisecciones tales que $\mathbf{r}(\sigma) = U$ y

$$\sigma^{-1}U\sigma = \sigma^{-1}\sigma = \mathbf{d}(\sigma) \subseteq V.$$

Veamos que la relación de equivalencia no identifica nada. En concreto, si $\sigma \sim \tau$ para alguna otra bisección, por definición $\sigma^{-1}\tau \subseteq V$ y $\tau^{-1}\sigma \subseteq V$. Basta ver, por simetría, que $\tau \subseteq \sigma$. En particular, si $g \in \tau$, entonces $\mathbf{r}(g) \in U = \mathbf{r}(\sigma)$, luego existe $h \in \sigma$ tal que $\mathbf{d}(h^{-1}) = \mathbf{r}(h) = \mathbf{r}(g)$. Por lo tanto, $h^{-1}g \in \sigma^{-1}\tau \subseteq V$ y entonces $h = g$. Esto dice que $\tau \subseteq \sigma$ y por

simetría vale la igualdad. Como la relación de equivalencia es la trivial, un morfismo $U \xrightarrow{[\sigma]} V$ en $\text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ es exactamente una bisección σ para la cual $\mathbf{r}(\sigma) = U$ y $\mathbf{d}(\sigma) \subseteq V$. Por otra parte, un morfismo $U \xrightarrow{\sigma^{-1}} V$ es una bisección de $\mathcal{G}$ que cumple que $\mathbf{d}(\sigma^{-1}) = U$ y $\mathbf{r}(\sigma^{-1}) \subseteq V$. Una tal bisección σ^{-1} proviene de exactamente una bisección σ de $\mathcal{G}$ para la cual $\mathbf{r}(\sigma) = U$ y $\mathbf{d}(\sigma) \subseteq V$. La composición en $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ de dos bisecciones $U \xrightarrow{\sigma^{-1}} V \xrightarrow{\tau^{-1}} W$ viene dada por $\tau^{-1}\sigma^{-1} = (\sigma\tau)^{-1}$ y, por lo tanto, $\sigma \rightarrow \sigma^{-1}$ define el isomorfismo de categorías. ■

La siguiente proposición ilustra que, al igual que en el caso de grupos, la categoría de órbitas puede incluirse en la categoría de $\mathcal{G}$ -espacios:

Proposición 4.1.10. Todo morfismo $\mathcal{H} \xrightarrow{[\sigma]} \mathcal{K}$ induce un morfismo de $\mathcal{G}$ -espacios $\psi_{[\sigma]}: \mathcal{G}/\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{K}$ dado por $\psi_{[\sigma]}(g\mathcal{H}) = gs_g\mathcal{K}$, donde $s_g \in \sigma$ es el único elemento para el cual $\mathbf{r}(s_g) = \mathbf{d}(g)$. En particular, dicho morfismo no depende del representante elegido.

Demostración. Considerando que $\mathbf{r}(\sigma) = \mathcal{H}^{(0)}$, obtenemos una función, continua por la propiedad universal del pullback, $\eta: \mathcal{G}^{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{G}^{\mathcal{H}}_{\mathbf{d}} \times_{\mathbf{r}} \sigma$ según el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id} & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 \mathcal{G}^{\mathcal{H}} & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{G}^{\mathcal{H}}_{\mathbf{d}} \times_{\mathbf{r}} \sigma & \xrightarrow{\text{pr}_1} & \mathcal{G}^{\mathcal{H}} \\
 & \searrow \mathbf{d} & \searrow \text{pr}_2 & \searrow \mathbf{d} & \\
 & \mathcal{H}^{(0)} & \xrightarrow{\mathbf{r}^{-1}} & \sigma & \xrightarrow{\mathbf{r}} \mathcal{H}^{(0)}
 \end{array}$$

Explícitamente, para cada $g \in \mathcal{G}$ tal que $\mathbf{d}(g) \in \mathcal{H}^{(0)}$, esta función vale $\eta(g) = (g, s_g)$, donde $s_g \in \sigma$ es el único elemento tal que $\mathbf{r}(s_g) = \mathbf{d}(g)$. La multiplicación $m: \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathcal{G}$ se restringe al abierto $\mathcal{G}^{\mathcal{H}}_{\mathbf{d}} \times_{\mathbf{r}} \sigma$ y la hipótesis de que $\sigma^{-1}\mathcal{H}\sigma \subseteq \mathcal{K}$ implica que si $(g, s) \in \mathcal{G}^{\mathcal{H}}_{\mathbf{d}} \times_{\mathbf{r}} \sigma$, entonces $\mathbf{d}(gs) = s^{-1}(g^{-1}g)s \in \mathcal{K}$. En particular la multiplicación se correstrige para dar una función $\mathcal{G}^{\mathcal{H}}_{\mathbf{d}} \times_{\mathbf{r}} \sigma \xrightarrow{m} \mathbf{d}^{-1}(\mathcal{K}^{(0)})$. La composición de η con esta función preserva la relación de equivalencia en el cociente y por ende existe una factorización según el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{G}^{\mathcal{H}} & \longrightarrow & \mathcal{G}^{\mathcal{H}}_{\mathbf{d}} \times_{\mathbf{r}} \sigma & \longrightarrow & \mathcal{G}^{\mathcal{K}} \\
 \pi_{\mathcal{H}} \downarrow & & & & \downarrow \pi_{\mathcal{K}} \\
 \mathcal{G}/\mathcal{H} & \xrightarrow{\psi_{[\sigma]}} & & & \mathcal{G}/\mathcal{K}
 \end{array}$$

Es directo verificar que $\psi_{[\sigma]}$ es compatible con la acción y su expresión es exactamente la del enunciado de la proposición. Resta ver que no depende del representante elegido. Sea τ una bisección de manera tal que $[\sigma] = [\tau]$. Esto significa que $\sigma^{-1}\tau \subseteq \mathcal{K}$. En particular, si $\mathbf{d}(g) \in \mathcal{H}^{(0)}$ y $s_g \in \sigma$, $t_g \in \tau$ son los únicos elementos tales que $\mathbf{r}(s_g) = \mathbf{d}(g) = \mathbf{r}(t_g)$, entonces $s_g^{-1}t_g \in \mathcal{K}$ y por lo tanto $s_g\mathcal{K} = t_g\mathcal{K}$. Esto implica que

$$\psi_{[\sigma]}(g\mathcal{H}) = gs_g\mathcal{K} = gt_g\mathcal{K} = \psi_{[\tau]}(g\mathcal{H}).$$

■

Observación 4.1.11. La asignación $[\sigma] \mapsto \psi_{[\sigma]}$ es funtorial. En primer lugar, la bisección trivial $\mathcal{H} \xrightarrow{[\mathcal{H}^{(0)}]} \mathcal{H}$ corresponde con la identidad $\mathcal{G}/\mathcal{H} \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Además, si $\mathcal{H}^{(0)} \xrightarrow{[\sigma]} \mathcal{K}^{(0)}$ y $\mathcal{K} \xrightarrow{[\tau]} \mathcal{L}$ son dos morfismos, entonces para cada $g \in \mathcal{H}^{(0)}$ se tiene que

$$\psi_{[\tau]} \circ \psi_{[\sigma]}(g\mathcal{H}) = \psi_{[\tau]}(gs_g\mathcal{K}) = gs_g t_{gs}\mathcal{K}.$$

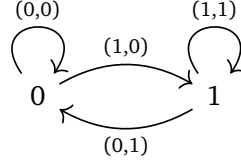
Aquí, $s_g \in \sigma$ es el único elemento tal que $\mathbf{r}(s_g) = \mathbf{d}(g)$ y $t_{gs} \in \tau$ es el único tal que $\mathbf{r}(t_{gs}) = \mathbf{d}(gs) = \mathbf{d}(s)$. En particular, $s_g t_{gs} \in \sigma\tau$ es el único en dicha bisección tal que $\mathbf{r}(s_g t_{gs}) = \mathbf{r}(s_g) = \mathbf{d}(g)$, de modo tal que

$$\psi_{[\tau]} \circ \psi_{[\sigma]}(g\mathcal{H}) = g(s_g t_{gs})\mathcal{K} = \psi_{[\sigma\tau]}(g).$$

Esto muestra que la asignación anterior es funtorial, de manera tal que podemos interpretar a $\text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ como una subcategoría (no necesariamente plena) de la categoría de $\mathcal{G}$ -espacios. Más aún, si $\mathcal{G}$ es étale, para cada subgrupoide abierto $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, como $\pi: \mathcal{G}^{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ y $\mathbf{r}: \mathcal{G}^{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ son homeomorfismos locales, entonces $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ es un $\mathcal{G}$ -espacio étale y por lo tanto podemos considerar a $\text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ como una subcategoría de los $\mathcal{G}$ -espacios étales.

El siguiente lema intenta responder a la pregunta de la plenitud: ¿es cierto que todo morfismo de $\mathcal{G}$ -espacios entre $\mathcal{G}/\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{K}$ es la forma anterior?

Observación 4.1.12. Consideremos el grupoide étale discreto $\mathcal{G} = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ cuyas unidades son $\mathcal{G}^{(0)} = \{0, 1\}$ y las funciones dominio y codominio las proyecciones, según se ve en el siguiente diagrama:



Consideremos $\mathcal{F}$ cualquier familia de subgrupoides abiertos que contenga al subgrupoide $\mathcal{G}^{(0)} = \{0, 1\}$. En particular, tomando $\mathcal{H} = \mathcal{K} = \mathcal{G}^{(0)}$, entonces $\mathcal{G}/\mathcal{H} = \mathcal{G}/\mathcal{K} = \mathcal{G}/\mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G}$. Veamos que hay morfismos de $\mathcal{G}$ -espacios $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ que no son de la forma $\psi_{[\sigma]}$ para ninguna bisección $\sigma \subseteq \mathcal{G}$. En particular, consideremos $\psi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ dado por $\psi(y, x) = (y, 0)$, para cada $(x, y) \in \mathcal{G}$. Es continua pues $\mathcal{G}$ tiene la topología discreta y es un morfismo de $\mathcal{G}$ -espacios pues si (z, y) y (y, x) son componibles entonces

$$\psi((z, y) \cdot (y, x)) = \psi(z, x) = (z, 0) = (z, y) \cdot (y, 0) = (z, y) \cdot \psi(y, x).$$

Sin embargo, de existir $\sigma \subseteq \mathcal{G}$ una bisección para la cual $\psi = \psi_{[\sigma]}$, debería ser que $\psi(x, y) = (x, y) \cdot s_{(x, y)}$, con $s_{(x, y)} \in \sigma$ y $\mathbf{r}(s_{(x, y)}) = y$. Sin embargo, esto implica necesariamente que $\mathbf{d}(s_{(x, y)}) = 0 = \mathbf{d}(\psi(x, y))$. No obstante, como $\mathbf{d}|_{\sigma}$ debiera ser biyectiva y $\mathbf{d}(\sigma) = \{0\}$, entonces σ tendría solo un elemento. Pero esta bisección debe tener elementos componibles a izquierda con el $(0, 0)$ y el $(0, 1)$ y por tanto al menos dos elementos. Esta contradicción implica que no puede existir tal σ y por lo tanto obtenemos un ejemplo para la cual no todo morfismo en $\text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ es de la forma $\psi_{[\sigma]}$.

Sin embargo, veamos que esto sí es cierto *localmente*:

Teorema 4.1.13. Sean $\mathcal{G}$ un grupoide étale, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ subgrupoides abiertos y $\psi: \mathcal{G}/\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{K}$ un morfismo de $\mathcal{G}$ -espacios. Entonces, para cada $g_0\mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ existe un entorno abierto $g_0\mathcal{H} \in W \subseteq \mathcal{G}/\mathcal{H}$ y $\sigma \subseteq \mathcal{G}$ una bisección tal que $\mathbf{d}(g_0) \in \mathbf{r}(\sigma)$, $\sigma^{-1}\mathcal{H}\sigma \subseteq \mathcal{K}$ y para todo $g\mathcal{H} \in W$ se tiene que $\psi(g\mathcal{H}) = gs_g\mathcal{K}$, con $s_g \in \sigma$ el único elemento tal que $\mathbf{r}(s_g) = \mathbf{d}(g)$.

Demostración. Como la proyección al cociente es un homeomorfismo local, para cada $x \in \mathcal{H}^{(0)}$ existe un entorno abierto $V \subseteq \mathcal{G}^{\mathcal{K}}$ tal que $\psi(x\mathcal{H}) \in \pi_{\mathcal{K}}(V)$ y $\pi_{\mathcal{K}}: V \rightarrow \pi_{\mathcal{K}}(V)$ es un homeomorfismo entre abiertos. Consideremos $\psi_{\mathcal{H}}: \mathcal{H}^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{K}$ la función continua asociada según la Proposición 4.1.4. En particular, $U_x = \psi_{\mathcal{H}}^{-1}(\pi_{\mathcal{K}}(V)) \subseteq \mathcal{H}^{(0)}$ es un abierto que contiene a x en donde podemos definir la siguiente función continua

$$s_x: U_x \xrightarrow{\psi_{\mathcal{H}}} \pi_{\mathcal{K}}(V) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{K}}^{-1}} V \hookrightarrow \mathcal{G}^{\mathcal{K}}.$$

En consecuencia, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} U_x & \xrightarrow{s_x} & \mathcal{G}^{\mathcal{K}} \\ \downarrow & \searrow \text{inc} & \swarrow \mathbf{r} \\ \mathcal{G}^{\mathcal{H}} & & \mathcal{G}^{(0)} \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\mathbf{r}} & \nwarrow \tilde{\mathbf{r}} \\ \mathcal{G}/\mathcal{H} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{G}/\mathcal{K} \end{array}$$

En particular, tenemos que $\mathbf{r} \circ s_x = \text{inc}$. Esto implica, como $\mathcal{G}$ es étale, $\mathbf{r}$ es un homeomorfismo local y s_x continua, que s es también un homeomorfismo local. Utilicemos esta construcción para la demostración del resultado. Dado $g_0\mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ con $g_0 \in \mathcal{G}^{\mathcal{H}} = \mathbf{d}^{-1}(\mathcal{H}^{(0)})$, podemos considerar $x = \mathbf{d}(g_0) \in \mathcal{H}^{(0)}$ y la función continua $s_x: U_x \rightarrow \mathcal{G}^{\mathcal{K}}$. Explícitamente, esta función viene dada, para cada $y \in U_x$, por un elemento $s_x(y) \in \mathcal{G}^{\mathcal{K}}$ tal que

$$\psi(y) = s_x(y)\mathcal{K}.$$

Consideremos un abierto $U \subseteq U_x$ tal que $x \in U$ y $s|_U: U \rightarrow s_x(U)$ sea un homeomorfismo entre abiertos. Como $\mathcal{G}$ es étale podemos tomar un abierto $V_0 \subseteq U \subseteq U_x$ de manera tal que $\mathbf{d}|_{s_x(V_0)}$ y $\mathbf{r}|_{s_x(V_0)}$ sean homeomorfismos. En particular, proponemos $\sigma = s_x(V_0)$ como candidato a bisección. Es claro que $\mathbf{d}(g_0) = x = \mathbf{r}(s_x(x)) \in \mathbf{r}(\sigma)$. Además, si $g_2^{-1}hg_1 \in \sigma^{-1}\mathcal{H}\sigma$, entonces $g_2^{-1}hg_1 \in \mathcal{K}$ si y solo si $g_2\mathcal{K} = hg_1\mathcal{K}$. Para ver esto, notemos que $\mathbf{d}(h) = \mathbf{r}(g_1) \in V_0$ y $\mathbf{r}(h) = \mathbf{r}(g_2) \in V_0$ implican que $s_x(r(g_1)) = g_1$ y $s_x(r(g_2)) = g_2$ y también:

$$hg_1\mathcal{K} = h\psi(\mathbf{r}(g_1)\mathcal{H}) = \psi(h\mathbf{r}(g_1)\mathcal{H}) = \psi(h\mathcal{H}).$$

Por otra parte $h\mathcal{H} = \mathbf{r}(h)\mathcal{H}$ y por ende

$$\psi(h\mathcal{H}) = \psi(\mathbf{r}(h)\mathcal{H}) = s_x(r(g_2))\mathcal{K} = g_2\mathcal{K},$$

demostrando que $\sigma^{-1}\mathcal{H}\sigma \subseteq \mathcal{K}$. Consideremos

$$W = \{g\mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H} : \mathbf{d}(g) \in V_0\} = \pi_{\mathcal{H}}(\mathbf{d}^{-1}(V_0))$$

que es abierto pues la proyección al cociente es abierta. Es claro que $g_0\mathcal{H} \in W$ pues $\mathbf{d}(g_0) = x \in V_0$. Más aún, si $g\mathcal{H} \in W$, entonces $\mathbf{d}(g) \in V_0$. En particular, tenemos que

$$\psi(g\mathcal{H}) = \psi(g\mathbf{d}(g)\mathcal{H}) = g\psi(\mathbf{d}(g)\mathcal{H}) = gs_x(\mathbf{d}(g))\mathcal{K}.$$

Por construcción $s_x(\mathbf{d}(g)) \in s_x(V_0) = \sigma$ es el único elemento tal que $\mathbf{r}(s_x(\mathbf{d}(g))) = \mathbf{d}(g)$, como queríamos. ■

4.2. La categoría lineal de un grupoide amplio

Fijemos $\mathcal{G}$ un grupoide amplio. La idea de esta sección es construir un funtor que a cada $\mathcal{G}$ -espacio étale Z le asigne una categoría ℓ -lineal $\mathcal{A}_{\mathcal{G} \curvearrowright Z}$, para ℓ un anillo conmutativo con unidad. Esto permitirá, usando la teoría desarrollada en el Apéndice B.2, construir un funtor definido sobre la subcategoría de $\mathcal{G}$ -espacios étales $\text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ que le asigne a cada $H \subseteq \mathcal{G}$ un espectro que coincida con la K -teoría del Álgebra de Steinberg $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{H})$.

Construcción 4.2.1. Sean ℓ un anillo conmutativo con unidad, $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y $Z \xrightarrow{\rho} \mathcal{G}^{(0)}$ un $\mathcal{G}$ -espacio étale. Definimos la categoría ℓ -lineal $\mathcal{A}_{\mathcal{G} \curvearrowright Z}$ cuyos objetos son abiertos compactos $U \subseteq Z$ tales que $\rho|_U: U \rightarrow \rho(U)$ es un homeomorfismo entre abiertos. Si denotamos $B^c(\mathcal{G})$ a la colección de bisecciones abiertas y compactas de $\mathcal{G}$ y CO a la colección de abiertos compactos de Z , entonces los morfismos entre $U, V \subseteq Z$ vienen dados por

$$\text{hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{G} \curvearrowright Z}}(U, V) := \text{span}_\ell \left\langle \chi_{\sigma_{\mathbf{d}} \times_\rho \tau} : \begin{array}{l} \rho(\tau) \subseteq \mathbf{d}(\sigma) \\ \tau \subseteq U \\ \sigma \tau \subseteq V \\ \sigma \in B^c(\mathcal{G}), \tau \in CO \end{array} \right\rangle \subseteq \ell^{\mathcal{G} \times Z},$$

donde $\sigma\tau$ es la imagen por la acción de $\sigma_{\mathbf{d}} \times_\rho \tau$ y $\mathcal{G} \times Z$ es el grupoide de transformación asociado a la acción de $\mathcal{G}$ en Z . Denotaremos $\chi_{\sigma\tau} = \chi_{\sigma_{\mathbf{d}} \times_\rho \tau}$ a cada función característica generadora del ℓ -módulo $\text{hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{G} \curvearrowright Z}}(U, V)$. Veamos cómo es la composición en esta categoría. Para eso, denotaremos

$$\ell[\mathcal{G} \times Z] := \text{span}_\ell \left\langle \bigcup_{U, V \in \text{obj}(\mathcal{A}_{\mathcal{G} \curvearrowright Z})} \text{hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{G} \curvearrowright Z}}(U, V) \right\rangle \subseteq \ell^{\mathcal{G} \times Z}.$$

Dados dos elementos del ℓ -módulo anterior $\psi, \varphi \in \ell[\mathcal{G} \times Z]$, podemos considerar su producto de *convolución* dado, para cada $(g, z) \in \mathcal{G} \times Z$, según:

$$(\psi * \varphi)(g, z) := \sum_{\mathbf{d}(h) = \mathbf{d}(g)} \psi(gh^{-1}, hz) \varphi(h, z) \in \ell^{\mathcal{G} \times Z}.$$

Veamos que el producto está bien definido. Es decir, veamos que para cada $(g, z) \in \mathcal{G} \times Z$ la suma anterior es finita. En primer lugar, notemos que tanto ψ como φ tienen soporte contenido en una unión finita de productos de bisecciones por abiertos compactos de la forma $\sigma_{\mathbf{d}} \times_\rho \tau$. Luego, existe a lo sumo un par (h, z) con $h \in \mathbf{d}^{-1}(\mathbf{d}(g))$ en cada producto $\sigma_{\mathbf{d}} \times_\rho \tau$ y por ende existen finitos $h \in \mathcal{G}$ tales que los términos de la suma anterior son no nulos. Esto dice que el producto de convolución resulta bien definido. El próximo paso es notar que la convolución

define una composición ℓ -lineal para morfismos en esta categoría. Para ello, consideremos dos morfismos correspondientes a funciones características

$$U \xrightarrow{\chi_{\sigma_2\tau_2}} V \xrightarrow{\chi_{\sigma_1\tau_1}} W.$$

Computemos su producto de convolución $\chi_{\sigma_1\tau_1} * \chi_{\sigma_2\tau_2}$. Para eso, sea $(g, z) \in \mathcal{G} \times Z$ y $h \in \mathcal{G}$ tal que $\mathbf{d}(h) = \mathbf{d}(g)$. En ese caso, resulta que

$$\chi_{\sigma_2\tau_2}(h, z) = \begin{cases} 1 & h \in \sigma_2, z \in \tau_2 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Como σ_2 es una bisección, esto implica que cada sumando de $\chi_{\sigma_1\tau_1} * \chi_{\sigma_2\tau_2}(g, z)$ tiene a lo sumo un término no nulo dado por

$$\chi_{\sigma_1\tau_1}(gh^{-1}, hz)\chi_{\sigma_2\tau_2}(h, z),$$

para algún $h \in \mathbf{d}^{-1}(\mathbf{d}(g))$ tal que $h \in \sigma_2$. Más aún, ese término es no nulo si y solo si

$$g \in \sigma_1 h \text{ y también } z \in (h^{-1}\tau_1) \cap \tau_2.$$

Es decir, $\chi_{\sigma_1\tau_1} * \chi_{\sigma_2\tau_2}(g, z) = 1$ si y solo si

$$(g, z) \in (\sigma_1\sigma_2)_{\mathbf{d}} \times_{\rho} (\sigma_2^{-1}\tau_1 \cap \tau_2)$$

y cero en otro caso y por lo tanto

$$\chi_{\sigma_1\tau_1} * \chi_{\sigma_2\tau_2} = \chi_{(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_2^{-1}\tau_1 \cap \tau_2)}.$$

Veamos que esta función característica es un morfismo bien definido $U \rightarrow W$. Como σ_1, σ_2 son bisecciones compactas y abiertas entonces $\sigma_1\sigma_2$ también lo es. A su vez, como V es Hausdorff y tanto $\sigma_2\tau_2 \subseteq V$ como τ_2 son compactos y abiertos, entonces $\tau_2 \cap (\sigma_2\tau_2) \subseteq V$ es compacto y abierto y por ende

$$\sigma_2^{-1}\tau_1 \cap \tau_2 = \sigma_2^{-1}(\tau_1 \cap \sigma_2\tau_2) \in CO$$

es un compacto abierto en Z . Además, este compacto abierto verifica que

$$\sigma_2^{-1}\tau_1 \cap \tau_2 \subseteq \tau_2 \subseteq U.$$

Por otra parte,

$$(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_2^{-1}\tau_1 \cap \tau_2) = (\sigma_1\tau_1) \cap (\sigma_1\sigma_2\tau_2) \subseteq W.$$

Finalmente, si $g \in \sigma_2, z \in \tau_1$ son tales que $g^{-1}z \in \sigma_2^{-1}\tau_1 \cap \tau_2$, entonces $\mathbf{d}(g) = \rho(g^{-1}z)$. Como $\rho(z) \in \rho(\tau_1) \subseteq \mathbf{d}(\sigma_1)$, existe $h \in \sigma_1$ tal que $\mathbf{d}(h) = \rho(z) = \mathbf{r}(g)$ y por lo tanto $\rho(z) = \mathbf{d}(hg) \in \mathbf{d}(\sigma_1\sigma_2)$. Esto muestra que

$$\rho(\sigma_2^{-1}\tau_1 \cap \tau_2) \subseteq \mathbf{d}(\sigma_1\sigma_2)$$

y entonces que se tiene un morfismo bien definido

$$U \xrightarrow{\chi_{(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_2^{-1}\tau_1 \cap \tau_2)}} W.$$

Extendiendo de manera ℓ -lineal, el producto de convolución define una composición:

$$*: \text{hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{G} \times Z}}(V, W) \times \text{hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{G} \times Z}}(U, V) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{G} \times Z}}(U, W).$$

Finalmente, es inmediato verifica que la identidad para un objeto $U \subseteq Z$ de esta categoría viene dada por la característica $\chi_{\rho(U)U}$.

Observar que el ℓ -módulo $\ell[\mathcal{G} \times Z]$ no resultará cerrado por producto de convolución en general, pero este sí será el caso si Z es Hausdorff. Además, si pedimos que Z sea totalmente desconexo, resulta una subálgebra del álgebra asociada al grupoide de transformación:

Proposición 4.2.2. Si Z es un $\mathcal{G}$ -espacio Hausdorff y totalmente desconexo, entonces $\ell[\mathcal{G} \times Z]$ es una subálgebra de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G} \times Z)$.

Demostración. En el caso donde Z es Hausdorff y totalmente desconexo, resulta que el grupoide de transformación $\mathcal{G} \times Z$ es amplio. Para cada morfismo $\chi_{\sigma, \tau}$ en $\mathcal{A}_{\mathcal{G} \times Z}$, es claro que $\sigma_d \times_\rho \tau \subseteq \mathcal{G} \times Z$ es una bisección compacta y abierta pues los homeomorfismos locales son estables por cambio de base. Por lo tanto $\chi_{\sigma, \tau} \in \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G} \times Z)$. Más aún, la expresión del producto de convolución coincide con aquella del álgebra de Steinberg para $\mathcal{G} \times Z$ y por lo tanto esto implica que $\ell[\mathcal{G} \times Z]$ es una subálgebra de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G} \times Z)$. ■

En particular, veamos que recupera el álgebra de Steinberg de $\mathcal{G}$ si consideramos la acción por conjugación sobre las unidades.

Observación 4.2.3. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio entonces la acción de conjugación induce un isomorfismo de grupoides para el cual

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \times \mathcal{G}^{(0)} &\xrightarrow{\cong} \mathcal{G} \\ (g, \mathbf{d}(g)) &\mapsto g \\ \sigma_d \times_{\text{Id}} \tau &\mapsto \sigma \cap \mathbf{d}^{-1}(\tau), \end{aligned}$$

si $\sigma \subseteq \mathcal{G}$ es una bisección y $\tau \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ un abierto compacto. Más aún, como $\mathcal{G}^{(0)}$ es Hausdorff y τ es compacto, entonces es clopen y por ende $\sigma \cap \mathbf{d}^{-1}(\tau)$ es abierto y compacto.

A través de este isomorfismo, podemos recuperar el álgebra del grupoide:

Proposición 4.2.4. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio y ℓ es un anillo conmutativo, entonces $\ell[\mathcal{G} \times \mathcal{G}^{(0)}] = \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G} \times \mathcal{G}^{(0)})$. En particular, $\ell[\mathcal{G} \times \mathcal{G}^{(0)}]$ es isomorfa al álgebra de Steinberg de $\mathcal{G}$.

Demostración. Dados dos abiertos compactos $U, V \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ tenemos que

$$\text{hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{G} \times \mathcal{G}^{(0)}}}(U, V) = \text{span}_\ell \left\langle \chi_{\sigma_d \times_\rho \tau} : \begin{array}{l} \tau \subseteq \mathbf{d}(\sigma) \\ \tau \subseteq U \\ \sigma \cap \tau \subseteq V \\ \sigma \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G}), \tau \in CO \end{array} \right\rangle.$$

Al considerar $\ell[\mathcal{G} \times \mathcal{G}^{(0)}]$, los conjuntos generadores cuantifican sobre todos los posibles abiertos compactos de $\mathcal{G}^{(0)}$. En particular, podemos desestimar la restricción en las bisecciones de estar contenidas en algún abierto compacto pues son, en sí mismas, abiertas y compactas. Luego, obtenemos que el álgebra está generada por:

$$\ell[\mathcal{G} \times \mathcal{G}^{(0)}] = \text{span}_\ell \left\langle \chi_{\sigma_d \times_\rho \tau} : \begin{array}{l} \tau \subseteq \mathbf{d}(\sigma) \\ \sigma \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G}), \tau \in CO \end{array} \right\rangle.$$

Por otra parte, una tal función característica generadora $\chi_{\sigma \mathbf{d} \times \rho \tau}$ corresponde por el isomorfismo de la Observación 4.2.3 inducido entre las álgebras de Steinberg con

$$\chi_{\sigma \cap \mathbf{d}^{-1}(\tau)} \in \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}).$$

Por lo tanto, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo, inducido por el isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} \text{span}_\ell \left\langle \chi_{\sigma \mathbf{d} \times \rho \tau} : \begin{array}{c} \tau \subseteq \mathbf{d}(\sigma) \\ \sigma \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G}), \tau \in CO \end{array} \right\rangle & \hookrightarrow & \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G} \ltimes \mathcal{G}^{(0)}) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{span}_\ell \left\langle \chi_{\sigma \cap \mathbf{d}^{-1}(\tau)} : \begin{array}{c} \tau \subseteq \mathbf{d}(\sigma) \\ \sigma \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G}), \tau \in CO \end{array} \right\rangle & \hookrightarrow & \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}) \end{array}$$

Considerando únicamente los abiertos compactos de la forma $\tau = \mathbf{d}(\sigma)$ para cada bisección σ , obtenemos que $\sigma \cap \mathbf{d}^{-1}(\mathbf{d}(\sigma)) = \sigma$ y por ende

$$\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}) = \text{span}_\ell \langle \chi_\sigma : \sigma \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G}) \rangle \subseteq \text{span}_\ell \left\langle \chi_{\sigma \cap \mathbf{d}^{-1}(\tau)} : \begin{array}{c} \tau \subseteq \mathbf{d}(\sigma) \\ \sigma \in \mathcal{B}^c(\mathcal{G}), \tau \in CO \end{array} \right\rangle \hookrightarrow \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}).$$

Esto dice que la flecha inferior en el diagrama es una igualdad y por lo tanto

$$\ell[\mathcal{G} \ltimes \mathcal{G}^{(0)}] = \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G} \ltimes \mathcal{G}^{(0)}) \cong \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}).$$

■

Veamos que la Construcción 4.2.1 define un funtor:

Proposición 4.2.5. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio, se tiene un funtor $\mathcal{A}$ que a cada $\mathcal{G}$ -espacio étale $Z \xrightarrow{\rho} \mathcal{G}^{(0)}$ le asigna la categoría ℓ -lineal $\mathcal{A}_{\mathcal{G} \cap Z}$.

Demostración. Veamos que un morfismo de $\mathcal{G}$ -espacios étales

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \xrightarrow{f} & Z_2 \\ \rho_1 \searrow & & \swarrow \rho_2 \\ & \mathcal{G}^{(0)} & \end{array}$$

define un funtor ℓ -lineal $\mathcal{A}(f): \mathcal{A}_{\mathcal{G} \cap Z_1} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{G} \cap Z_2}$. Como ρ_1 y ρ_2 son homeomorfismos locales y f es continua, entonces f es un homeomorfismo local. Si $U \subseteq Z_1$ es un abierto compacto en el cual ρ_1 es un homeomorfismo con su imagen, entonces $f|_U: U \rightarrow f(U)$ es abierta y biyectiva y por ende un homeomorfismo. Por lo tanto, $f(U) \subseteq Z_2$ es un abierto para el cual ρ_2 es un homeomorfismo con su imagen y por ende un objeto de $\mathcal{A}_{\mathcal{G} \cap Z_2}$. Esto define en objetos al funtor $\mathcal{A}(f)$. Por otra parte, f define un morfismo ℓ -lineal $f_*: \ell[\mathcal{G} \ltimes Z_1] \rightarrow \ell[\mathcal{G} \ltimes Z_2]$ dado por

$$f_*(\psi)(g, \tilde{z}) := \sum_{z \in f^{-1}(\tilde{z})} \psi(g, z),$$

que resulta una suma finita pues, como f es étale y Z_2 es T1 (por ser localmente Hausdorff), sus fibras son cerradas y discretas e intersectan en finitos puntos al soporte de ψ que es compacto. Veamos que f_* se restringe para dar una asignación

$$\mathcal{A}(f): \text{hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{G} \cap Z_1}}(U, V) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{G} \cap Z_2}}(f(U), f(V)).$$

En particular, la expresión de f_* en una función característica $\chi_{\sigma\tau} \in \text{hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{G} \cap \mathcal{Z}}}(U, V)$ tiene a lo sumo un sumando no nulo y, en particular:

$$\mathcal{A}(f)(\chi_{\sigma\tau}) = \chi_{\sigma f(\tau)} \in \text{hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{G} \cap \mathcal{Z}}}(f(U), f(V)),$$

donde $f(\tau)$ es un abierto compacto para el cual ρ_2 es una bisección. Resta ver que $\mathcal{A}(f)$ es multiplicativa; o lo que es lo mismo, functorial. En primer lugar, se tiene que $\mathcal{A}(f)(\chi_{\rho_1(U)U}) = \chi_{\rho_2(f(U))f(U)}$ y por ende preserva las identidades. Finalmente, veamos que preserva la composición para ciertos morfismos

$$U \xrightarrow{\chi_{\sigma_2\tau_2}} V \xrightarrow{\chi_{\sigma_1\tau_1}} W.$$

Como f se restringe a una biyección en $U \supseteq \tau_1, \sigma_2\tau_2$ preserva intersecciones y, como es morfismo de $\mathcal{G}$ -espacios, conmuta con la acción de $\mathcal{G}$. Esto implica que

$$f(\sigma_2^{-1}\tau_1 \cap \tau_2) = \sigma_2^{-1}f(\tau_1 \cap \sigma_2\tau_2) = \sigma_2^{-1}f(\tau_1) \cap f(\tau_2),$$

y por lo tanto vale la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(f)(\chi_{\sigma_2\tau_2} * \chi_{\sigma_1\tau_1}) &= f_*(\chi_{(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_2^{-1}\tau_1 \cap \tau_2)}) \\ &= \chi_{(\sigma_1\sigma_2)f(\sigma_2^{-1}\tau_1 \cap \tau_2)} \\ &= \chi_{(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_2^{-1}f(\tau_1) \cap f(\tau_2))} \\ &= \chi_{\sigma_1 f(\tau_1) * \chi_{\sigma_2 f(\tau_2)}} \\ &= \mathcal{A}(f)(\chi_{\sigma_1\tau_1}) * \mathcal{A}(f)(\chi_{\sigma_2\tau_2}). \end{aligned}$$

■

Recordando que la categoría de órbitas es una subcategoría de la categoría de $\mathcal{G}$ -espacios étales, obtenemos el functor buscado:

Corolario 4.2.6. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y $\text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ la categoría de órbitas para alguna familia de subgrupoides. Entonces, se tiene un functor

$$\mathcal{A}: \text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \rightarrow \ell\text{-cat}$$

dado en objetos por $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \mathcal{A}_{\mathcal{G} \cap \mathcal{G}/\mathcal{H}}$ y en morfismos según la Proposición 4.2.5.

Ya estamos listos, siguiendo la *receta* para computar la K -teoría de una categoría ℓ -lineal del Apéndice B.2, para obtener un functor de la categoría de órbitas que coincida con el espectro de K -teoría del álgebra de Steinberg para cada subgrupoide abierto.

Definición 4.2.7. Sean $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y $\mathcal{F}$ una familia de subgrupoides abiertos. El **espectro de K -teoría** asociado a $\mathcal{G}$ es el functor

$$\underline{\mathbb{K}}_\ell: \text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\mathcal{A}} \ell\text{-cat} \xrightarrow{\mathbb{K}_\ell} \text{Sp}.$$

4.2.1. Isomorfismos en K-teoría

Resulta que el funtor $\mathbb{K}_\ell$ induce equivalencias débiles lugar a lugar con el álgebra de Steinberg que, además, son homotópicamente coherentes. Seguiremos la exposición del artículo en preparación [CL26] y recomendamos consultar la exposición detallada de los resultados en la tesis de licenciatura de Ramiro Akris [Akr26] de la Universidad de Buenos Aires.

Observación 4.2.8. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide amplio y $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ es un subgrupoide abierto, se tiene un funtor

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^{(0)}} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A}_{\mathcal{G} \cap \mathcal{G}^{\mathcal{H}}}$$

que envía cada abierto compacto $U \subseteq \mathcal{H}^{(0)}$ a sí mismo, que es un abierto compacto de $\mathcal{G}^{\mathcal{H}}$ en donde el ancla r es la identidad. Además, si $\chi_{\sigma_d \times_r \tau}$ es un generador de $\text{hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^{(0)}}}(U, V)$, entonces su soporte está contenido en $\mathcal{H} \times \mathcal{H}^{(0)} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G}^{\mathcal{H}}$ y extendiendo por cero determina un morfismo $\chi_{\sigma_d \times_r \tau} \in \text{hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{G} \cap \mathcal{G}^{\mathcal{H}}}}(U, V)$.

Considerando que la proyección al cociente $\pi_{\mathcal{H}}: \mathcal{G}^{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ es un morfismo de $\mathcal{G}$ -espacios étale, podemos considerar la siguiente composición de funtores

$$p_{\mathcal{H}}: \mathcal{A}_{\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^{(0)}} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A}_{\mathcal{G} \cap \mathcal{G}^{\mathcal{H}}} \xrightarrow{\mathcal{A}(\pi_{\mathcal{H}})} \mathcal{A}_{\mathcal{G} \cap \mathcal{G}/\mathcal{H}}.$$

Para cada subgrupoide abierto $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, denotaremos como $\mathcal{A}_{\mathcal{H}} \hookrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{G} \cap \mathcal{G}/\mathcal{H}}$ a la subcategoría plena de objetos de la forma $\sigma\mathcal{H}$, donde $\mathbf{d}(\sigma) \subseteq \mathcal{H}^{(0)}$. Notar que el funtor $p_{\mathcal{H}}$ tiene como imagen de un objeto $U \subseteq \mathcal{H}^{(0)}$ al objeto $\pi(U) = U\mathcal{H}$. Por lo tanto, $p_{\mathcal{H}}$ se correstringe a la subcategoría $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$. El siguiente lema muestra cómo producir equivalencias débiles en los espectros de K-teoría de las categorías lineales de un grupoide amplio:

Lema 4.2.9 ([CL26, Lemma 2.4, 2.5]). Sean $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ un subgrupoide abierto. Vale que:

- La inclusión $\mathcal{A}_{\mathcal{H}} \hookrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{G} \cap \mathcal{G}/\mathcal{H}}$ induce una equivalencia débil $\mathbb{K}_\ell(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}) \rightarrow \mathbb{K}_\ell(\mathcal{A}_{\mathcal{G} \cap \mathcal{G}/\mathcal{H}})$.
- El funtor correstringido $p_{\mathcal{H}}|: \mathcal{A}_{\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^{(0)}} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ induce una equivalencia débil

$$\mathbb{K}_\ell(p_{\mathcal{H}}|): \mathbb{K}_\ell(\mathcal{A}_{\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^{(0)}}) \rightarrow \mathbb{K}_\ell(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}).$$

■

Observar que una categoría ℓ -lineal de un solo objeto es exactamente una ℓ -álgebra unitaria. Por ello, para cada subgrupoide abierto $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ tal que $\mathcal{H}^{(0)}$ sea compacto, podemos considerar la categoría ℓ -lineal de un solo objeto que representa al álgebra de Steinberg $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{H})$. Más aún, podemos definir un funtor

$$\epsilon_{\mathcal{H}}: \mathcal{A}_{\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^{(0)}} \rightarrow \mathcal{A}_\ell(\mathcal{H})$$

que en objetos es constantemente el único objeto de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{H})$ y en morfismos viene dado por la inclusión

$$\text{hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^{(0)}}}(U, V) \subseteq \ell[\mathcal{H} \times \mathcal{H}^{(0)}] \cong \mathcal{A}_\ell(\mathcal{H}),$$

donde el último isomorfismo es natural y viene dado por la Proposición 4.2.4.

Lema 4.2.10 ([CL26, Lemma 2.6]). Sea $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ un subgrupoide abierto. Entonces, se tiene una equivalencia débil $\mathbb{K}(\mathcal{A}_{\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^{(0)}}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathcal{A}_\ell(\mathcal{H}))$, que en el caso compacto viene inducida por el funtor $\epsilon_{\mathcal{H}}: \mathcal{A}_{\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^{(0)}} \rightarrow \mathcal{A}_\ell(\mathcal{H})$. ■

Juntando los lemas, se obtiene el resultado buscado:

Teorema 4.2.11 ([CL26, Theorem 2.2]). Sea $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ un subgrupoide abierto. Entonces hay una equivalencia débil entre $\mathbb{K}_\ell(\mathcal{H})$ y $\mathbb{K}(\mathcal{A}_\ell(\mathcal{H}))$ inducida por los siguientes morfismos:

$$\mathbb{K}(\mathcal{A}_\ell(\mathcal{H})) \xleftarrow[\sim]{\mathbb{K}(\epsilon_{\mathcal{H}})} \mathbb{K}(\mathcal{A}_{\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^{(0)}}) \xrightarrow[\sim]{\mathbb{K}(p_{\mathcal{H}})} \mathbb{K}_\ell(\mathcal{H})$$

■

Se puede ver que las equivalencias débiles del teorema anterior tienen cierto grado de coherencia homotópica. En concreto, en el artículo de Cortiñas y Li y en la tesis de Ramiro Akris se discute cierta naturalidad a menos de homotopía que muestra lo canónico de la equivalencia.

4.3. La conjetura de Farrell-Jones para grupoides amplios

Para concluir, reuniremos las piezas que hemos elaborado en este trabajo para formular la conjetura de Farrell-Jones en el contexto de grupoides amplios.

Construcción 4.3.1. Sean $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y $\mathcal{F}$ una familia de subgrupoides abiertos con unidades compactas. Considerando, por la Observación 4.1.8, que la categoría $\text{Or}(\mathcal{G})$ tiene objeto final $\mathcal{G}$, entonces la Observación 3.3.17 aplicada al funtor de la Definición 4.2.7 dice que la proyección

$$\text{pr}_*: \text{hocolim}_{\text{Or}(\mathcal{G})} \mathbb{K}_\ell \rightarrow \mathbb{K}_\ell(\mathcal{G})$$

induce isomorfismos en los grupos de homotopía. Consideremos $\iota_{\mathcal{F}}: \text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \hookrightarrow \text{Or}(\mathcal{G})$ la inclusión de la categoría de órbitas del grupoide *amplio* en la categoría de órbitas del grupoide $\mathcal{G}$ (como grupoide étale). Esta subcategoría no es necesariamente plena pues en $\text{Or}(\mathcal{G})$ no todos los morfismos provienen de bisecciones compactas. Esta inclusión induce, en vista de la Construcción 3.3.16, el siguiente mapa de ensamble de espectros:

$$\mathfrak{Ass}_{\mathcal{F}}: \text{hocolim}_{\text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F})} \iota_{\mathcal{F}}^* \mathbb{K}_\ell \rightarrow \text{hocolim}_{\text{Or}(\mathcal{G})} \mathbb{K}_\ell \xrightarrow{\text{pr}_*} \mathbb{K}_\ell(\mathcal{G}). \quad (4.3.2)$$

Conjetura 4.3.3 (Farrell-Jones para un grupoide amplio $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$). Sea $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y $\mathcal{F}$ una familia de subgrupoides abiertos con unidades compactas. La familia $\mathcal{F}$ satisface la conjetura de Farrell-Jones si el Mapa de Ensamble 4.3.2 asociado a $\mathcal{F}$ induce isomorfismos en los grupos de homotopía:

$$\mathfrak{Ass}_{\mathcal{F}}: \pi_* \left(\text{hocolim}_{\text{Or}(\mathcal{G}, \mathcal{F})} \iota_{\mathcal{F}}^* \mathbb{K}_\ell \right) \xrightarrow{\cong} K_*(\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})).$$

El desafío a futuro se concentra en la elección precisa de una familia que satisfaga la conjetura para todo grupoide amplio. En este sentido, no es evidente cuál es el análogo a los subgrupos virtualmente cíclicos en el caso de grupos. Un candidato a familia propuesto en [CL26] es aquella que contenga a todos los subgrupoides cuyos estabilizadores son subgrupos virtualmente cíclicos de los estabilizadores del grupoide. Esto sugiere tener presente la estructura local de un grupoide amplio propio y Hausdorff que implica nuestro Teorema 1.2.6.

Apéndice A

Topología general

A.1. Espacios de Stone

En este apéndice introduciremos algunas propiedades básicas y mencionaremos resultados relevantes para el estudio de grupoides amplios y sus espacios de unidades.

Definición A.1.1. Un espacio topológico X se dice **espacio de Stone** si es compacto, Hausdorff y totalmente desconexo.

Algunos ejemplos remarcables de espacios de Stone son, por ejemplo, los productos arbitrarios de espacios discretos finitos, el espacio de Cantor o los enteros p -ádicos para un primo $p \in \mathbb{Z}$. Los espacios de Stone son ampliamente estudiados en el marco de las álgebras de Boole; es decir, los reticulados distributivos. En particular, un resultado fundamental del área es el siguiente:

Teorema A.1.2 ([Joh82, Chapter II, Section 4.4]). La categoría de espacios de Stone junto a las funciones continuas es equivalente a la categoría opuesta de álgebras de Boole.

A continuación, probaremos una caracterización para espacios de Stone que podremos generalizar para el caso de espacios no necesariamente compactos, sino solo localmente compactos.

Lema A.1.3. Sean X un espacio compacto y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia de subespacios cerrados, cerrada por intersecciones finitas. Entonces para cada abierto $U \subseteq X$ tal que

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subseteq U,$$

existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq U$.

Demostración. En caso de que no sea cierto, entonces para cada $F \in \mathcal{F}$ vale que $F \cap U^c \neq \emptyset$. Como la familia $\mathcal{F}$ es cerrada por intersecciones finitas, nuestra suposición dice que para cada $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$, vale que

$$\emptyset \neq \left(\bigcap_{i=1}^n F_i \right) \cap U^c = \left(\bigcap_{i=1}^n F_i \cap U^c \right).$$

Esto significa que la familia de cerrados $\{F \cap U^c \mid F \in \mathcal{F}\}$ tiene la propiedad de intersección finita y, por la compacidad de X , tenemos que

$$\left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \right) \cap U^c \neq \emptyset.$$

En otras palabras, $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \not\subseteq U$, lo cual contradice la hipótesis inicial. ■

Veamos, ahora sí, la caracterización:

Teorema A.1.4. Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff. Son equivalentes:

1. X es un espacio de Stone.
2. X es totalmente separado; es decir, para todo par de puntos existe un clopen que contiene a uno de los puntos y no al otro.
3. X tiene una base de abiertos cerrados.

Demostración. Supongamos que X es un espacio de Stone. Para cada $x \in X$, denotaremos como $\mathcal{F}_x$ a la familia de clopens que contienen a x . Es inmediato ver que $\mathcal{F}_x$ es una familia de cerrados cerrada por intersecciones finitas. Por otra parte, notemos que X es totalmente separado si y solo si para cada $x \in X$ vale que

$$Q_x := \bigcap_{C \in \mathcal{F}_x} C = \{x\}.$$

Fijemos $x \in X$ y usemos el lema anterior para probar esta igualdad. Como X es totalmente desconexo, resulta que $Q_x \subseteq X$ es totalmente desconexo. Supongamos que Q_x tiene al menos dos puntos, y por lo tanto existen $F_1, F_2 \subseteq Q_x$ cerrados en Q_x , disjuntos y no vacíos tales que $F_1 \sqcup F_2 = Q_x$. Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $x \in F_1$. Como $Q_x \subseteq X$ es cerrado, resulta que F_1 y F_2 son cerrados en X y por ende compactos, de manera tal que existen $G_1, G_2 \subseteq X$ abiertos disjuntos tales que $F_1 \subseteq G_1$ y $F_2 \subseteq G_2$. En particular, se tiene que

$$Q_x = \bigcap_{C \in \mathcal{F}_x} C \subseteq G_1 \sqcup G_2$$

y por el Lema A.1.3 existe $C \in \mathcal{F}_x$, un clopen que contiene a x , para el cual $C \subseteq G_1 \sqcup G_2$. Como C es abierto en X , entonces resulta que $x \in C \cap G_1 \subseteq X$ es también abierto en X . Además, como G_1 y G_2 son disjuntos se tiene que

$$C \cap G_1 = C \cap (X \setminus G_2),$$

y por lo tanto $C \cap G_1 \subseteq X$ es clopen en X y contiene a x . Esto implica que $Q_x \subseteq C \cap G_1 \subseteq G_1$ y por lo tanto que $Q_x \subseteq F_1$; contradiciendo el hecho de que F_2 es no vacío. Por ende, necesariamente debemos tener que $x \in Q_x$ es totalmente desconexo y conexo, y por lo tanto tiene un solo punto:

$$Q_x = \bigcap_{C \in \mathcal{F}_x} C = \{x\}.$$

Supongamos ahora que X es totalmente separado. Para ver que X tiene una base de abiertos clopens, basta ver que para todo entorno abierto $x \in U \subseteq X$, existe un clopen $x \in C$ tal que $C \subseteq U$. En particular, como X es totalmente separado, para cada $x \in X$ debe ser que $Q_x = \{x\}$ y por lo tanto, para todo entorno abierto $x \in U$, vale que $Q_x \subseteq U$. Finalmente, el Lema A.1.3 implica que existe algún clopen $x \in C$ tal que $C \subseteq U$, probando lo que queríamos. Resta ver que si X tiene una base de clopens entonces es totalmente desconexo. Esta última implicación vale sin hipótesis de compacidad o de separación sobre el espacio X . Para eso, supongamos que $A \subseteq X$ es un conexo no vacío. Supongamos que A admite dos puntos $x, y \in A$ distintos. En ese caso, si $x \in C$ es un clopen que no contiene a y , entonces $A \cap C$ y $A \cap (X \setminus C)$ cubren disjuntamente a A , y son no vacíos pues $x \in A \cap C$, $y \in A \cap (X \setminus C)$. Esto contradice la conexión de A y por ende muestra que los únicos conexos de X son los puntos; i.e., que es totalmente desconexo. ■

De este resultado se obtiene la generalización para espacios localmente compactos y Hausdorff que usaremos en el marco de la teoría de grupoides amplios:

Proposición A.1.5. Sea X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff. Entonces X es totalmente desconexo si y solo si tiene una base de abiertos compactos.

Demostración. En caso de que X admita una base de abiertos compactos, y como X es Hausdorff, entonces admite una base de clopens. En consecuencia, la misma demostración de la última implicación en el Teorema A.1.4 muestra que X es totalmente desconexo. Supongamos ahora que X es totalmente desconexo y sea $x \in U \subseteq X$ un punto junto a un entorno abierto. Basta ver que existe un compacto abierto $x \in C \subseteq U$, lo cual demuestra por la arbitrariedad del entorno que X tiene una base de compactos y abiertos. Como X es localmente compacto y Hausdorff, existe $V \subseteq X$ un abierto tal que $\bar{V}$ es compacto y $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$. Como X es totalmente desconexo, entonces $\bar{V}$ también es totalmente desconexo y por lo tanto tiene una base de clopens, por el Teorema A.1.4. En particular, como $V \subseteq \bar{V}$ es abierto, existe un clopen C en $\bar{V}$ tal que $x \in C \subseteq V \subseteq \bar{V}$. Como $V \subseteq X$ es abierto, entonces $C \subseteq V \subseteq X$ es abierto en X y como $\bar{V} \subseteq X$ es cerrado, entonces $C \subseteq \bar{V} \subseteq X$ es cerrado en X . Esto dice que $x \in C \subseteq \bar{V} \subseteq U$ es clopen en X . Más aún, como $\bar{V}$ es compacto y $C \subseteq \bar{V}$ es cerrado, entonces también es compacto y por lo tanto obtuvimos un entorno $x \in C \subseteq U$ abierto y compacto, como queríamos. ■

Por completitud, enunciamos el siguiente resultado que clasifica, a partir de algunos de los ejemplos antes mencionados, todos los espacios de Stone:

Teorema A.1.6 ([RZ10, Theorem 1.1.12]). Un espacio topológico X es un espacio de Stone si y solo si existen

- una categoría cofiltrante I ,
- un funtor $D: I \rightarrow \mathbf{Top}$ tal que D_i es un espacio discreto y finito para todo $i \in I$,
- un homeomorfismo de espacios topológicos $X \cong \lim_{i \in I} D_i$.

Los espacios que son límites cofiltrantes de espacios discretos finitos también son conocidos en la literatura como **espacios profinitos**. El teorema anterior muestra que los espacios profinitos son exactamente los espacios de Stone.

A.2. La categoría conveniente

En este apéndice recopilaremos algunos resultados básicos sobre la categoría de espacios topológicos compactamente generados, introducida por Steenrod [Ste67]. A diferencia de la categoría usual de espacios topológicos, esta subcategoría resulta cartesiana cerrada; es decir, es posible darle una estructura interna al espacio de funciones continuas de forma tal que la ley exponencial valga en todos los objetos. A su vez, la mayoría de las construcciones coinciden con las usuales, de forma tal que esta categoría resultará ser una *categoría conveniente* para los propósitos de la topología algebraica y teoría de homotopía. Seguiremos la exposición de [Str09].

Definición A.2.1. Sea X un espacio topológico. Un subespacio $C \subseteq X$ es *k -cerrado* si $f^{-1}(C)$ es cerrado para cada función continua $f: K \rightarrow X$ de algún espacio compacto K . Diremos que un subespacio es *k -abierto* si es el complemento de un k -cerrado.

Es directo verificar que la colección de k -abiertos de X conforman una topología para X . Denotamos como kX a dicho espacio topológico asociado. Es claro que todo subespacio abierto (resp. cerrado) es k -abierto (resp. k -cerrado), de forma tal que la identidad induce una función continua:

$$\varepsilon_X: kX \rightarrow X.$$

Definición A.2.2. Decimos que un espacio topológico X es *compactamente generado* ε_X es un homeomorfismo. Equivalentemente, si todo k -abierto es abierto.

Veamos que los espacios compactamente generados contienen a una gran familia de espacios relevantes:

Proposición A.2.3. Todo espacio X localmente compacto y Hausdorff es compactamente generado.

Demostración. Sea $C \subseteq X$ un subespacio k -cerrado y $x \in \overline{C}$, veamos que $x \in C$. Como X es localmente compacto y Hausdorff, existe $U \subseteq X$ abierto tal que $\overline{U}$ es compacto y $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq X$. Veamos que $x \in \overline{U \cap C}$. Si $x \in V$ es cualquier entorno abierto, entonces $x \in V \cap U$ es un entorno y, como $x \in \overline{C}$, se tiene que $V \cap (U \cap C) \neq \emptyset$. Luego, se sigue que $x \in \overline{U \cap C}$. Considerando $j: \overline{U} \hookrightarrow X$, se tiene que $\overline{U \cap C} = j^{-1}(C)$ es cerrado en $\overline{U}$ y por ende $x \in \overline{U \cap C} = U \cap C$, como queríamos. ■

Proposición A.2.4. Todo CW-complejo es compactamente generado.

Demostración. Como todo CW-complejo es un colímite de discos de dimensión finita, se sigue que un subespacio de un CW-complejo X es cerrado si y solo si la restricción a cada disco es cerrada. Luego, para ver si un k -cerrado $C \subseteq X$ es cerrado, basta verificar que $C \cap D$ es cerrado para cada disco compacto $D \subseteq X$. Esto resulta cierto considerando la preimagen de C por la inclusión $D \hookrightarrow X$. ■

Denotamos $\mathfrak{Top} \hookrightarrow \mathbf{Top}$ a la subcategoría plena de los espacios topológicos compactamente generados. Con esta notación, es claro que hay un funtor $k: \mathbf{Top} \rightarrow \mathfrak{Top}$. La asignación $\varepsilon_X: kX \rightarrow X$ define una transformación natural que de hecho es la co-unidad de la siguiente adjunción:

Proposición A.2.5. El funtor $k: \mathbf{Top} \rightarrow \mathfrak{Top}$ es adjunto a derecha de la inclusión.

Demostración. Basta verificar que si X es compactamente generado e Y es cualquier espacio topológico, entonces una función $f: X \rightarrow Y$ es continua si y solo si es continua como función $f: X \rightarrow kY$. Como $\varepsilon_Y: kY \rightarrow Y$ es continua, entonces si $f: X \rightarrow kY$ es continua se sigue componiendo que lo es como función $f: X \rightarrow Y$. Veamos la otra implicación. Si $C \subseteq Y$ es k -cerrado, debemos ver que $f^{-1}(C) \subseteq X$ es cerrado. Si K es cualquier espacio compacto y $\alpha: K \rightarrow X$ es una función continua, entonces $f \circ \alpha: K \rightarrow Y$ es continua y por tanto $(f \circ \alpha)^{-1}(C) \subseteq K$ es cerrado. Esto muestra que $f^{-1}(C)$ es k -cerrado en X y, como X es compactamente generado, de hecho es cerrado. ■

De lo anterior se sigue el siguiente resultado de interés:

Corolario A.2.6. El espacio clasificante de cualquier categoría pequeña es compactamente generado.

Veamos algunas propiedades de la categoría de espacios compactamente generados:

Proposición A.2.7 ([Str09, Proposition 2.1, 2.2]). Se verifican las siguientes propiedades:

1. Si X es compactamente generado y $q: X \rightarrow Y$ es una función cociente, entonces Y es compactamente generado.
2. Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de espacios compactamente generados, entonces la unión disjunta $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ es compactamente generada.

■

La proposición anterior nos dice que la categoría $\mathfrak{Top}$ tiene todos los colímites y se calculan como en la categoría de espacios topológicos. Por otra parte, no es cierto en general que el producto categórico de dos espacios compactamente generados coincida con el producto usual de espacios topológicos.

Proposición A.2.8 ([Str09, Prop. 2.4, Prop. 2.6]). Si $(X_i)_{i \in I}$ es una familia de espacios compactamente generados, entonces

$$k\left(\prod_{i \in I} X_i\right) \xrightarrow{\pi_i} X_i, \quad \forall i \in I$$

tienen la propiedad universal del producto en $\mathfrak{Top}$. Más aún, si X es compactamente generado e Y es localmente compacto y Hausdorff, entonces vale que

$$k(X \times Y) = X \times Y.$$

Denotamos usualmente como $X \times_k Y = k(X \times Y)$ al producto binario en la categoría de espacios compactamente generados. Las hipótesis sobre esta categoría permiten que ciertas propiedades que en la categoría usual de espacios no valen con total generalidad resulten ciertas:

Proposición A.2.9. Si $q: X_1 \rightarrow Y_1$ y $p: X_2 \rightarrow Y_2$ son cocientes entre espacios compactamente generados, entonces $q \times p: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ es cociente.

Veamos que la *categoría conveniente* admite una estructura interna en su espacio de morfismos que hace de ella cartesiana cerrada:

Construcción A.2.10. Sean X e Y espacios compactamente generados. Para cualquier función continua $f : K \rightarrow X$ de un espacio compacto K , definimos

$$W(f, K, U) := \{\alpha : X \rightarrow Y \mid \alpha(f(K)) \subseteq U\}.$$

Estos conjuntos forman una sub-base, cuya topología generada en $\mathbf{Top}(X, Y)$ es la compacto-abierta. A su imagen por $k : \mathbf{Top} \rightarrow \mathfrak{Top}$ la denominamos topología *k -compacto abierta* y la denotamos por $\mathfrak{Top}(X, Y) = k(\mathbf{Top}(X, Y))$.

Proposición A.2.11 ([Str09, Prop. 2.12]). Dados X, Y, Z espacios compactamente generados, se tiene una biyección natural:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Top}(X \times_k Y, Z) &\cong \mathfrak{Top}(X, \mathfrak{Top}(Y, Z)) \\ f &\mapsto (x \mapsto f(x, -)) \end{aligned}$$

En particular, la categoría de espacios compactamente generados es cartesiana cerrada.

Denotando $\mathfrak{Top}_*$ a la categoría de espacios topológicos compactamente generados punteados, se tiene un funtor olvido $\mathfrak{Top}_* \rightarrow \mathfrak{Top}$. A su vez, en la dirección opuesta podemos asignarle a cada espacio topológico compactamente generado X , un espacio punteado $X_+ = X \sqcup \{*\}$ con un objeto *libre*. Es directo verificar que el límite de un diagrama en la categoría punteada coincide con el límite en la categoría $\mathfrak{Top}$, con punto base el inducido en cada componente del producto por el punto base de cada objeto del diagrama. Para los colímites, es necesario tomar en cuenta la misma sutileza que ocurre en espacios topológicos usuales. En concreto, los límites sobre categorías indexantes conexas (pushouts, coegalizadores, cocientes, etc...) coinciden con los de $\mathfrak{Top}$, nuevamente con el punto base inducido por cada componente. Sin embargo, el coproducto categórico en $\mathfrak{Top}_*$ de dos objetos X, Y es el *producto wedge*:

$$X \vee Y = (X \sqcup Y) / (\{*_X\} \sim \{*_Y\}).$$

Las inclusiones canónicas $X \hookrightarrow X \vee Y$ y $Y \hookrightarrow X \vee Y$ inducen, por la propiedad universal del coproducto, una función continua $X \vee Y \rightarrow X \times_k Y$. Otra ventaja de trabajar en esta clase de espacios se pone de manifiesto en la siguiente proposición:

Proposición A.2.12 ([Str09, Prop. 4.9]). Las funciones continuas $X \hookrightarrow X \vee Y \hookleftarrow Y$ y $X \vee Y \hookrightarrow X \times_k Y$ son subespacios cerrados.

Lo anterior permite definir una estructura monoidal para espacios compactamente generados punteados:

Definición A.2.13. Sean X e Y espacios compactamente generados punteados. El *producto smash* $X \wedge Y$ es el espacio cociente

$$X \wedge Y := (X \times_k Y) / (X \vee Y).$$

Es directo verificar que la definición anterior es funtorial en ambas variables y asociativa. Para cada par de espacios punteados X, Y , el subespacio $\mathfrak{Top}_*(X, Y) \subseteq \mathfrak{Top}(X, Y)$ es otra vez punteado con la función constantemente $*$. Además, recuperamos la ley exponencial para espacios topológicos compactamente generados y punteados:

Proposición A.2.14 ([Str09, Prop. 5.7]). Dados X, Y, Z espacios compactamente generados y punteados, se tiene una biyección natural:

$$\mathfrak{Top}_*(X \wedge Y, Z) \cong \mathfrak{Top}_*(X, \mathfrak{Top}_*(Y, Z)).$$

Finalmente, mediante el producto smash se obtiene una definición más cómoda para la suspensión de un espacio topológico:

Definición A.2.15. La *suspensión* es el funtor $\Sigma = - \wedge S^1: \mathfrak{Top}_* \rightarrow \mathfrak{Top}_*$.

A su vez, se define su adjunto a derecha:

Definición A.2.16. El *espacio de loops* es el funtor $\Omega = \mathfrak{Top}_*(S^1, -): \mathfrak{Top}_* \rightarrow \mathfrak{Top}_*$.

De la ley exponencial, se sigue directamente que estos funtores conforman una adjunción:

Corolario A.2.17. La suspensión es adjunto a izquierda del espacio de loops

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\Sigma} & \\ \mathfrak{Top}_* & & \mathfrak{Top}_* \\ & \xleftarrow{\Omega} & \end{array}$$

Apéndice B

K-teoría algebraica

K-theory is an invariant of rings categories.

THOMAS NIKOLAUS, 2025
CIMPA School

B.1. Un poco de historia

La K-teoría algebraica tiene un doble origen, que refleja su posición en la frontera entre la geometría, el álgebra y la topología. Su primera manifestación proviene de la geometría algebraica, en los trabajos de Alexander Grothendieck [Gro57] sobre la reformulación del teorema de Riemann–Roch. En ese contexto, Grothendieck introdujo un grupo [BS58] asociado a una categoría de objetos geométricos, con el propósito de sistematizar las relaciones entre ellos. En el caso particular de un anillo con unidad R , este grupo¹ consiste en el $K_0(R)$, hoy conocido como **grupo de Grothendieck**, que se define como la completación a grupo del monoide de clases de isomorfismo de los R -módulos proyectivos finitamente generados bajo la operación de suma directa.

De manera independiente, en la década de 1960 la Topología Algebraica dio lugar a una segunda manifestación de la teoría, en el contexto del estudio de la así llamada **torsión de Whitehead**, que codifica la obstrucción a que una equivalencia homotópica entre CW-complejos finitos sea una equivalencia simple. Whitehead definió la torsión homónima en su artículo [Whi50] como un elemento de un grupo $Wh(\pi)$, cuya construcción solo depende del anillo de grupo $\mathbb{Z}[\pi]$, donde π es el grupo fundamental del CW-complejo en cuestión. El caso particular 3.4.2 de la conjetura de Farrell-Jones, estudiada en el presente trabajo, predice que el grupo $Wh(\pi)$, actualmente conocido como **grupo de Whitehead**, es trivial cuando π es libre de torsión. Milnor introdujo en [Mil66] una construcción general del grupo de Whitehead, como un cociente del primer grupo de K-teoría algebraica $K_1(R) := GL(R)/E(R)$, donde $E(R)$ es el subgrupo del grupo general lineal generado por matrices elementales sobre un anillo R .

¹En su trabajo, Grothendieck eligió la letra K por *Klassen*: clases, en alemán. A aquella arbitraria decisión se remonta el nombre que recibe toda esta teoría.

La conexión formal entre estas dos construcciones comenzó a decantar en 1962 con el trabajo de Bass y Schanuel [BS62], quienes definieron el grupo de K -teoría en grado 0 relativo a un morfismo de anillos. Posteriormente, Bass consideró en [Bas64] una noción análoga de grupo relativo a la proyección al cociente por un ideal del anillo en grado 1. En efecto, uno de sus aportes fundacionales fue probar que, para R un anillo conmutativo e I un ideal bilátero, el K_0 y el K_1 están vinculados mediante una sucesión exacta de seis términos que contiene los grupos relativos:

$$K_1(R, I) \rightarrow K_1(R) \rightarrow K_1(R/I) \rightarrow K_0(R, I) \rightarrow K_0(R) \rightarrow K_0(R/I).$$

Inspirado en sus resultados con Heller y Swan [BHS64], Bass definió los grupos de K -teoría en grados negativos y prolongó a la derecha la sucesión anterior a una sucesión exacta larga.

En la década de 1970, los trabajos de Daniel Quillen [Qui06] proporcionaron una definición unificada de la K -teoría en grados superiores. Su trabajo no solo fue fundacional para el área de K -teoría algebraica, sino que también le mereció la medalla Fields en 1978. En primer lugar, Quillen desarrolló la denominada **construcción +**, que, aplicada al espacio clasificante del grupo general lineal $GL(R)$, da lugar a los grupos superiores de K -teoría:

$$K_i(R) = \pi_i(BGL(R)^+).$$

Si bien históricamente la construcción + tuvo un impacto inmediato al unificar los desarrollos previos y conectar la K -teoría con la topología algebraica, una de las ideas más profundas de Quillen fue extender el dominio de la teoría más allá de los anillos. Quillen definió la K -teoría superior de una *categoría exacta*, es decir, de una subcategoría plena $\mathcal{A}$ de una categoría abeliana cerrada bajo extensiones. Para ello formuló la denominada **construcción Q**, para la cual introdujo una categoría auxiliar $Q\mathcal{A}$ y definió

$$K_n(\mathcal{A}) = \pi_{n-1}BQ\mathcal{A}.$$

La equivalencia $Q = +$ fue demostrada por el mismo Quillen, pero recién publicada por Grayson en 1976 en [Gra06]. Con ello, la K -teoría dejó de ser una colección de definiciones ad-hoc para convertirse en un único marco homotópico que abarca a todas las anteriores. Originalmente, la motivación para obtener una tal versión general de los grupos de K -teoría fue fundada en unificar ciertas sucesiones exactas largas de carácter homológico. Con las construcciones de Quillen, estas sucesiones exactas surgieron como una consecuencia natural de las conocidas sucesiones exactas largas en topología. En esta dirección, el profesor André Henriques de la Universidad de Oxford nos ofrece el siguiente *slogan*:

La teoría de homotopía es la madre de todas las sucesiones exactas largas.

La ventaja técnica de los espectros

El logro de Daniel Quillen fue demostrar que la K -teoría algebraica está representada en homotopía por un espacio clasificante. Esta representación plantea inmediatamente la pregunta fundamental: ¿Es este espacio *infinitamente delooperable*? Responder afirmativamente

significaría que la K-teoría es, por naturaleza, un objeto de la teoría de la homotopía estable, lo cual evidenciaría su vínculo con las teorías de (co)homología discutidas en el Capítulo 3. Este vínculo resulta la justificación primordial para estudiar el invariante no como una mera sucesión de grupos sino como un único y objeto coherente: el espectro de K-teoría.

En su trabajo [Bas68] de 1966, Bass utilizó el formalismo de funtores *contraídos* para definir los grupos de K-teoría negativa, extendiendo el trabajo de Quillen. Ya por esos años, resultaba un hecho conocido que para cada anillo R , el espacio $BGL(R)^+$ es un espacio infinitamente delooperable, en el sentido visto en el Capítulo 3. De hecho, poco tiempo después del trabajo de Bass, en 1971 Gersten publicó una comunicación [Ger72] en la que describe el Ω -espectro de la K-teoría asociado al espacio de loops infinito $BGL(R)^+$ para un anillo y muestra que sus grupos de homotopía negativos coinciden con los de Bass. Fue hacia el año 1982, con el trabajo [Tho82] de Thomason, que la K-teoría algebraica tomaría el lugar de un invariante reconocido para un amplio dominio de categorías pequeñas. Según Thomason:

la K-teoría algebraica es el proceso de considerar una categoría pequeña dotada de una suma directa, completar a grupo su estructura monoidal inducida en el espacio clasificante, y tomar los grupos de homotopía correspondientes.

Gracias a Thomason, es posible construir el **espectro de K-teoría conectiva** como un funtor $\mathbb{K}_{\text{conn}} : \mathbf{Add-cat} \rightarrow \mathbf{Sp}$ que a cada categoría aditiva $\mathcal{A}$ le asigna un espectro conectivo que recupera en grados no negativos la K-teoría de Quillen $K_i(\mathcal{A}) = \pi_i(\mathbb{K}_{\text{conn}}(\mathcal{A}))$, para todo $i \geq 0$.

Posterior a Thomason, y con el espíritu del trabajo de Bass y de Gersten, surgieron dos trabajos que extendieron la K-teoría algebraica para categorías aditivas a una versión no conectiva. En primer lugar, Pedersen y Weibel presentan en su artículo [PW06] de 2006 una construcción, basada principalmente en el trabajo de Thomason, del primer *delooping* no conectivo de la K-teoría algebraica para categorías aditivas. En definitiva, construyen un funtor $\mathbb{K} : \mathbf{Add-cat} \rightarrow \mathbf{Sp}$ cuyos grupos de homotopía no negativos son los de la K-teoría de Quillen, y cuyos grupos negativos recuperan los de Bass en el caso de la K-teoría de un anillo. En segundo lugar, en 2013 en su trabajo [LS13], Lück y Steimle retomaron la idea original de funtores contraídos de Bass y lograron otra construcción del espectro no conectivo de la K-teoría. Esta construcción funciona para cualquier funtor de categorías aditivas con valores en Spectra y, aplicado al funtor $\mathbb{K}_{\text{conn}}$, produce el **espectro de K-teoría no conectivo**:

$$\mathbb{K}_{\text{conn}}[\infty] : \mathbf{Add-cat} \rightarrow \mathbf{Sp}. \quad (\text{B.1.1})$$

La ventaja de su construcción es que tal funtor satisface una propiedad universal que permite identificarlo con la construcción de Pedersen-Weibel; y además admite un mapa de comparación $\mathbb{K}_{\text{conn}} \rightarrow \mathbb{K}_{\text{conn}}[\infty]$ que induce isomorfismos en los grupos de homotopía positivos. Esta misma propiedad universal, en su versión de ∞ -categorías, fue utilizada por Blumberg-Gepner-Tabuada en el trabajo contemporáneo [BGT13] para dar una versión del espectro no conectivo de la K-teoría algebraica para una familia de ∞ -categorías estables. A raíz de este trabajo y los avances en el desarrollo de la teoría de categorías y álgebra *superiores*, este lenguaje fue reconocido como el indicado para estudiar los espectros y en particular la K-teoría algebraica.

No te dejes desanimar

El Teorema de Representabilidad de Brown y los grupos de homotopía de los espectros sugieren que tanto las teorías de (co)-homología como los fenómenos estables son de interés únicamente a menos de homotopía. En esa dirección, Bastian Cnossen trabaja en [Cno25] sobre lo que él mismo denomina como **principio fundamental de la teoría de homotopía**:

*Al expresar que dos objetos son iguales, debemos especificar **cómo** son iguales, brindando una homotopía o un isomorfismo entre ellos.*

No obstante, Cnossen aclara que el Principio Fundamental podría resultar intrincado, dando lugar a los denominados *problemas de coherencia*. De hecho, al definir una igualdad entre entidades mediante la elección de una homotopía, las igualdades entre las igualdades requerirían introducir homotopías entre homotopías. Este proceso continua indefinidamente, conduciendo a una jerarquía infinita de homotopías superiores.

La solución moderna a estos problemas de coherencia se encuentra en las ∞ -categorías. Conceptualmente, una ∞ -categoría se comporta de manera análoga a una categoría clásica: podemos hablar de objetos y morfismos que se pueden componer, así como de funtores y propiedades universales. Pero, de acuerdo con el Principio Fundamental de Cnossen, también está provista de una noción de homotopías entre morfismos, así como de homotopías entre esas homotopías, y así sucesivamente. Inductivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$ una ∞ -categoría viene provista de $(n + 1)$ -morfismos entre los n -morfismos, y requerimos que para cada $n \geq 2$ los n -morfismos sean inversibles, así como ocurre con las homotopías en los espacios topológicos.

El ejemplo central de ∞ -categoría es *Ánima*², denotada como **An**, la ∞ -categoría de espacios topológicos a menos de equivalencias homotópicas débiles, con homotopías como morfismos superiores. Por el propio Principio Fundamental, es de esperar que toda construcción en la teoría de ∞ -categorías se relacione con **An**. En efecto, así como los morfismos entre dos objetos conforman un conjunto en el marco 1-categorífico, en la teoría de ∞ -categorías el espacio de morfismos entre dos objetos consiste de un *ánima*. Las versiones homotópicas de las construcciones categóricas habituales se formulan de manera natural dentro del marco de ∞ -categorías, obteniendo así las siguientes analogías:

1-CATEGORÍAS	∞ -CATEGORÍAS
Equivalencias débiles	Isomorfismos
Conjuntos (Set)	Ánima (An)
Hom-sets	Hom-ánima
(Co)límites homotópicos	(Co)límites
Grupos abelianos (Ab)	Spectra (Sp)
Categorías abelianas	∞ -categorías estables

²La terminología fue introducida por Clausen y Scholze para enfatizar que un *ánima* es la versión homotópica (animada) de la noción (estática) de conjunto. Enfatiza que un *ánima* solo captura el espíritu homotópico de un espacio, olvidando su geometría: la palabra *ánima* significa alma en latín.

La construcción de la ∞ -categoría de los espectros $\mathbf{Sp}$ junto a su propiedad universal como la estabilización de la ∞ -categoría $\mathbf{An}$ evidencia que la teoría de categorías superior es la indicada para estudiar teoría estable de homotopía. En consecuencia, han habido muchos esfuerzos por formalizar esta teoría, que una vez asentada prometería ser una herramienta invaluable para las demostraciones. Uno de esos esfuerzos más notables es el de Jacob Lurie, mediante su trabajo Kerodon [Lur18], un *recurso en línea para matemática homotópicamente coherente*.

El nuevo rumbo de la K-teoría

Con la nueva maquinaria de ∞ -categorías, el próximo paso es intentar generalizar invariantes con valores en $\mathbf{Sp}$ (tanto su versión 1 como ∞ -categórica) a alguna familia de ∞ -categorías. Gracias al trabajo de Efimov [Efi25] en 2025, fue posible definir la K-teoría como un funtor de ∞ -categorías presentables y dualizables a la ∞ -categoría de espectros:

$$\mathbb{K}_\infty : \mathbf{Pr}_{\text{dual}}^L \rightarrow \mathbf{Sp},$$

extendiendo aún más el dominio de la K-teoría de Blumberg-Gepner-Tabuada. Esta familia de ∞ -categorías estables no tienen una restricción de tamaño impuesta, de forma tal que el nuevo dominio de la K-teoría permite computar el invariante mucho más allá que solo para categorías pequeñas. El ejemplo arquetípico de estas ∞ -categorías es el de haces sobre un espacio localmente compacto y Hausdorff con valores en $\mathbf{Sp}$ (u otra ∞ -categoría presentable y dualizable).

Mediante la K-teoría de Efimov, el lenguaje de las ∞ -categorías permite obtener construcciones más naturales de los mapas de ensamble discutidos en el Capítulo 3. En efecto, consideremos un grupo G y un funtor $F : \text{Or}(G, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{Pr}_{\text{dual}}^L$ de la categoría de órbitas en la categoría de ∞ -categorías presentables y dualizables. Considerando el morfismo canónico

$$\text{colim}_{\text{Or}(G, \mathcal{F})} F \rightarrow F(*),$$

el **mapa de ensamble** es el morfismo de intercambio de colímites³ (en el sentido ∞ -categórico)

$$\mathfrak{Ass}_\infty(F) : \text{colim}_{\text{Or}(G, \mathcal{F})} \mathbb{K}_\infty(F) \rightarrow \mathbb{K}_\infty \left(\text{colim}_{\text{Or}(G, \mathcal{F})} F \right) \rightarrow \mathbb{K}_\infty(F(*)).$$

Este morfismo recupera el de la conjetura de Farrell-Jones si $F(*) = D(\ell[G])$, la ∞ -categoría derivada de la l -álgebra de grupo. La ventaja formal de considerar esta versión del mapa de ensamble $\mathfrak{Ass}_\infty(F)$ es que es posible obtener versiones de las conjeturas de isomorfismos con coeficientes más generales, reportadas por Mukherjee y Nikolaus en [MN25] y estudiadas por Bunke, Kasprowski y Wings en [BKW21]. Pretendemos estudiar en el futuro el vínculo entre este mapa de ensamble con la versión de la conjetura de Farrell-Jones discutida en el Capítulo 4 para grupoides amplios, formulada por Cortiñas y Li en su trabajo en proceso [CL26].

³Como muchas de las construcciones y propiedades 1-categóricas, los colímites en la versión ∞ -categóricos comparten, vía la analogía anterior, esas mismas propiedades. En efecto, su propiedad universal, en la cual los diagramas conmutan a menos de homotopía, induce un morfismo canónico de intercambio de colímites.

Esta historia muestra cómo, a lo largo de los últimos cincuenta años, la simple definición del K_0 como un invariante geométrico aislado dio lugar al desarrollo unificado de un área de estudio. En efecto, refleja un proceso colectivo en el que cada avance respondió a las limitaciones del anterior. En ese espíritu, este apartado busca contribuir a una lectura de la K-teoría algebraica no solo como una disciplina, sino como el desarrollo de una comunidad en sí misma.

B.2. Construcción de la K-teoría para una categoría lineal

En este apartado, nos encargaremos de extender la construcción del espectro de K-teoría no conectivo B.1.1 de Lück y Steimle para categorías ℓ -lineales, donde ℓ es un anillo conmutativo. Para ello, seguiremos la exposición de Davis-Lück [DL98]. En su trabajo, parte de la construcción que describiremos es utilizada para definir un funtor de la categoría de órbitas de un grupo a la categoría de espectros que compute la K-teoría del álgebra del grupo.

Definición B.2.1. Sea ℓ un anillo conmutativo con unidad. Una **categoría ℓ -lineal** es una categoría pequeña enriquecida sobre ℓ -módulos. Es decir, es una categoría pequeña $\mathcal{C}$ que, para cada par de objetos $c, d \in \mathcal{C}$, admite una estructura de ℓ -módulo en $\text{hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$ que hace de la composición una función bilineal.

Notar que la noción de categoría ℓ -lineal generaliza la noción de categoría pre-aditiva, tomando como anillo base al anillo de enteros. Diremos que una categoría ℓ -lineal es **ℓ -aditiva** si admite biproductos finitos que son compatibles con la estructura ℓ -lineal. Denotamos **ℓ -cat** la categoría de categorías ℓ -lineales y **ℓ -Add** la categoría de categorías ℓ -aditivas. A continuación, describiremos cada ingrediente de la siguiente *receta* para calcular la K-teoría de una categoría ℓ -lineal:

$$\mathbb{K}_{\ell} : \ell\text{-cat} \xrightarrow{(-)_{\oplus}} \ell\text{-Add} \xrightarrow{\text{idem}} \ell\text{-Add} \xrightarrow{\mathbb{K}_{\text{conn}}[\infty]} \mathbf{Sp}$$

Categoría simétrica-monoidal libre

El primer paso consiste de la construcción de un funtor que tome una categoría ℓ -lineal $\mathcal{C}$ y le asigne una categoría ℓ -aditiva $\mathcal{C}_{\oplus}$. De hecho, le asignaremos una categoría que también es simétrica monoidal estricta (o permutativa), y cuya estructura monoidal es compatible con la estructura ℓ -lineal e implica la existencia del biproducto para la categoría ℓ -aditiva.

Construcción B.2.2. Dada $\mathcal{C}$ una categoría ℓ -lineal consideramos $\mathcal{C}_{\oplus}$ la categoría cuyos objetos son sumas formales $c_1 \oplus \cdots \oplus c_n$ de objetos en $\mathcal{C}$ y cuyos morfismos vienen dados por el ℓ -módulo

$$\text{hom}_{\mathcal{C}_{\oplus}}(c_1 \oplus \cdots \oplus c_n, d_1 \oplus \cdots \oplus d_m) := \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^m \text{hom}_{\mathcal{C}}(c_i, d_j).$$

La manera de interpretar los morfismos en $\mathcal{C}_{\oplus}$ es como una matriz cuyas entradas consisten en morfismos en $\mathcal{C}$ y la composición es la multiplicación matricial y la suma de ℓ -módulos. En efecto, si $f : c_1 \oplus \cdots \oplus c_n \rightarrow d_1 \oplus \cdots \oplus d_m$ y $g : d_1 \oplus \cdots \oplus d_m \rightarrow e_1 \oplus \cdots \oplus e_l$ son morfismos componibles, entonces para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq l$ se tiene que

$$(g \circ f)_{i,j} = \sum_{k=1}^m g_{k,j} \circ f_{i,k}.$$

Denotando como 0 a la suma vacía, resulta directo verificar que la concatenación

$$(c_1 \oplus \cdots \oplus c_n) \bigoplus (d_1 \oplus \cdots \oplus d_m) = c_1 \oplus \cdots \oplus c_n \oplus d_1 \oplus \cdots \oplus d_m$$

define una operación monoidal asociativa estricta cuya unidad es la tupla vacía 0. Más aún, el intercambio de coordenadas define un isomorfismo natural $c \oplus d \cong d \oplus c$ para cada $c, d \in \mathcal{C}$; de modo que $\mathcal{C}_\oplus$ adquiere una estructura de categoría ℓ -lineal simétrica monoidal estricta. A su vez, una sencilla verificación muestra que cada funtor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre categorías ℓ -lineales determina un funtor que a cada objeto $c_1 \oplus \cdots \oplus c_n$ lo envía a $F(c_1) \oplus \cdots \oplus F(c_n)$, de forma tal que la construcción $(-)_\oplus$ es funtorial. Por último, notemos que este funtor toma valores en la categoría de categorías aditivas. En efecto, por definición la operación $\bigoplus$ en $\mathcal{C}_\oplus$ cumple, para cualesquiera $c, d, e \in \mathcal{C}$ que

$$\text{hom}_{\mathcal{C}_\oplus}(c \oplus d, e) = \text{hom}_{\mathcal{C}}(c, e) \times \text{hom}_{\mathcal{C}}(d, e) \quad \text{y} \quad \text{hom}_{\mathcal{C}_\oplus}(c, d \oplus e) = \text{hom}_{\mathcal{C}}(c, d) \times \text{hom}_{\mathcal{C}}(c, e).$$

Por construcción, $0 \in \mathcal{C}_\oplus$ es un objeto cero y por lo tanto $\bigoplus$ es un biproducto de la categoría ℓ -lineal $\mathcal{C}_\oplus$. Más aún, por lo anterior la estructura ℓ -lineal es compatible con la suma directa y se tiene un funtor bien definido

$$(-)_\oplus: \ell\text{-cat} \rightarrow \ell\text{-Add}.$$

Completación idempotente

La próxima construcción consiste en completar por idempotentes a la categoría ℓ -aditiva sobre la cual queremos calcular su K-teoría. En analogía a la construcción de la K-teoría de un anillo, este paso corresponde con trabajar sobre la categoría de módulos finitamente generados y proyectivos sobre ese anillo. Veamos primero algunas definiciones:

Definición B.2.3. Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $p: c \rightarrow c$ un morfismo idempotente en $\mathcal{C}$. Decimos que p *se parte* si existen $s: d \rightarrow c$ y $r: c \rightarrow d$ tales que $p = s \circ r$ y $r \circ s = \text{id}_d$. La categoría $\mathcal{C}$ se dice *completa en idempotentes* si todo idempotente se parte.

Veamos qué es una completación idempotente:

Definición B.2.4. Un funtor $i: \mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ es una *completación idempotente* de $\mathcal{C}$ si:

1. $\tilde{\mathcal{C}}$ es completa en idempotentes,
2. $i: \mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ es plenamente fiel,
3. todo objeto en $\tilde{\mathcal{C}}$ es un retracts por i de algún objeto en $\mathcal{C}$.

Se puede probar que las completaciones idempotentes son únicas a menos de equivalencia de categorías. La definición anterior resultará más familiar con el siguiente ejemplo:

Ejemplo B.2.5. Consideremos R un anillo conmutativo con unidad e $i: \text{Free}_R \hookrightarrow \text{Proj}_R$ la inclusión de la subcategoría de módulos libres finitamente generados en la subcategoría de módulos proyectivos finitamente generados. Si $p: P \rightarrow P$ es un idempotente en Proj_R , entonces podemos descomponer a $P = \text{im}(p) \oplus \ker(p)$ y factorizar

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p} & P \\ p|_{\text{im}(p)} \searrow & & \swarrow \text{inc} \\ & \text{im}(p) & \end{array}$$

Esto dice que Proj_R es completa en idempotentes. Por otra parte, es claro que $i: \text{Free}_R \hookrightarrow \text{Proj}_R$ plenamente fiel, por ser la inclusión de una subcategoría plena. Finalmente, si P es un R -módulo finitamente generado y proyectivo, entonces P es sumando directo de un R -módulo libre y por ende es retracto por i de un objeto en Free_R . Es decir, la categoría de R -módulos proyectivos finitamente generados es una completación idempotente de la categoría de módulos libres finitamente generados sobre R .

Veamos cómo se construye funtorialmente una completación por idempotentes:

Construcción B.2.6. Dada $\mathcal{C}$ una categoría, construiremos $i: \mathcal{C} \hookrightarrow \text{idem}(\mathcal{C})$ una completación por idempotentes. En efecto, $\text{idem}(\mathcal{C})$ tiene como objetos a los morfismos idempotentes $p: c \rightarrow c$ de $\mathcal{C}$, y como morfismos $i(f): p \rightarrow q$ a las flechas $f: c \rightarrow d$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{f} & d \\ p \downarrow & & \uparrow q \\ c & \xrightarrow{f} & d \end{array}$$

La composición viene dada por la composición en la categoría $\mathcal{C}$ y la identidad de un objeto p por el mismo idempotente $i(p): p \rightarrow p$. Se tiene un funtor $i: \mathcal{C} \rightarrow \text{idem}(\mathcal{C})$ que a cada objeto c le asigna id_c y a cada morfismo $f: c \rightarrow d$ le asigna $i(f): \text{id}_c \rightarrow \text{id}_d$. Es directo verificar que este funtor es plenamente fiel. A su vez, si $p: c \rightarrow c$ es un objeto en $\text{idem}(\mathcal{C})$, el mismo idempotente define un morfismo $p: i(c) \rightarrow p$. Más aún, este morfismo es un retracto de $p: p \rightarrow i(c)$, de forma tal que todo objeto en $\text{idem}(\mathcal{C})$ es retracto por i de algún objeto en $\mathcal{C}$. Finalmente, veamos que $\text{idem}(\mathcal{C})$ es completa en idempotentes. En efecto, si $p: q \rightarrow q$ es tal que $p \circ p = p$, entonces tomando $s: p \xrightarrow{p} q$ y $r: q \xrightarrow{p} p$ una sencilla verificación muestra que $r \circ s = \text{id}_p$ y $s \circ r = p$, de forma tal que $i: \mathcal{C} \rightarrow \text{idem}(\mathcal{C})$ exhibe una completación por idempotentes. Finalmente, la asignación $\mathcal{C} \rightarrow \text{idem}(\mathcal{C})$ es funtorial en la categoría de categorías, pues si $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un funtor, la asignación que a cada idempotente $p: c \rightarrow c$ le corresponde $F(p): F(c) \rightarrow F(c)$ define un funtor $\text{idem}(F): \text{idem}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{idem}(\mathcal{D})$.

Adecuemos la construcción anterior a nuestro caso de interés:

Proposición B.2.7. Si $\mathcal{C}$ una categoría ℓ -aditiva entonces $\text{idem}(\mathcal{C})$ es naturalmente ℓ -aditiva.

Demostración. En primer lugar, notemos que para cada par de objetos $p: c \rightarrow c$ y $q: d \rightarrow d$ en $\text{idem}(\mathcal{C})$ hay una contención

$$\text{hom}_{\text{idem}(\mathcal{C})}(p, q) \subseteq \text{hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$$

que es cerrada por la estructura ℓ -lineal, dado que la composición es bilineal. Esto dice que $\text{idem}(\mathcal{C})$ hereda naturalmente la estructura de categoría ℓ -lineal de $\mathcal{C}$. Es directo verificar que el idempotente nulo $0: 0 \rightarrow 0$ en el objeto cero de $\mathcal{C}$ es un objeto terminal e inicial de $\text{idem}(\mathcal{C})$. Finalmente, para cada par de objetos $p: c \rightarrow c$ y $q: d \rightarrow d$ en $\text{idem}(\mathcal{C})$ el idempotente inducido

$$p \oplus q: c \oplus d \rightarrow c \oplus d$$

junto a las inclusiones y proyecciones canónicas vistas como morfismos en $\text{idem}(\mathcal{C})$ verifican la propiedad universal del biproducto como consecuencia de que lo hacen en $\mathcal{C}$. ■

De esta manera, conseguimos un funtor bien definido:

$$\text{idem}: \ell\text{-Add} \rightarrow \ell\text{-Add}.$$

Recordando la construcción B.1.1 del espectro de K-teoría no conectivo para categorías aditivas $\mathbb{K}_{\text{conn}}[\infty]: \mathbf{Add-cat} \rightarrow \mathbf{Sp}$ debida a Lück y Steimle en [LS13], obtenemos la K-teoría de una categoría ℓ -lineal como la siguiente composición:

$$\mathbb{K}_\ell: \ell\text{-cat} \xrightarrow{(-)_\oplus} \ell\text{-Add} \xrightarrow{\text{idem}} \ell\text{-Add} \xrightarrow{\mathbb{K}_{\text{conn}}[\infty]} \mathbf{Sp}.$$

Bibliografía

- [ACJM25] Ramla Abdellatif, Lisa Orloff Clark, Roy Jansen, and Stephen Marsland. Singular ideals over arbitrary fields for the two-and three-headed snakes. *arXiv preprint arXiv:2506.19254*, 2025.
- [ACM24] Guido Arnone, Guillermo Cortiñas, and Devarshi Mukherjee. Homology of steinberg algebras. *arXiv preprint arXiv:2412.15112*, 2024.
- [AHL18] Pere Ara, Roozbeh Hazrat, Huanhuan Li, and Aidan Sims. Graded steinberg algebras and their representations. *Algebra & Number Theory*, 12(1):131–172, 2018.
- [Akr26] Ramiro Akris. Conjeturas de isomorfismo. *Universidad de Buenos Aires*, 2026. En preparación.
- [AMP07] Pere Ara, M Angeles Moreno, and Enrique Pardo. Nonstable k-theory for graph algebras. *Algebras and representation theory*, 10(2):157–178, 2007.
- [Bas64] Hyman Bass. k-theory and stable algebra. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 22:5–60, 1964.
- [Bas68] Hyman Bass. Algebraic k-theory wa benjamin. *Inc.: New York*, 1968.
- [BGT13] Andrew J Blumberg, David Gepner, and Gonçalo Tabuada. A universal characterization of higher algebraic k-theory. *Geometry & Topology*, 17(2):733–838, 2013.
- [BHS64] Hyman Bass, Alex Heller, and Richard G Swan. The whitehead group of a polynomial extension. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 22:61–79, 1964.
- [BK72] Aldridge Knight Bousfield and Daniel Marinus Kan. *Homotopy limits, completions and localizations*, volume 304. Springer Science & Business Media, 1972.
- [BKW21] Ulrich Bunke, Daniel Kasprowski, and Christoph Winges. On the farrell-jones conjecture for localising invariants. *arXiv preprint arXiv:2111.02490*, 2021.
- [Bön20] Christian Bönicke. A going-down principle for ample groupoids and the baum–connes conjecture. *Advances in Mathematics*, 372:107314, 2020.
- [BP24] Christian Bönicke and Valerio Proietti. A categorical approach to the baum–connes conjecture for étale groupoids. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 23(5):2319–2364, 2024.

- [Bre67] Glen E Bredon. *Equivariant cohomology theories*, volume 34. Springer, 1967.
- [Bro62] Edgar H Brown. Cohomology theories. *Annals of Mathematics*, 75(3):467–484, 1962.
- [BS58] Armand Borel and Jean-Pierre Serre. Le théoreme de riemann-roch. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 86:97–136, 1958.
- [BS62] Hyman Bass and Stephen Schanuel. The homotopy theory of projective modules. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 68(4):425–428, 1962.
- [CL26] Guillermo Cortiñas and Xin Li. Isomorphism conjectures for étale groupoids. En preparación, 2026.
- [CM00] Marius Crainic and Ieke Moerdijk. A homology theory for étale groupoids. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2000(521), 2000.
- [Cno25] Bastiaan Cnossen. An ∞ -categorical introduction to stable homotopy theory and higher algebra. <https://drive.google.com/file/d/1ivHDIqclbg2hxmUEMTqmj2TnsAHQxVg9/view>, 2025. Lecture notes, in progress.
- [CR23] P Carrillo Rouse. The chern–baum–connes assembly map for lie groupoids. In *Cyclic cohomology at 40. Achievements and future prospects*, pages 63–81. American Mathematical Society, 2023.
- [CS15] Lisa Orloff Clark and Aidan Sims. Equivalent groupoids have morita equivalent steinberg algebras. *Journal of pure and applied algebra*, 219(6):2062–2075, 2015.
- [CZ22] Lisa Orloff Clark and Joel Zimmerman. A steinberg algebra approach to étale groupoid c^* -algebras. *arXiv preprint arXiv:2203.00179*, 2022.
- [DL98] James F Davis and Wolfgang Lück. Spaces over a category and assembly maps in isomorphism conjectures in k - and l -theory. *K-theory*, 15(3):201–252, 1998.
- [Efi25] Alexander I Efimov. K -theory and localizing invariants of large categories. *arXiv preprint arXiv:2405.12169*, 2025.
- [EP17] Ruy Exel and Enrique Pardo. Self-similar graphs, a unified treatment of katsura and nekrashevych c^* -algebras. *Advances in Mathematics*, 306:1046–1129, 2017.
- [Exe08] Ruy Exel*. Inverse semigroups and combinatorial c^* -algebras. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 39(2):191–313, 2008.
- [FSW14] Martin Finn-Sell and Nick Wright. Spaces of graphs, boundary groupoids and the coarse baum–connes conjecture. *Advances in Mathematics*, 259:306–338, 2014.
- [Ger72] Stephen M Gersten. On the spectrum of algebraic k -theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1972.

- [GJ09] Paul G Goerss and John F Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [Gla25] Janou Glaeser. Haces superiores sobre grupoides Étale. *Universidad de Buenos Aires*, 2025.
- [GPS99] Thierry Giordano, Ian F Putnam, and Christian F Skau. Full groups of cantor minimal systems. *Israel Journal of Mathematics*, 111(1):285–320, 1999.
- [GR02] Alexander Grothendieck and Michele Raynaud. Rev[^] etements\étales et groupe fondamental (sga 1). *arXiv preprint math/0206203*, 2002.
- [Gra06] Daniel Grayson. Higher algebraic k-theory: Ii: after daniel quillen. In *Algebraic K-Theory: Proceedings of the Conference Held at Northwestern University Evanston, January 12–16, 1976*, pages 217–240. Springer, 2006.
- [Gro57] Alexandre Grothendieck. Sur quelques points d’algèbre homologique. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 9(2):119–183, 1957.
- [HP01] Ian Hambleton and Erik K Pedersen. Identifying assembly maps in k-and l-theory. *Binghamton University*, 2001.
- [Joh82] Peter T Johnstone. *Stone spaces*, volume 3. Cambridge university press, 1982.
- [Kas83] Gennadii Georgievich Kasparov. An index for invariant elliptic operators, k-theory, and representations of lie groups. In *Doklady Akademii Nauk*, volume 268, pages 533–537. Russian Academy of Sciences, 1983.
- [KM91] Anders Kock and Ieke Moerdijk. Presentations of étendues. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, 32(2):145–164, 1991.
- [KPRR97] Alex Kumjian, David Pask, Iain Raeburn, and Jean Renault. Graphs, groupoids, and cuntz–krieger algebras. *Journal of Functional Analysis*, 144(2):505–541, 1997.
- [Laf07] Vincent Lafforgue. Bivariant K-theory for banach algebra groupoids and the baum–connes conjecture. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 6(3):415–451, 2007.
- [Li25] Xin Li. Ample groupoids, topological full groups, algebraic k-theory spectra and infinite loop spaces. In *Forum of Mathematics, Pi*, volume 13, page e9. Cambridge University Press, 2025.
- [Lim59] Elon L Lima. The spanier-whitehead duality in new homotopy categories. *Summa Brasil. Math*, 4(91-148):1959, 1959.
- [LJ91] L Gaunce Lewis Jr. Is there a convenient category of spectra? *Journal of pure and applied algebra*, 73(3):233–246, 1991.
- [LM24] Wolfgang Lück and Tibor Macko. *Surgery theory: foundations*, volume 362. Springer Nature, 2024.

- [Lod76] Jean-Louis Loday. k -théorie algébrique et représentations de groupes. In *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 9, pages 309–377, 1976.
- [LS13] Wolfgang Lück and Wolfgang Steimle. Non-connective k - and nil-spectra of additive categories. *An alpine expedition through algebraic topology*, 617:205–236, 2013.
- [Lue25] Wolfgang Lueck. Survey on the farrell-jones conjecture. *arXiv preprint arXiv:2507.11337*, 2025.
- [Lur18] Jacob Lurie. Kerodon. <https://kerodon.net>, 2018.
- [Mad95] Ib Madsen. Algebraic k -theory and traces. *Current developments in mathematics*, 1995(1):191–321, 1995.
- [Mal23] Cary Malkiewich. Spectra and stable homotopy theory (draft version, first 6 chapters), 2023.
- [Mil66] John Milnor. Whitehead torsion. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 72(3):358–426, 1966.
- [Mil24] Alistair Miller. Ample groupoid homology and étale correspondences. *Journal of Noncommutative Geometry*, 19(2):657–677, 2024.
- [ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5. Springer Science & Business Media, 1998.
- [MM12] Saunders MacLane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [MN25] Devarshi Mukherjee and Thomas Nikolaus. Efimov k -theory and assembly maps. *CIMPA School 2025*, 2025.
- [MS00a] M. Macho-Stadler. Foliations, groupoids and baum–connes conjecture. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, 266:169–187, 2000.
- [MS00b] M. Macho-Stadler. Foliations, groupoids, and the baum–connes conjecture. *Journal of Mathematical Sciences*, 113(5):637–646, 2000.
- [MS24] Alistair Miller and Benjamin Steinberg. Homology and K -theory for self-similar actions of groups and groupoids, 2024. [arXiv:2409.02359](https://arxiv.org/abs/2409.02359).
- [nLa] nLab contributors. Horizontal categorification. <https://ncatlab.org/nlab/show/horizontal+categorification>.
- [Pat12] Alan Paterson. *Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras*, volume 170. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Pre54] Gordon B Preston. Representations of inverse semi-groups. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(4):411–419, 1954.

- [PW06] Erik K Pedersen and Charles A Weibel. A nonconnective delooping of algebraic k-theory. In *Algebraic and Geometric Topology: Proceedings of a Conference held at Rutgers University, New Brunswick, USA July 6–13, 1983*, pages 166–181. Springer, 2006.
- [Qui06] Daniel Quillen. Higher algebraic k-theory: I. In *Higher K-Theories: Proceedings of the Conference held at the Seattle Research Center of the Battelle Memorial Institute, from August 28 to September 8, 1972*, pages 85–147. Springer, 2006.
- [Ren80] Jean Renault. *A groupoid approach to C^* -algebras*, volume 793. Springer, 1980.
- [Rie17] Emily Riehl. *Category theory in context*. Courier Dover Publications, 2017.
- [RZ10] Luis Ribes and Pavel Zalesskii. Profinite groups. In *Profinite Groups*, pages 19–74. Springer, 2010.
- [Ste67] Norman E Steenrod. A convenient category of topological spaces. *Michigan Mathematical Journal*, 14(2):133–152, 1967.
- [Ste10] Benjamin Steinberg. A groupoid approach to discrete inverse semigroup algebras. *Advances in Mathematics*, 223(2):689–727, 2010.
- [Ste14] Benjamin Steinberg. Modules over étale groupoid algebras as sheaves. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 97(3):418–429, 2014.
- [Str09] Neil P Strickland. The category of cgwh spaces. *preprint*, 12:90, 2009.
- [STY02] Georges Skandalis, Jean-Louis Tu, and Guoliang Yu. The coarse baum–connes conjecture and groupoids. *Topology*, 41(4):807–834, 2002.
- [SW53] Edwin H Spanier and John HC Whitehead. A first approximation to homotopy theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 39(7):655–660, 1953.
- [Swa62] Richard G Swan. Vector bundles and projective modules. *Transactions of the American Mathematical Society*, 105(2):264–277, 1962.
- [Tho82] Robert W Thomason. First quadrant spectral sequences in algebraic k-theory via homotopy colimits. *Communications in Algebra*, 10(15):1589–1668, 1982.
- [Tu00] Jean-Louis Tu. The baum–connes conjecture for groupoids. In *C^* -algebras*, pages 227–242. Springer, 2000.
- [Val02] Alain Valette. *Introduction to the Baum-Connes conjecture*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [Whi50] John HC Whitehead. Simple homotopy types. *American Journal of Mathematics*, 72(1):1–57, 1950.