



UBA
1821 Universidad
de Buenos Aires



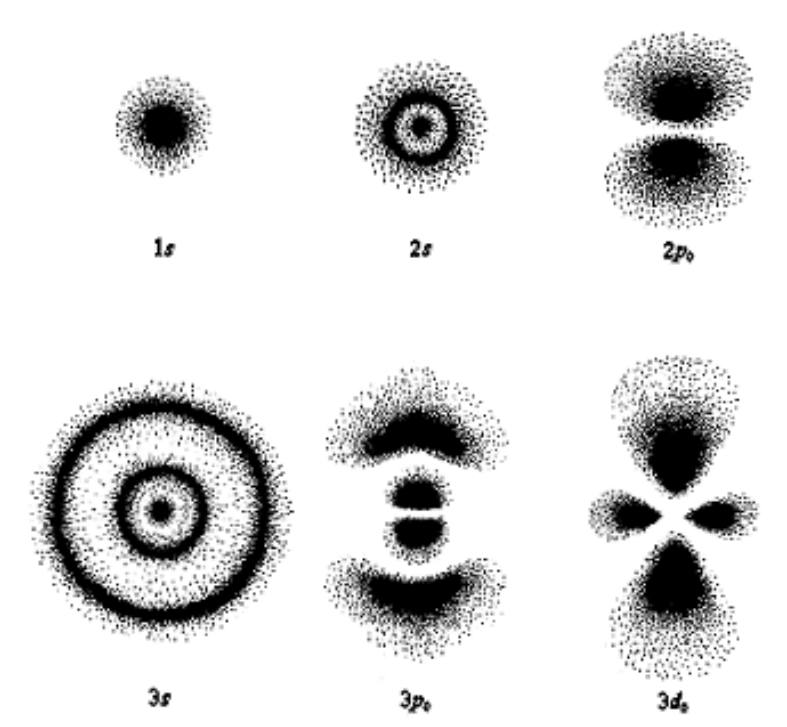
**UNIÓN
MATEMÁTICA
ARGENTINA**

De lo Abstracto a lo Observable:

Simetrías en Mecánica Cuántica

*A la realidad le gustan las
simetrías y los leves
anacronismos.*

El sur, 1953.
J. L. BORGES



VALENTÍN NICO

FRANCISCO VALDEZ

Índice general

Introducción	2
Capítulo 1. Introducción a la Mecánica Cuántica	3
1.1. Espacios de Hilbert	3
1.2. Postulados de la Mecánica Cuántica	12
1.3. El rol de la simetría en la Mecánica Cuántica	17
Capítulo 2. Teoría de Representaciones	22
2.1. Grupos y Álgebras de Lie	22
2.2. Representaciones de Grupos y Álgebras de Lie	31
Capítulo 3. Representaciones en Mecánica Cuántica	40
3.1. Momento Angular y Spin	40
3.2. La fórmula de Clebsch-Gordan	53
3.3. Átomo de Hidrógeno	60
Cierre	68
Bibliografía	69

Introducción

La simetría es una condición sobre las *acciones*. Al decir que algo es simétrico estamos afirmando una condición respecto una acción que se aplica a ese algo. Por ejemplo, al decir que el cuerpo humano es simétrico, nos referimos a que la acción de reflejar el cuerpo por el eje dorsal deja invariante a la apariencia del sujeto.

Simetría $\implies$ Acción

Desde las alas de una mariposa hasta la resolubilidad de una ecuación polinomial de quinto grado, la simetría es un fenómeno intrínseco de la Naturaleza, pero también de la Matemática. En la búsqueda de comprender nuestros alrededores mediante un lenguaje propio, la Teoría de Grupos se encarga precisamente de codificar el carácter simétrico en las acciones. De la misma manera que los números sirven para contar, los *grupos* sirven para realizar acciones simétricas.

Grupos $\implies$ Simetría

Este trabajo tiene como objetivo presentar el lenguaje matemático que subyace detrás de la teoría Física más revolucionaria del siglo XX: la Mecánica Cuántica. *De lo abstracto a lo observable*, la cuántica promete comprender al mundo atómico y responder preguntas del mundo Físico, yendo en contra de la corriente del pensamiento clásico. Lo sorprende es que, en el marco del régimen donde es válida, esta teoría logra describir a la perfección la realidad que nos rodea.

El texto comienza con una introducción a los espacios de Hilbert, mediante los cuales enunciaremos los postulados de la Mecánica Cuántica. Luego, tomaremos como disparador algunos teoremas respecto las simetrías y cantidades conservadas en los sistemas físicos para desarrollar un lenguaje que se ocupa de describir a fondo las acciones simétricas de los grupos: la Teoría de Representaciones. Esta teoría servirá, entre muchas otras cosas, para resolver las ecuaciones por las cuáles los sistemas cuánticos se rigen. Para finalizar, mostraremos una aplicación que evidencia la relevancia de todo lo aquí expuesto: resolveremos las ecuaciones que describen al átomo de hidrógeno. Sugerimos que el lector se encuentre familiarizado con nociones fundamentales de Álgebra Lineal, Análisis Matemático, Teoría de Grupos y Topología básica y haya cursado Física en la secundaria.

Capítulo 1

Introducción a la Mecánica Cuántica

The remarkable thing about the mathematical description of physical phenomena is that it often involves symmetry principles that are far from obvious. These principles reveal themselves as fundamental aspects of the physical world, not because we imposed them, but because they emerged naturally from our efforts to describe and understand physical processes. The elegance and simplicity that these symmetries provide are not just aesthetic, but also deeply connected to the empirical realities of the physical world. – E. Wigner, [15].

1.1. Espacios de Hilbert

En primera medida, comenzamos por presentar las herramientas de análisis funcional que necesitaremos para construir las bases de la Mecánica Cuántica:

DEFINICIÓN 1.1. Una **norma** sobre un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) V es una función $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que:

1. Para todo ϕ en V , $\|\phi\| = 0 \iff \phi = 0$.
2. Para todo ϕ en V y para todo λ en $\mathbb{K}$, se tiene que $\|\lambda \cdot \phi\| = |\lambda| \cdot \|\phi\|$.
3. Para todo ϕ, ψ en V se tiene la desigualdad triangular:

$$\|\phi + \psi\| \leq \|\phi\| + \|\psi\|.$$

OBSERVACIÓN 1.2. Una norma $\| \cdot \|$ sobre un espacio vectorial V induce una estructura de espacio métrico vía:

$$d(\phi, \psi) := \|\phi - \psi\|$$

DEFINICIÓN 1.3. Un **espacio normado** $(V, \| \cdot \|)$ es un espacio vectorial dotado de una norma. Adicionalmente, se dice que es un **espacio de Banach** si el espacio métrico inducido por la norma resulta completo.

DEFINICIÓN 1.4. Un **producto interno** sobre un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) V es una función sesqui-lineal $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ tal que:

1. Para todo ϕ, ψ en V , se tiene que $\langle \phi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \phi \rangle}$.
2. Para todo ϕ, ψ, θ en V y para todo λ en $\mathbb{K}$, se tiene que
$$\langle \phi, \psi + \lambda \cdot \theta \rangle = \langle \phi, \psi \rangle + \lambda \cdot \langle \phi, \theta \rangle.$$
3. Para todo ϕ en V , $\langle \phi, \phi \rangle \geq 0$ y $\langle \phi, \phi \rangle = 0 \iff \phi = 0$.

Notar que tomamos como convención que el producto interno es lineal en la segunda coordenada.

OBSERVACIÓN 1.5. Si $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio vectorial dotado de un producto interno, el mismo induce una estructura de espacio normado vía

$$\|\psi\| := \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}.$$

De estas pocas definiciones, ya obtenemos un resultado que es posiblemente una de las desigualdades más importantes del álgebra lineal básica:

PROPOSICIÓN 1.6. (**Desigualdad de Cauchy-Schwartz**). Sea $\mathcal{H}$ un $\mathbb{C}$ -espacio de Hilbert. Entonces para todo ψ, ϕ en $\mathcal{H}$

$$|\langle \phi, \psi \rangle| \leq \|\phi\| \cdot \|\psi\|.$$

Más aún, la igualdad es cierta si y solo si el conjunto $\{\phi, \psi\}$ es linealmente dependiente

DEMOSTRACIÓN. En el caso $\psi = 0$, el enunciado es claramente cierto. Supongamos que $\psi \neq 0$. Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ vale que

$$0 \leq \|\phi - \lambda \cdot \psi\|^2 = \|\phi\|^2 - 2 \cdot \operatorname{Re}(\lambda \langle \phi, \psi \rangle) + |\lambda|^2 \|\psi\|^2.$$

Luego, tomando $\lambda = \frac{\langle \psi, \phi \rangle}{\|\psi\|}$ y reordenando la expresión resulta:

$$|\langle \phi, \psi \rangle|^2 \leq \|\phi\|^2 \cdot \|\psi\|^2.$$

Luego, como raíz cuadrada es una función creciente, obtenemos lo deseado. Por último, vemos que la igualdad se satisface si y solo si $\phi - \lambda \cdot \psi = 0$. Es decir, si y solo si el conjunto $\{\phi, \psi\}$ es linealmente dependiente. $\square$

La fuerza de tener un producto interno definido sobre un espacio vectorial motiva la definición de la siguiente estructura que tiene fuerza por sí misma:

DEFINICIÓN 1.7. Un **espacio de Hilbert** $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio vectorial dotado de un producto interno de manera tal que el espacio normado inducido es de Banach.

Los Espacios de Hilbert servirán para extender la idea de medir distancias en un espacio abstracto y así conseguir una noción de medición de ángulos entre vectores. De esta forma, introducimos la siguiente noción de ortogonalidad:

DEFINICIÓN 1.8. Un subconjunto $\{e_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$, con I un conjunto de índices arbitrarios, se dice **ortogonal** si se cumple que para todo $i \neq j$

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

Más aún, se dice **ortonormal** si se cumple que

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

DEFINICIÓN 1.9. Dado un subconjunto $X \subset \mathcal{H}$, se define su complemento ortogonal, como sigue:

$$X^\perp := \{\psi \in \mathcal{H} \mid \langle \phi, \psi \rangle = 0, \forall \phi \in X\}$$

OBSERVACIÓN 1.10. Dado un subconjunto $X \subset \mathcal{H}$, su complemento ortogonal $X^\perp$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{H}$.

OBSERVACIÓN 1.11. *Dado un subconjunto $X \subset \mathcal{H}$, vale que $X^\perp$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, $(X^\perp)^\perp = \overline{X}$ y, además, $X^\perp = \overline{X}^\perp$.*

A la vez de generalizar la noción de medición de ángulos, estamos interesados en introducir una nueva noción de base. Una base de Hamel para un espacio vectorial (una base *usual*) es un conjunto linealmente independiente de vectores que generan el espacio vectorial mediante combinaciones lineales, por definición finitas. En su lugar, la siguiente noción de base permitirá extender este hecho para generar los elementos de un espacio vectorial a través de sumas numerables:

DEFINICIÓN 1.12. *Sea $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert. Un subconjunto $\mathcal{B}$ se dice **base de Hilbert** si es un subconjunto ortonormal maximal.*

TEOREMA 1.13. *Un subconjunto ortonormal $\mathcal{B}$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es una base de Hilbert si y solo se verifica que $\langle \mathcal{B} \rangle$ es denso en $\mathcal{H}$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver Theorem 4.13, Chapter 1 en [2]. □

Con la finalidad de clasificar, salvo alguna noción de equivalencia, los Espacios de Hilbert, introducimos la siguiente noción de isomorfismo y un resultado que describe cómo las bases de Hilbert los determinan:

DEFINICIÓN 1.14. *Dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ se dicen **isomorfos** si existe un isomorfismo lineal $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ tal que $\langle T(\psi), T(\phi) \rangle = \langle \psi, \phi \rangle$ para todo ψ, ϕ en $\mathcal{H}_1$.*

TEOREMA 1.15. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $X \subset \mathcal{H}$ un subconjunto ortonormal, entonces existe una base $\mathcal{B}$ que extiende a X . En particular, todo espacio de Hilbert admite una base de Hilbert. Además, el cardinal de la base es independiente de la base de Hilbert elegida y es llamado **dimensión de Hilbert**. Por último, dos espacios de Hilbert tienen el mismo cardinal de sus bases de Hilbert si y solo si son isomorfos.*

DEMOSTRACIÓN. Ver Proposition 4.2, Chapter 1 y Theorem 5.4, Chapter 1 en [2]. □

En la Mecánica Cuántica, serán de principal relevancia una clase específica de Espacios de Hilbert, que por el teorema anterior son únicos salvo isomorfismos de Espacios de Hilbert:

DEFINICIÓN 1.16. *Decimos que un espacio de Hilbert es **separable**¹ si su dimensión de Hilbert es a lo sumo numerable.*

De la numerabilidad de la base en un espacio de Hilbert separables y Theorem 4.13, Chapter 1 en [2], se sigue la siguiente observación fundamental:

OBSERVACIÓN 1.17. *Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable, un subconjunto ortonormal indexado por un conjunto numerable I es una base de Hilbert si y solo si verifica que para todo ψ en $\mathcal{H}$,*

¹De hecho coincide con la noción de separabilidad de espacios métricos.

$$\psi = \sum_{i \in I} \langle \phi_i, \psi \rangle \cdot \phi_i$$

con todos los coeficientes nulos salvo numerables.

Recordemos algunas propiedades que obtenemos por tener la noción de continuidad de operadores sobre un espacio normado:

DEFINICIÓN 1.18. Una aplicación lineal $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ entre espacios de Hilbert se dice **acotada** si existe M un número real no negativo tal que

$$\|T(\psi)\| \leq M \cdot \|\psi\|$$

En este caso, llamamos **norma** de T a:

$$\|T\| := \sup_{\psi \in \mathcal{H}_1 \setminus \{0\}} \frac{\|T(\psi)\|}{\|\psi\|}$$

TEOREMA 1.19. Sean $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert y $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ una aplicación lineal. Son equivalentes:

- (a) T es acotada
- (b) T es de Lipschitz
- (c) T es uniformemente continua
- (d) T es continua
- (e) T es continua en 0

DEMOSTRACIÓN. Todas las implicaciones desde (a) hasta (e) son inmediatas. Suponiendo que T es continua en 0, sea δ un número real positivo tal que para todo ψ en $\mathcal{H}_1$ de norma menor a δ , $\|T(\psi)\| < 1$. Vamos que T es acotado tomando $M = \frac{2}{\delta}$. Es claro que M funciona para el vector nulo. Dado ψ no nulo en $\mathcal{H}_1$, observo que:

$$\left\| \frac{\delta}{2 \cdot \|\psi\|} \psi \right\| < \delta.$$

Ahora bien, por la continuidad en 0, vale que $\|T(\frac{\delta}{2 \cdot \|\psi\|} \psi)\| < 1$; y por ende que:

$$\|T(\psi)\| < \frac{2}{\delta} \cdot \|\psi\| = M \cdot \|\psi\|$$

□

Veamos un ejemplo que será central durante todo este texto:

EJEMPLO 1.20. Dado $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $p \geq 1$. Se define el espacio de funciones L^p como:

$$(1.21) \quad L^p(X, \mathcal{F}, \mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ medible}, \int_X |f|^p \cdot d\mu < \infty\} / \sim,$$

donde $\sim$ denota la relación de equivalencia dada por $f \equiv g \iff f = g$ salvo un conjunto de medida cero. Entonces, L^p resulta un $\mathbb{C}$ -espacio de Banach con la suma y multiplicación de escalares punto a punto y la norma dado, para toda f en L^p por:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \cdot d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Más aún, L^2 resulta un espacio de Hilbert con el producto interno definido para toda f, g en L^2 como:

$$\langle f, g \rangle = \int_X \bar{f}g \cdot d\mu$$

DEMOSTRACIÓN. Para la demostración de que L^p es un espacio de Banach, ver Theorem 4.1.4 en [8]. La verificación de que el producto interno está bien definido es inmediata de la definición. Por otra parte, es directo ver que la norma inducida por el producto interno coincide con la antes definida para los espacios L^p ; y por ende su estructura inducida es la de un espacio de Banach y L^2 resulta un espacio de Hilbert. $\square$

1.1.1. Operador Adjunto.

Motivaciones técnicas descriptas más adelante dan pie a la construcción del llamado operador adjunto, que será clave en la formulación de los postulados en la Mecánica Cuántica. Para ello, requerimos de un resultado previo que da una correspondencia entre los vectores de un Espacio de Hilbert y sus funcionales continuos:

TEOREMA 1.22. (*Teorema de Representación de Riesz*). Dado $\mathcal{H}$ un $\mathbb{K}$ -espacio de Hilbert, y $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ un funcional continuo, entonces existe un único ϕ_T en $\mathcal{H}$ tal que para todo ψ en $\mathcal{H}$ vale que:

$$T(\psi) = \langle \phi_T, \psi \rangle.$$

Más aún, $\|T\| = \|\phi_T\|$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es clara en el caso de que $T = 0$, tomando $\phi_T := 0$. Luego, veamos el caso en el que T es no nula. En tal caso, como T es continuo, $\ker(T) = T^{-1}(\{0\})$ es un subespacio cerrado y propio, y por ende existe un ϕ en $\ker(T)^\perp$ que satisface que $T(\phi) = 1$ (caso contrario dividimos por la norma). Luego, para cualquier ψ en $\mathcal{H}$, por la linealidad vale que $T(\psi - T(\psi) \cdot \phi) = 0$. De esta manera, obtenemos:

$$0 = \langle \phi, \psi - T(\psi) \cdot \phi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle - T(\psi)\|\phi\|^2.$$

Tomando $\phi_T := \frac{\phi}{\|\phi\|^2}$ se satisface lo deseado. Por otra parte, si existiese un ψ_T en $\mathcal{H}$ con la misma propiedad, vale que:

$$\langle \phi_T - \psi_T, \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Luego, necesariamente $\phi_T = \psi_T$, concluyendo la unicidad. Por otra parte, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, vale que para todo ψ no nulo en $\mathcal{H}$,

$$\frac{|T(\psi)|}{\|\psi\|} = \frac{|\langle \phi_T, \psi \rangle|}{\|\psi\|} \leq \|\phi_T\|,$$

Y por lo tanto que

$$\|T\| = \sup_{\psi \in \mathcal{H}_1 \setminus \{0\}} \frac{\|T(\psi)\|}{\|\psi\|} \leq \|\phi_T\|.$$

Para el caso T nula, es claro que $\|T\| = 0$, y para el caso no nula, el supremo se realiza tomando $\psi = \phi_T$, y por ende $\|T\| = \|\phi_T\|$. $\square$

PROPOSICIÓN 1.23. *Sea $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert. Luego, existe un único operador lineal $T^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, llamado **adjunta** de T , tal que para todo ϕ, ψ en $\mathcal{H}$*

$$\langle \phi, T(\psi) \rangle = \langle T^*(\phi), \psi \rangle.$$

Además, la adjunta de T resulta un operador acotado.

DEMOSTRACIÓN. Fijado un ϕ en $\mathcal{H}$, $\langle \phi, T(-) \rangle : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ es un funcional continuo (aplicar la Desigualdad de Cauchy-Schwartz) y por el teorema de representación de Riesz, existe un único $T^*(\phi)$ tal que $\langle \phi, T(\psi) \rangle = \langle T^*(\phi), \psi \rangle$ para todo ψ en $\mathcal{H}$. De la unicidad se desprende la linealidad de la asignación $\psi \mapsto T^*(\psi)$. Adicionalmente, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, para todo ψ en $\mathcal{H}$ vale que:

$$\|T^*(\psi)\|^2 = |\langle \psi, T(T^*(\psi)) \rangle| \leq \|\psi\| \cdot \|T(T^*(\psi))\| \leq \|T^*(\psi)\| \cdot \|\psi\| \cdot \|T\|,$$

de lo cual, se deduce que T^* es acotado y por ende continuo. $\square$

Es posible definir una noción de operador adjunto para el caso no acotado:

DEFINICIÓN 1.24. *Sea $D(T) \subset \mathcal{H}$ un subespacio de un espacio de Hilbert. Un operador $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$ se dice **densamente definido** si $D(T)$ es denso en $\mathcal{H}$.*

PROPOSICIÓN 1.25. *Sea $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$ un operador densamente definido. Entonces existe $D(T^*) \subset \mathcal{H}$ un subespacio vectorial (no necesariamente denso) maximal ² y un único operador $T^* : D(T^*) \rightarrow \mathcal{H}$ tal que para todo ϕ en $D(T^*)$ y para todo ψ en $D(T)$ vale que*

$$\langle \phi, T(\psi) \rangle = \langle T^*(\phi), \psi \rangle$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $D(T^*) := \{\phi \in \mathcal{H} \mid \exists \phi^* \in D(T), \langle \phi, T(\psi) \rangle = \langle \phi^*, \psi \rangle \forall \psi \in D(T)\}$. Es inmediato verificar que $D(T^*)$ es un subespacio vectorial. Más aún, es claro de la definición que resulta ser un subespacio maximal con la propiedad deseada. Veamos que, por la densidad de $D(T)$ en $\mathcal{H}$, dado un $\phi \in D(T^*)$, el ϕ^* es único. Supongamos que existe un ϕ_0^* con la misma propiedad. En ese caso, para todo ψ en $D(T)$, vale que:

$$\langle \phi^* - \phi_0^*, \psi \rangle = 0.$$

²La palabra maximal es utilizada para referirnos a que el subespacio es maximal respecto los subespacios vectoriales que satisfacen que un operador con esa propiedad pueda ser definido.

Con lo cual, vale que $\phi^* - \phi_0^*$ pertenece a $(D(T))^\perp = \mathcal{H}^\perp = 0$; y por lo tanto que $\phi^* = \phi_0^*$. Llamamos $T^* : D(T^*) \rightarrow D(T)$ a la asignación $T^*(\phi) = \phi^*$, que resulta bien definida por la observación anterior. La linealidad de T^* se desprende nuevamente de la densidad de $D(T)$ y de la sesqui-linealidad del producto interno. $\square$

OBSERVACIÓN 1.26. *Notar que si $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$ es un operador densamente definido y acotado, por el Teorema 1.19 resulta uniformemente continuo. De esta forma, toda función uniformemente continua definida en un subespacio denso admite una única extensión uniformemente continua a todo $\mathcal{H}$ (Ver Theorem 52, de [9]). Para dicha extensión, recuperamos la misma adjunta de T^* antes definida.*

OBSERVACIÓN 1.27. *De la sesqui-linealidad del producto interno se desprende que si $T, S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ son operadores acotados y λ es un número complejo, entonces:*

$$(T + S)^* = T^* + S^*, \quad (\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*, \quad \text{y} \quad (T \circ S)^* = S^* \circ T^*.$$

DEFINICIÓN 1.28. *Sea $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$ un operador densamente definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Decimos que T es:*

- **Simétrico** si para todo ϕ, ψ en $D(T)$ vale que $\langle \phi, T(\psi) \rangle = \langle T(\phi), \psi \rangle$.
- **Autoadjunto** si $T = T^*$. En particular, $D(T) = D(T^*)$.
- **Sesqui-autoadjunto** si $T = -T^*$. En particular, $D(T) = D(T^*)$.
- **Unitario** si T es acotado y $T^* \circ T = T \circ T^* = I$. Denotamos $U(\mathcal{H})$ al grupo de operadores unitarios (con la composición) en $\mathcal{H}$.

OBSERVACIÓN 1.29. *En vistas de la definición anterior, es claro que todo operador autoadjunto es simétrico. Sin embargo, para todo operador simétrico T , $D(T) \subset D(T^*)$, pero este último podría ser estrictamente mayor a $D(T)$, haciendo de T y T^* operadores distintos.*

La siguiente proposición captura la utilidad de los operadores unitarios:

PROPOSICIÓN 1.30. *Sea $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador acotado. Entonces T es un operador unitario si y solo si T es sobreyectivo y para todo ϕ, ψ en $\mathcal{H}$*

$$\langle T(\psi), T(\phi) \rangle = \langle \psi, \phi \rangle.$$

En particular, T preserva normas.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que T es unitario y sean ϕ, ψ en $\mathcal{H}$. Por la propiedad de T^* , vale que:

$$\langle T(\psi), T(\phi) \rangle = \langle T^*(T(\psi)), \phi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle.$$

Recíprocamente, y por la igualdad anterior dado un ψ en $\mathcal{H}$, para todo ϕ en $\mathcal{H}$ se satisface que

$$\langle T^*(T(\psi)) - \psi, \phi \rangle = 0.$$

Luego, $T^* \circ T = I$. Como T es sobreyectivo, se concluye que T es un isomorfismo con inversa T^* . $\square$

OBSERVACIÓN 1.31. *La propiedad anterior permite concluir que los operadores unitarios son exactamente los isomorfismos de espacios de Hilbert, según la Definición 1.14.*

De esta forma, resulta que en el estudio de simetrías en Mecánica Cuántica, no solo resultan de interés los operadores unitarios, si no también la siguiente clase de operadores:

DEFINICIÓN 1.32. *Sea $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador sesqui-lineal acotado. Entonces, T se dice **anti-unitario** si T es sobreyectivo y para todo ϕ, ψ en $\mathcal{H}$:*

$$\langle T(\psi), T(\phi) \rangle = \overline{\langle \psi, \phi \rangle}.$$

Gracias al siguiente resultado, los operadores autoadjuntos satisfacen una propiedad técnica que los convierte en los pilares de la Mecánica Cuántica:

PROPOSICIÓN 1.33. *Si $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$ es un operador autoadjunto, todos sus autovalores son reales.*

DEMOSTRACIÓN. Sea ϕ en $D(T)$ un autovector de T con autovalor λ , i.e. $T(\phi) = \lambda \cdot \phi$, con ϕ no nulo. Luego, como $T = T^*$ vale que:

$$\lambda \cdot \langle \phi, \phi \rangle = \langle \phi, T(\phi) \rangle = \langle T(\phi), \phi \rangle = \bar{\lambda} \cdot \langle \phi, \phi \rangle.$$

Como ϕ es no nulo, se sigue que $\langle \phi, \phi \rangle \neq 0$ y por ende que $\lambda = \bar{\lambda}$, concluyendo que λ es un número real. $\square$

Por último, podemos generalizar la definición de autovalores en el caso de operadores no acotados, que va a resultar útil como herramienta de lenguaje:

DEFINICIÓN 1.34. *Sea $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$ un operador densamente definido. El espectro de T , $\text{Spec}(T)$ es el conjunto de números complejos λ , tales que el operador*

$$T - \lambda I : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$$

no tiene una inversa lineal acotada.

Resulta claro que para el caso de dimensión finita, λ es un autovalor de T si y solo si λ pertenece a $\text{Spec}(T)$. Sin embargo, para el caso de operadores en espacios de dimension infinita, la implicación recíproca no es cierta. Además, se puede demostrar que el espectro de operadores no acotados autoadjuntos sigue estando contenido en los números reales (ver Proposition 3.10 de [12]), lo cual generaliza la Proposición 1.1.1.

1.1.2. Producto Tensorial de Espacios de Hilbert.

En la Mecánica Cuántica, el producto tensorial de Espacios de Hilbert servirá para describir sistemas de múltiples partículas, así como los denominados grados

de libertad interna. Recordando la definición y construcción del producto tensorial de espacios vectoriales³, se puede dotar al mismo con una estructura de producto interno como sigue, definiéndola en los tensores elementales y extendiéndola por linealidad:

OBSERVACIÓN 1.35. *Dados dos $\mathbb{C}$ -espacios de Hilbert $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ y $(\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$, su producto tensorial $\mathcal{H}_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_2$ es un espacio vectorial dotado de un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que satisface que para todos ϕ_1, ψ_1 en $\mathcal{H}_1$ y para todos ϕ_2, ψ_2 en $\mathcal{H}_2$*

$$\langle \phi_1 \otimes \phi_2, \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \phi_1, \psi_1 \rangle_1 \cdot \langle \phi_2, \psi_2 \rangle_2.$$

Resulta que no siempre la estructura de espacio con producto interno dada por el producto tensorial *algebraico* da lugar a un espacio de Hilbert. Es decir, el espacio métrico subyacente podría no ser completo. Para arreglar esto, es necesario recurrir a la completación (ver Theorem 57 en [9]) de espacios métricos, dando lugar a la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.36. *Dados dos $\mathbb{C}$ -espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$, se define el **producto tensorial de espacios de Hilbert** sobre $\mathbb{C}$, y se denota $\overline{\mathcal{H}_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_2}$, como la completación de espacios métricos del espacio con producto interno dado por la Observación 1.35.*

PROPOSICIÓN 1.37. *Dados dos espacios de Hilbert, $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ tales que uno de ellos es de dimensión finita. Entonces, su producto tensorial de espacios de Hilbert $\overline{\mathcal{H}_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_2}$ coincide con el producto tensorial $\mathcal{H}_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_2$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathcal{H}_2 \cong \mathbb{C}^n$ para algún n natural o cero. Recordando que el producto tensorial conmuta con los productos finitos y que $\mathcal{H}_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \cong \mathcal{H}_1$, vale que:

$$\mathcal{H}_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_2 \cong \mathcal{H}_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n \cong (\mathcal{H}_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C})^n \cong \mathcal{H}_1^n.$$

Luego, el producto de espacios métricos completos es un espacio métrico completo, y por ende $\mathcal{H}_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_2$ es completo y coincide con su completación, i.e., $\overline{\mathcal{H}_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_2}$. $\square$

De manera análoga al caso en espacios vectoriales, podemos construir una base de Hilbert para el producto tensorial a partir de bases de Hilbert de ambos espacios:

OBSERVACIÓN 1.38. *Si $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son espacios de Hilbert con bases de Hilbert $\{e_i\}_{i \in I}$, $\{f_j\}_{j \in J}$. Luego $\{e_i \otimes f_j\}_{i \in I, j \in J}$ es una base de Hilbert de $\overline{\mathcal{H}_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_2}$.*

Por último, la siguiente proposición permite conseguir operadores acotados en el producto tensorial a partir de operadores acotados en los espacios originales:

PROPOSICIÓN 1.39. *Dados $T_1 : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ y $T_2 : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ dos operadores acotados entre espacios de Hilbert, existe un único operador acotado $T_1 \otimes T_2 : \overline{\mathcal{H}_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_2} \rightarrow \overline{\mathcal{H}_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_2}$ tal que para todo ϕ en $\mathcal{H}_1$ y ψ en $\mathcal{H}_2$*

³Para una construcción con mayor generalidad, ver Chapter VIII, Section 2, de [1].

$$(T_1 \otimes T_2)(\phi \otimes \psi) = T_1(\phi) \otimes T_2(\psi).$$

DEMOSTRACIÓN. Como el producto tensorial algebraico es denso en el producto tensorial de espacios de Hilbert (por ser este último su completación), la existencia y unicidad del morfismo se siguen de la existencia y unicidad para el producto tensorial de espacios vectoriales. Análogamente, para ver que es acotado resta ver que lo es en elementos del producto tensorial algebraico. Por definición del producto interno, se verifica que $\|T_1 \otimes I\| = \|T_1\|$ y $\|I \otimes T_2\| = \|T_2\|$, y de esto se sigue que:

$$\|T_1 \otimes T_2\| = \|(T_1 \otimes I) \circ (I \otimes T_2)\| \leq \|T_1 \otimes I\| \|I \otimes T_2\| = \|T_1\| \|T_2\|.$$

Con lo cual, $T_1 \otimes T_2$ resulta acotado. $\square$

1.2. Postulados de la Mecánica Cuántica

El principal objetivo de esta sección es el de introducir los postulados de la Mecánica Cuántica. No se espera que estos se aborden como axiomas en un sentido matemático; es decir, no vamos a deducir el resto de resultados de la teoría trabajando con estas reglas de manera incuestionable. Si no, los consideraremos como un modelo que intenta describir cómo funciona la física de aquellos sistemas de escala atómica y que se mueven a velocidades no relativistas. Los postulados pretenden describir la noción de *sistema* y *estado* para la Mecánica Cuántica. A su vez, describen cómo las magnitudes físicas se corresponden con estos sistemas desde un punto de vista riguroso, y cuáles son los resultados posibles (y *probables*) durante un proceso de medición. Por último, los llamados postulados dinámicos, desarrollan cómo evolucionan los sistemas en ausencia o presencia de mediciones. El ejemplo más sencillo de un sistema de este tipo es el de un electrón sometido al potencial eléctrico de un protón, sobre el cual pretendemos conocer su posición y estudiar su evolución temporal. ¿Será posible conocer la localización exacta de un electrón en un dado instante con total precisión?

1.2.1. Un primer caso de estudio.

En busca de responder esta pregunta, los físicos del siglo XX contrastaron mediante experiencias que la naturaleza de los electrones (y de sus pares en el mundo subatómico) no era en su totalidad comparable a la de una *partícula*. En concreto, encontraron fuertes similitudes con el comportamiento de la luz, y de las ondas electromagnéticas. Propusieron, entonces, la denominada **dualidad onda-partícula**, que permitió entender matemáticamente a los electrones bajo esta dicotomía. Por otra parte, el denominado experimento de la doble rendija [17] proporcionó evidencia respecto un comportamiento probabilístico y no determinista en los resultados de las mediciones de ciertas magnitudes de estas onda-partículas. En este sentido, predecir la *probabilidad* de un resultado de una medición es el foco central de la Teoría Cuántica desarrollada por la comunidad científica. Estos dos

aspectos claves de la teoría cuántica, serán tenidos en cuenta en la llamada *función de onda* de una partícula. La función de onda de una partícula es una función que toma valores complejos definida en $\mathbb{R}^n$, que estará ligada a los posibles valores que la posición de la partícula puede tomar, y tiene una dependencia temporal regida por una ecuación postulada (la ecuación de Schrodinger). Sin embargo, los experimentos como el de la doble rendija no son consistentes con la suposición de que la función de onda determine algo directamente observable para una partícula individual. En cambio, al realizar un muestreo para una población de partículas en un dado instante, se observa que la densidad de probabilidad para la posición de la partículas viene dado por la amplitud de esa función de onda. La ventaja matemática de modelar sistemas físicos con Espacios de Hilbert, resulta en la cantidad de estructura con la que viene equipada. Las representación matricial de operadores y la ortonormalidad de las bases resultan herramientas muy eficientes para la descripción de los sistemas cuánticos. Acompañado con lo anterior mencionado, el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ resalta como el candidato claro para desarrollar el análisis. De esta forma, proponemos el siguiente caso de estudio modelo, como base para formular los postulados: una partícula realiza trayectoria unidimensional, cuya función de onda a un tiempo fijo está dada por ψ en $L^2(\mathbb{R})$. Según lo mencionado, esperamos que $|\psi(x)|^2$ describa la densidad de probabilidad de la posición de la partícula; y por ende, que la probabilidad de encontrar a la partícula en un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$ esté dada por:

$$\int_E |\psi(x)|^2 dx.$$

Para que este análisis probabilista tenga sentido, surge la condición de que:

$$\|\psi\| = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

Luego, suponiendo que la función $(X\psi)(x) := x\psi(x)$ esté en $L^2(\mathbb{R})$ el valor esperado de la posición de esta partícula puede reescribirse como:

$$\langle \psi, X\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} x |\psi(x)|^2 dx.$$

Con lo cual, en términos del operador lineal $\psi \mapsto X\psi$ y del producto interno, logramos reescribir los valores medios para la posición en el lenguaje de Análisis Funcional que desarrollamos en la sección anterior. Además, impusimos condiciones razonables sobre la función que describe el estado de una partícula: que esté normalizada. De esta manera, el objetivo final es lograr describir todas las magnitudes físicas medibles como el momento, la energía y el momento angular como operadores en algún espacio de Hilbert adecuado, actuando sobre vectores unitarios que describen los estados de un sistema.

1.2.2. Los Postulados.

POSTULADO 1. *Un sistema cuántico viene descrito por un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$. El estado puro de un sistema es representado por un vector unitario ψ , y cualesquiera dos estados puros de un sistema, ψ, ϕ se dice que representan el mismo estado físico si difieren por una constante c compleja: $\psi = c \cdot \phi$.*

Es importante destacar que el Postulado 1 solo hace referencia a los denominados estados puros. Existe una noción más general de estados llamados estados mixtos que no abordaremos en este texto, pero pueden ser consultados en en [7], Chapter 19: Systems and Subsystems, Multiple Particles. Por otra parte, un lector astuto podría cuestionarse al respecto de por qué no considerar como sistema cuántico al Espacio de Hilbert *proyectivo*. Esto es, el conjunto $P(\mathcal{H})$ de vectores no nulos divididos por la relación de equivalencia dada por pertenecer a un mismo rayo.⁴ Dos estados puros de un sistema se dicen equivalentes si difieren por una fase compleja, y por ende, si son el mismo elemento del Hilbert proyectivo. Sin embargo, esto traería serios problemas en la construcción de la teoría. En primer lugar, el espacio de Hilbert proyectivo pierde la estructura de espacio vectorial (no tiene vector nulo) con respecto al Espacio de Hilbert original. Pero además, las fases de los sistemas cobrarán cierta relevancia al analizar las dinámicas de los estados, como veremos más adelante. Por último, por la Proposición 1.20, $L^2(\mathbb{R}^n)$ es un Espacio de Hilbert, pero de hecho se puede demostrar que es separable (ver [2] Exercise 1.4.17); con lo cual, lo postulado resulta consistente con el modelo mencionado anteriormente.

POSTULADO 2. *Para toda magnitud física medible, existe un operador autoadjunto T llamado **observable** para el cual su espectro $\text{Spec}(T)$ corresponde a los posibles resultados de una medición de ese observable.*

En la mayoría de casos de estudio, el operador T resulta ser un operador no acotado. Por ejemplo, el operador X descrito anteriormente, no puede ser definido en todo el espacio, dado que la función $X\psi$ podría no pertenecer a $L^2(\mathbb{R})$ ⁵. Como todas las funciones continuas con dominio compacto son un conjunto denso para el cual el operador X está bien definido, X resulta un operador densamente definido que además es simétrico; lo cual se deduce directamente de su definición. Definamos con total generalidad este operador:

DEFINICIÓN 1.40. *Consideremos el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Se define el **Operador Posición** X_i en la i -ésima componente como:*

$$X_i\psi(x) = x_i\psi(x)$$

⁴Es decir, $\psi \sim \phi \iff \exists c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \psi = c \cdot \phi$

⁵Sencillamente, considerar $\psi(x) = 1/x$. Entonces, ψ pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ pero $X\psi$ no lo hace.

$$\text{Dom}(X_i)^6 = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^n) : x_i \psi(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Con el desarrollo de la Teoría Espectral para operadores no acotados, puede probarse que el operador X es de hecho autoadjunto y su espectro corresponde a todos los números reales (ver Section 6.4, de [7]).

POSTULADO 3. *Si un sistema cuántico se encuentra en un estado puro descrito por ψ , el valor medio de la medición de un observable T , $\langle T \rangle_\psi$ viene dado por:*

$$\langle T \rangle_\psi = \langle \psi, T(\psi) \rangle.$$

Este postulado motiva correctamente la idea de identificar a dos estados puros que difieren por una constante como equivalentes. En particular, si ψ, ϕ son dos estados tales que $\psi = c \cdot \phi$, entonces $|c| = 1$ y de hecho:

$$\langle T \rangle_\psi = \langle \psi, T(\psi) \rangle = \langle c \cdot \phi, T(c \cdot \phi) \rangle = |c|^2 \langle \phi, T(\phi) \rangle = \langle T \rangle_\phi.$$

Con lo cual ψ y ϕ resultan indistinguibles en términos probabilísticos. Además, logramos generalizar lo obtenido en el caso de estudio del operador $\hat{X}$. Si bien la versión expuesta del postulado 3 no determina exactamente cuál es la función de densidad de probabilidad definida sobre el espectro de T , esto puede formularse de manera general usando el Teorema Espectral para operadores no acotados (ver Section 19.4, de [7]). No obstante, un caso sencillo que no requiere de herramientas matemáticas más elaboradas es para aquel donde el espectro coincide con los autovalores de T , en donde la probabilidad de medir λ , un autovalor de T , viene dada por:

$$\mathbb{P}(\lambda)_\psi = |\langle \psi, \pi_\lambda(\psi) \rangle|^2,$$

con π_λ la proyección ortogonal al subespacio de autovectores de autovalor λ .

POSTULADO 4. *Si un sistema cuántico se encuentra inicialmente en un estado ψ_0 y se realiza una medición de un observable T con resultado λ , un autovalor de T entonces inmediatamente luego de la medición el sistema evoluciona a un estado ψ_1 que satisface que:*

$$T(\psi_1) = \lambda \cdot \psi_1.$$

*La evolución de ψ_0 a ψ_1 se conoce como **colapso de la función de onda**.*

Paul Dirac describe al colapso de la función de onda como un cambio discontinuo no en el estado del sistema, si no en nuestra *percepción* del mismo. El término fue acuñado por Heisenberg en su trabajo original de 1927 sobre el Principio de Incertidumbre.

En algún sentido, este postulado dota de consistencia a la evolución temporal de los sistemas, y prepara el terreno para formular los postulados dinámicos.

⁶El dominio es denso ya que contiene a las funciones infinitamente diferenciable con soporte compacto

Juega un rol análogo al de la probabilidad condicional: las demás mediciones realizadas deben ser consistentes con esta misma. En particular, por el Postulado 3, cualquier futura medición instantánea tendrá como valor esperado λ ; y, de hecho, se puede demostrar formulando la función de densidad de probabilidad que la medición retornará λ con probabilidad 1. Para el caso simplificado donde el espectro de T es exactamente el conjunto de sus autovalores, ψ_1 queda determinado por el valor de la proyección al espacio de autovectores:

$$\psi_1 = \frac{\pi_\lambda(\psi_0)}{\|\pi_\lambda(\psi_0)\|}.$$

1.2.3. La Ecuación de Schrödinger.

Siguiendo las bases del Postulado 2, debe existir un operador autoadjunto en el Espacio de Hilbert que representa a nuestro sistema cuántico cuya medición corresponda con la medición de la *energía* del sistema. De manera clásica, la energía puede ser modelada por las ecuaciones de Hamilton, y son extendidas al caso cuántico a través del denominado **Operador Hamiltoniano**, $\hat{H}$, definido, por ejemplo, en algún subconjunto denso adecuado de $L^2(\mathbb{R}^3)$ según:

$$(1.41) \quad \hat{H} = -\frac{\hbar}{2m} \cdot \nabla^2 + V(\hat{X}),$$

donde:

- $\nabla^2 \psi := \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 z}.$
- $V(\hat{X})\psi := V(x, y, z) \cdot \psi$, con $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$, una función suave.⁷
- m la masa del sistema y $\hbar$ la constante de Planck reducida.⁸

El operador ∇^2 es conocido como **Laplaciano** y representa la contribución de energía cinética del sistema en consideración. Por otra parte, la función V introducida se llama la **función de energía potencial** y varía según la naturaleza propia del sistema.

POSTULADO 5. Si $\hat{H}$ es el operador Hamiltoniano asociado a la energía de un sistema, la evolución temporal de un estado ψ en el tiempo viene dado por la **Ecuación de Schrödinger**:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}\psi.$$

⁷Aquí usamos la palabra suave para referirnos a alguna clase de condición como la continuidad o diferenciabilidad que será requerida sobre V sujeta al caso particular de análisis.

⁸ $\hbar = 1,054571817 \times 10^{-34}$ Joules-segundos.

Veremos que este postulado es consistente con los efectos del colapso de la función de onda, introducido en el Postulado 4. Con herramientas del Análisis Funcional, se puede mostrar que la ecuación diferencial de Schrödinger admite la siguiente (única) solución, si ψ_0 es el estado inicial del sistema:

$$\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\cdot t} \cdot \psi_0.$$

Por el momento, la exponenciación del operador Hamiltoniano puede interpretarse como la exponenciación de una matriz, en el caso de un espacio de Hilbert de dimensión finita, a través de la serie de potencias absolutamente convergente de la exponencial. Si ψ_0 es además un autovector de autovalor ϵ del operador hamiltoniano $\hat{H}$, entonces la evolución temporal del sistema viene dada por la siguiente expresión:

$$\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\cdot t} \cdot \psi_0.$$

Según lo establecido por el Postulado 1, a todo tiempo t los estados $\psi(t)$ son equivalentes, pero no son *idénticos*. Estos estados difieren de una fase compleja a la cual se le puede determinar una frecuencia de oscilación, correspondiente al autovalor, o energía ϵ . En el caso de dimensión finita, y como los observables son autoadjuntos, existe una base que diagonaliza $\hat{H}$ y todo estado cuántico es combinación lineal de autovectores del Hamiltoniano. De esta manera, la evolución temporal de los estados involucrará frecuencias características asociadas a las distintas energías de esos autovectores que tendrán interpretaciones físicas apreciables. Por este motivo, se pone en evidencia que para conocer la solución del problema dinámico debe conocerse primero la solución analítica al problema estático, regido por la ecuación de autovectores y autovalores del Hamiltoniano, también llamada **ecuación de Schrödinger independiente del tiempo**:

$$(1.42) \quad \hat{H}\psi = E\psi.$$

Durante este trabajo, desarrollaremos y emplearemos herramientas matemáticas que facilitan, a través de técnicas basadas en el estudio de la simetría de los sistemas, resolver la Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

1.3. El rol de la simetría en la Mecánica Cuántica

La verdadera formalización detrás del concepto de simetría en Mecánica Cuántica surge de que los estados puros del Postulado 1 son en realidad elementos del espacio de Hilbert proyectivo $P(\mathcal{H})$. En particular, en busca de preservar alguna suerte de estructura de producto interno, se define la siguiente asignación:

$$(1.43) \quad \begin{aligned} P(\mathcal{H}) \times P(\mathcal{H}) &\xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} P(\mathbb{C}) \\ ([\phi], [\psi]) &\longmapsto [\langle \phi, \psi \rangle]. \end{aligned}$$

Una sencilla verificación muestra que la asignación está bien definida. De esta forma, obtenemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.44. Sea $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert. Una **simetría** es una función biyectiva $T : P(\mathcal{H}) \rightarrow P(\mathcal{H})$ que cumple:

$$(1.45) \quad \langle T([\phi]), T([\psi]) \rangle = \langle [\phi], [\psi] \rangle.$$

OBSERVACIÓN 1.46. Notemos que la igualdad 1.45 es una igualdad en $P(\mathbb{C})$, en el sentido de la asignación 1.43.

Es claro que todo operador unitario o anti-unitario en $\mathcal{H}$ induce una simetría, de hecho el Teorema de Wigner nos dicen que esas son todas:

TEOREMA 1.47. (**Wigner**) Sea $T : P(\mathcal{H}) \rightarrow P(\mathcal{H})$ una simetría en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces, T es inducida por un operador unitario o anti-unitario

DEMOSTRACIÓN. Ver Chapter 2, Appendix A, de [14]. $\square$

Por el teorema de Wigner ahora podemos hablar directamente de operadores unitarios o anti-unitarios cuando queramos hablar de simetrías. Aquí nos vamos a concentrar en los unitarios ya que son los más frecuentes en la Física de partículas. Los ejemplos de operadores unitarios en cuántica que vamos a ver son las traslaciones espaciales, las traslaciones temporales y las rotaciones. Un ejemplo de un operador anti-unitario relevante es el operador de inversión temporal, que invierte el sentido de la evolución temporal. La idea será construir una noción adicional de simetría que fue elaborada y descrita por Emmy Noether y permitirá relacionar el análisis funcional, la teoría de representaciones y las cantidades conservadas de la Física: las *simetrías continuas uniparamétricas*.

DEFINICIÓN 1.48. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, un **grupo uniparamétrico unitario** sobre $\mathcal{H}$ es una familia de operadores unitarios $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ que verifica que $U(0) = Id$ y $U(s)U(t) = U(t+s)$.

DEFINICIÓN 1.49. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un grupo uniparamétrico unitario sobre $\mathcal{H}$, $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ se dice **fuertemente continuo** si:

$$\lim_{s \rightarrow t} \|U(t)\psi - U(s)\psi\| = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}, \forall s, t \in \mathbb{R}$$

DEFINICIÓN 1.50. Sea $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un grupo uniparamétrico unitario fuertemente continuo sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Se define el **generador infinitesimal** A de $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ como el operador

$$A\psi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{i} \frac{U(t)\psi - \psi}{t}$$

$$Dom(A) = \left\{ \psi \in \mathcal{H} : \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{i} \frac{U(t)\psi - \psi}{t} \right\}$$

La siguiente proposición será central en establecer una correspondencia entre grupos uniparamétricos continuos y operadores autoadjuntos. En particular, muestra que todo operador autoadjunto induce un grupo uniparamétrico continuo por exponenciación:

PROPOSICIÓN 1.51. *Sea A un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces $\{e^{itA}\}_{t \in \mathbb{R}}$ es un grupo uniparamétrico unitario fuertemente continuo y su generador infinitesimal es A ⁹.*

DEMOSTRACIÓN. Ver Proposition 10.14, en [7]. □

EJEMPLO 1.52. *En cuántica, el operador de evolución temporal forma un grupo uniparamétrico unitario fuertemente continuo $\{e^{itH}\}_{t \in \mathbb{R}}$ y su generador infinitesimal es H , el Hamiltoniano. Es decir el Hamiltoniano es el generador infinitesimal de las traslaciones temporales.*

El teorema de Stone, central al trabajar con simetrías en Mecánica Cuántica, muestra que también los grupos uniparamétricos continuos inducen operadores autoadjuntos:

TEOREMA 1.53. (Stone) *Sea $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un grupo uniparamétrico unitario fuertemente continuo sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces, el generador infinitesimal A de $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ está densamente definido, es autoadjunto y $U(t) = e^{itA} \forall t \in \mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver Theorem 10.15, en [7], □

OBSERVACIÓN 1.54. El Teorema de Stone 1.53 nos da una correspondencia:

$$\{\text{Operadores autoadjuntos}\} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{matrix} \{\text{Grupos uniparamétricos fuertemente continuos}\}$$

La ventaja del teorema de Stone en el contexto de Mecánica Cuántica es que, dado un grupo uniparamétrico unitario fuertemente continuo, permite definir observables. A los grupos uniparamétricos fuertemente continuos, los vamos a interpretar como *simetrías continuas*, como por ejemplo las traslaciones o rotaciones. De hecho, vamos a usar las traslaciones espaciales para definir el operador momento lineal. Para eso, necesitamos la siguiente proposición que la enunciamos con toda generalidad:

PROPOSICIÓN 1.55. *Sea $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$, sea $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\{U_{\mathbf{a}}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ dado por*

$$(U_{\mathbf{a}}(t)\psi)(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} + t\mathbf{a})$$

es un grupo uniparamétrico unitario fuertemente continuo y su generador infinitesimal es $P_{\mathbf{a}}$ dado por:

⁹Por el momento, asumir que e^{itA} está bien definido mediante cálculo funcional como una serie de potencias. Más adelante en el trabajo desarrollaremos los detalles para el caso matricial.

$$P_a \psi = -i \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j}$$

$$\text{Dom}(P_a) = \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}^n) : \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^n) \forall 1 \leq j \leq n / a_j \neq 0 \right\},$$

donde las derivadas en $\text{Dom}(P_a)$ se deben entender como derivadas débiles.¹⁰

DEMOSTRACIÓN. Ver Proposition 9.32 y Example 10.16, de [7]. □

DEFINICIÓN 1.56. Se define el operador **momento lineal en i** en $L^2(\mathbb{R}^n)$ como $P_i := P_{e_i}$ dado por la Proposición 1.55.

Es decir, el momento lineal en i es el generador infinitesimal de las traslación espaciales en la dirección del vector canónico i-ésimo.

OBSERVACIÓN 1.57. También podríamos haber definido el operador posición X_i como el asociado a la traslación en i en el espacio de momento¹¹. Si bien esto es matemáticamente correcto resulta poco intuitivo como definición.

Ahora vamos a introducir una noción de simetría que si tiene en cuenta la naturaleza propia del sistema, codificada en el Hamiltoniano:

DEFINICIÓN 1.58. Decimos que un operador unitario $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, dotado de un operador Hamiltoniano $\hat{H}$, es una **simetría del sistema** si, para todo t en $\mathbb{R}$:

$$[e^{itH}, U] = 0.$$

Es decir, si U conmuta con el operador de evolución temporal: la exponenciación del Hamiltoniano.

DEFINICIÓN 1.59. Sea $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un grupo uniparametrico unitario fuertemente continuo sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Se dice que $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es una **simetría continua del sistema** si U_t es una simetría del sistema $\forall t \in \mathbb{R}$

PROPOSICIÓN 1.60. Sea $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un grupo uniparametrico unitario fuertemente continuo sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con generador infinitesimal A . Sea H un Hamiltoniano. Entonces, $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es una simetría continua del sistema si y solo si $[A, H] = 0$

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que:

$$[e^{itH}, e^{isA}] = 0, \forall t, s \in \mathbb{R} \iff [A, H] = 0.$$

La primera dirección es clara de que $e^A e^B = e^{AB}$ si $[A, B] = 0$. Para la implicación recíproca basta derivar en cero.

□

¹⁰Para el lector no familiarizado con la noción es un elemento $\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que cumple $\int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial g}{\partial x_j} = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j} g \forall g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

¹¹I.e. el operador momento es conjugado al operador posición mediante la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Notemos si A es un operador autoadjunto que conmuta con el Hamiltoniano, entonces conmuta con el operador de evolución temporal y resulta ser una cantidad conservada en el siguiente sentido: dado ψ_0 un estado a tiempo cero y ψ un estado del sistema a tiempo t , vale, por el Ejemplo 1.52, que

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi, A\psi \rangle = \langle e^{-\frac{it}{\hbar}H}\psi_0, e^{-\frac{it}{\hbar}H}A\psi_0 \rangle = \langle \psi(0), A\psi(0) \rangle = \langle A \rangle_{\psi_0}.$$

De manera general, pero como un caso particular del teorema de Stone, tenemos el **teorema de Noether** en Mecánica Cuántica que establece la siguiente correspondencia:

$$\{\text{Cantidades conservadas}\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\ \xleftarrow{\hspace{1cm}} \end{array} \{\text{Simetrías continuas del sistema}\}$$

Hasta el momento, la noción de simetría continua del sistema establecida refiere a una noción *uniparamétrica*. ¿Qué sería, entonces, una simetría continua en general? La definición de grupo uniparamétrico unitario se puede interpretar como un morfismo de grupos con dominio $\mathbb{R}$ y codominio $U(\mathcal{H})$. Las simetrías continuas equipan a ese morfismo de propiedades topológicas adicionales, como la continuidad fuerte. En busca de una generalización, trabajaremos con la noción de grupo de Lie: una noción particular de grupo dotada de estructura diferencial, también llamados grupos continuos. En particular, estudiaremos las rotaciones donde el grupo de Lie en cuestión es $SO(3)$ y desarrollaremos la teoría de momento angular, fundada en el Teorema de Stone.

Capítulo 2

Teoría de Representaciones

*Groups, as men, will be known
by their actions.*

G. Moreno.

La Teoría de Representaciones es una rama de la matemática que identifica, a través de morfismos que preservan cierta estructura algebraica, los elementos de esa estructura abstracta como transformaciones lineales. A esta altura del partido, no debería ser una sorpresa que la teoría de representaciones será de gran ayuda al tratar con diversos problemas de la Mecánica Cuántica. En particular, su labor principal será describir cómo la estructura algebraica que describe las simetrías de un sistema cuántico afecta las soluciones de las ecuaciones que describen ese sistema.

2.1. Grupos y Álgebras de Lie

La idea principal de este capítulo será familiarizarse con nociones básicas de grupos de Lie matriciales y sus álgebras de Lie inducidas, en un sentido que precisaremos más adelante. Si bien este resulta un caso particular de una teoría desarrollada de manera mucho más general en el área de Geometría Diferencial, nos aportará las herramientas adecuadas para establecer un puente justo entre la física de las simetrías y la geometría abstracta.

2.1.1. Definiciones y Ejemplos.

Comencemos por recordar las nociones topológicas básicas de los espacios matriciales:

OBSERVACIÓN 2.1. *Las matrices con coeficientes complejos de dimensión n , notadas $M_n(\mathbb{C})$, son un espacio topológico con la topología heredada por $\mathbb{C}^{n^2}$. Además, $\det(-) : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua, por ser un polinomio en las entradas de la matriz, lo que hace de $GL(n, \mathbb{C}) = \det(-)^{-1}(\mathbb{C} - \{0\})$, las matrices inversibles, un abierto. Más aún, $(GL(n, \mathbb{C}), \cdot)$ es un grupo con el producto de matrices.*

DEFINICIÓN 2.2. Un subgrupo $G \leq GL(n, \mathbb{C})$ cerrado en la topología de subespacio se dice **Grupo de Lie Matricial**. Un morfismo de grupos continuo entre grupos de Lie matriciales se dice **morfismo de grupos de Lie**¹.

Mostremos algunos ejemplos de grupos de Lie matriciales y sus propiedades topológicas relevantes para la Mecánica Cuántica, en tanto su interpretación física respecto las simetrías y rotaciones:

EJEMPLO 2.3. Es fácil verificar, utilizando, entre otras cosas, la continuidad de la aplicación $A \mapsto AA^*$ que los siguientes son grupos de Lie matriciales compactos:

- $U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}), AA^* = A^*A = I\}$ el grupo de matrices **unitarias**.
- $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), AA^* = A^*A = I\}$ el grupo de matrices **ortogonales**.
- $SU(n) = \{A \in U(n), \det(A) = 1\}$ el grupo **especial** de matrices unitarias.
- $SO(n) = \{A \in O(n), \det(A) = 1\}$ el grupo **especial** de matrices ortogonales.

EJEMPLO 2.4. $SU(2) \cong S^3 \subset \mathbb{C}^2$ como espacio topológico. En particular, $SU(2)$ es simplemente conexo.

DEMOSTRACIÓN. Es directo verificar que:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Más aún, se puede verificar que la siguiente asignación es un homeomorfismo:

$$\begin{aligned} SU(2) &\longrightarrow S^3 \\ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} &\longmapsto (\alpha, \beta). \end{aligned}$$

□

A priori, no es usual que un espacio vectorial sea dotado de una operación binaria conmutativa adicional, como lo es el producto de anillos para el caso de un grupo abeliano. Sin embargo, existe una generalización del caso del producto vectorial en $\mathbb{R}^3$ que está fuertemente ligado al concepto de Grupos de Lie recién introducido, y que será fundamental en el desarrollo de esta teoría de representaciones:

DEFINICIÓN 2.5. Un **Álgebra de Lie** $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ es un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial dotado de un **Corchete de Lie** $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que verifica:

1. $[\cdot, \cdot]$ es bilineal.
2. $[X, X] = 0$ para todo X en $\mathfrak{g}$.
3. **Identidad de Jacobi:** $[X, [Y, Z]] + [Y, [X, Z]] + [Z, [X, Y]] = 0$ para todos X, Y, Z en $\mathfrak{g}$.

¹Esta definición es un caso particular de un grupo de Lie abstracto y, aunque no lo veremos, vale que un morfismo continuo de grupos de Lie es *diferenciable*; lo cual es una versión del quinto problema de Hilbert.

EJEMPLO 2.6. Toda álgebra asociativa $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie vía el corchete de Lie dado, para cada X, Y en $\mathfrak{g}$, por:

$$[X, Y] = XY - YX.$$

DEFINICIÓN 2.7. Dadas dos $\mathbb{K}$ -álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$, entonces una transformación lineal $\phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ es un **morfismo de álgebras de Lie** si se verifica que para todos X, Y en $\mathfrak{g}_1$:

$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)].$$

Por último, y de manera análoga al caso de espacios vectoriales con cualquier tipo de estructura adicional, se tienen las siguientes nociones de suma directa y producto tensorial:

DEFINICIÓN 2.8. Dadas dos $\mathbb{K}$ -álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$, se define la **suma directa de álgebras de Lie** como el espacio vectorial $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ dotado del siguiente corchete de Lie, dado para cada $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)$ en $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ por:

$$[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] = ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2]).$$

Además, se define el **producto tensorial de álgebras de Lie** como el espacio vectorial $\mathfrak{g}_1 \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}_2$ dotado del siguiente corchete de Lie, definido para cada tensor elemental $X_1 \otimes X_2, Y_1 \otimes Y_2$ en $\mathfrak{g}_1 \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}_2$ como:

$$[X_1 \otimes X_2, Y_1 \otimes Y_2] = [X_1, Y_1] \otimes [X_2, Y_2].$$

2.1.2. Exponenciación de matrices.

Para vincular las dos estructuras algebraicas mencionadas anteriormente, desarrollaremos la teoría de exponenciación de matrices con el fin de asociar un álgebra de Lie para cada grupo de Lie matricial.

DEFINICIÓN 2.9. Dada una matriz X en $M_n(\mathbb{C})$, se define la exponencial $e^X \in M_n(\mathbb{C})$ como:

$$e^X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!}.$$

OBSERVACIÓN 2.10. La exponencial de una matriz está bien definida porque en el espacio de Banach $(M_n(\mathbb{C}), \| \cdot \|)$, con la norma usual de $\mathbb{C}^{n^2}$, la serie de la exponencial es absolutamente convergente para toda matriz. Luego, se sigue que la serie de potencias tiene radio de convergencia infinito. Más aún, la función exponencial definida por la serie de potencias es analítica y por ende infinitamente diferenciable.

De la definición anterior, se desprenden propiedades esenciales de la exponencial:

PROPOSICIÓN 2.11. Para todas matrices X, Y en $M_n(\mathbb{C})$ y A en $GL(n, \mathbb{C})$ se verifica que:

1. $e^0 = I$
2. $(e^X)^t = e^{X^t}$ y $(e^X)^* = e^{X^*}$

3. $e^{AXA^{-1}} = Ae^XA^{-1}$
4. $\det(e^X) = e^{\text{tr}(X)}$
5. Si $XY = YX$ entonces $e^{X+Y} = e^Xe^Y$
6. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

DEMOSTRACIÓN. Los ítems (1), (2) y (3) son inmediatos de la Definición 2.9. La propiedad (4) tiene dos demostraciones posibles: por un lado, se sigue de su validez para bloques de Jordan, y luego usando la descomposición en una base de Jordan; o también por la densidad de las matrices diagonales y por continuidad de la exponencial, el determinante y la traza. Por último, el ítem (6) es consecuencia directa del ítem (5), que se sigue de la expresión del producto de Cauchy para las series. $\square$

De manera análoga a la Definición 1.48, el siguiente resultado será fundamental en lograr inducir un álgebra de Lie a partir de un grupo de Lie.

DEFINICIÓN 2.12. Un **subgrupo uniparamétrico** de $GL(n, \mathbb{C})$ es un morfismo de grupos continuo de $\mathbb{R}$ en $GL(n, \mathbb{C})$. Es decir, una función continua $A : \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ tal que $A(0) = I$ y $A(s+t) = A(s)A(t)$ para todos s, t en $\mathbb{R}$.

TEOREMA 2.13. Si A es un subgrupo uniparamétrico de $GL(n, \mathbb{C})$, entonces existe un único X en $M_n(\mathbb{C})$ tal que para todo t en $\mathbb{R}$:

$$A(t) = e^{tX}.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración puede hallarse en el Teorema 2.13 de [6]. $\square$

2.1.3. El álgebra de Lie inducida por un grupo de Lie.

El siguiente paso es asociar un álgebra de Lie para cada grupo de Lie matricial:

DEFINICIÓN 2.14. Dado $G \leq GL(n, \mathbb{C})$ un grupo de Lie matricial, se define el álgebra de Lie inducida $\mathfrak{g}$ como:

$$\mathfrak{g} := \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid e^{tX} \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Equivalentemente, el álgebra de Lie inducida por G se construye por aquellas matrices para las cuales su subgrupo uniparamétrico asociado está contenido en G . Verifiquemos que efectivamente la Definición 2.14 da lugar a un álgebra de Lie:

PROPOSICIÓN 2.15. Sea $G \leq GL(n, \mathbb{C})$ un grupo de Lie matricial. Entonces $\mathfrak{g}$, su álgebra de Lie inducida por la Definición 2.14, es una $\mathbb{R}$ -álgebra de Lie con el conmutador de matrices.

DEMOSTRACIÓN. De la definición resulta inmediato que $\mathfrak{g}$ es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Veamos que el conmutador está bien definido. Es decir, que dadas $X, Y \in \mathfrak{g}$, entonces $[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{g}$. Del ítem (3) de la Proposición 2.11, se sigue que para cualquier A en G , vale que $AYA^{-1} \in G$. Más aún, la Observación 2.10 permite calcular el conmutador, usando la regla para el producto de la diferenciación:

$$[X, Y] = \frac{d}{dt} e^{tX} Y e^{-tX} \Big|_{t=0}.$$

□

Más aún, como $\mathfrak{g}$ es un subespacio real de $M_n(\mathbb{C})$, es topológicamente cerrado y vale que:

$$[X, Y] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hX} Y e^{-hX} - Y}{h} \in \mathfrak{g}.$$

Tomaremos la convención de referirnos a las álgebras de Lie inducidas en minúscula cursiva, mientras que los grupos de Lie en mayúscula imprenta. Veamos algunos ejemplos de Álgebras de Lie inducidas:

EJEMPLO 2.16. *Directamente de la definición, y utilizando la Proposición 2.11, se sigue que:*

- $gl(n, \mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$,
- $gl(n, \mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$,
- $sl(n, \mathbb{C}) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid tr(X) = 0\}$,
- $sl(n, \mathbb{R}) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid tr(X) = 0\}$.

Por último, veamos las álgebras de Lie inducidas para cada grupo de Lie matricial del Ejemplo 2.3:

EJEMPLO 2.17. *Las álgebras de Lie inducidas por $U(n)$, $O(n)$, $SU(n)$ y $SO(n)$ vienen dadas por:*

- $u(n) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X^* = -X\}$,
- $o(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^t = -X\}$,
- $su(n) = \{X \in u(n) \mid tr(X) = 0\}$,
- $so(n) = o(n)$.

DEMOSTRACIÓN. Para el primer ejemplo, usando la Proposición 2.11, se sigue que si $X^* = -X$, entonces:

$$(e^{tX})^* = e^{tX^*} = e^{-tX} = (e^{tX})^{-1}.$$

Recíprocamente, se obtiene diferenciando en $t = 0$ que si $(e^{tX})^* = (e^{tX})^{-1}$, entonces $X^* = -X$. El tercer ejemplo se deduce inmediatamente usando el ítem (4) de la Proposición 2.11. El cálculo para $O(n)$ es análogo. Más aún, la condición $X^t = -X$ implica que $tr(X) = 0$ y ese es el motivo por el cual $so(n) = o(n)$. □

2.1.4. Correspondencia entre Grupos y Álgebras de Lie.

El objetivo de esta sección será explorar cómo se corresponden los grupos y álgebras de Lie. En particular, una de las principales preguntas a responder será si las álgebras de Lie inducidas clasifican, a menos de isomorfismos, a los grupos de Lie. En primer lugar, veamos que la asignación de la Definición 2.14 establece

una correspondencia entre morfismos de grupos de Lie y morfismos de álgebras de Lie de manera *funtorial*:²

TEOREMA 2.18. *Dado un morfismo $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$ de grupos de Lie, existe un único morfismo $L_\Phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ entre las álgebras de Lie inducidas que verifica que para todo X en $\mathfrak{g}$ y todo t en $\mathbb{R}$:*

$$\Phi(e^{tX}) = e^{tL_\Phi(X)}.$$

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\Phi} & G_2 \\ \uparrow \exp(t-) & & \uparrow \exp(t-) \\ \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{L_\Phi} & \mathfrak{g}_2 \end{array}$$

Más aún, esta correspondencia preserva la composición e identidades. Es decir, dadas Φ_1 y Φ_2 morfismos de grupos de Lie componibles, se tiene que:

$$L_{\Phi_2 \circ \Phi_1} = L_{\Phi_2} \circ L_{\Phi_1},$$

y además:

$$L_{1_G} = 1_{\mathfrak{g}}$$

DEMOSTRACIÓN. Observar que para cada $X \in \mathfrak{g}_1$ la asignación $A(t) = \phi(e^{tX})$ es un subgrupo uniparamétrico. Luego, el Teorema 2.13 dice que existe un único $Y \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $\phi(e^{tX}) = e^{tY}$. De esta forma, $Y \in \mathfrak{g}_2$ y definimos $L_\Phi(X) := Y$. De la unicidad se desprende que el morfismo definido es una transformación lineal. Por otra parte, por el ítem (3) de la Proposición 2.11 el morfismo definido verifica que para todos X en $\mathfrak{g}_1$ y A en G_1 :

$$\Phi(A)L_\Phi(X)\Phi(A)^{-1} = L_\Phi(AXA^{-1}).$$

Más aún, es un morfismo de álgebras de Lie pues dados $X, Y \in G_1$, usando la igualdad anterior, se deduce que:

$$[L_\Phi(X), L_\Phi(Y)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hL_\Phi(X)}L_\Phi(Y)e^{-hL_\Phi(X)} - L_\Phi(Y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} L_\Phi\left(\frac{e^{hX}Ye^{-hX} - Y}{h}\right).$$

Luego, como $M_n(\mathbb{C})$ es de dimensión finita y L_Φ es lineal, se deduce que es continua y por ende que:

$$[L_\Phi(X), L_\Phi(Y)] = L_\Phi\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hX}Ye^{-hX} - Y}{h}\right) = L_\Phi([X, Y]).$$

²Para el lector no familiarizado con el lenguaje categórico, tan solo interpretarlo como una etiqueta utilizada para referirse a la propiedad del Teorema 2.18.

Finalmente, de la unicidad en el Teorema 2.13 se deduce que la asignación preserva composiciones y la identidad. $\square$

Una asignación que preserva composiciones e identidades es denominada **functor**. De esta propiedad, se deduce inmediatamente el siguiente corolario:

COROLARIO 2.19. *Dos álgebras de Lie asociadas a grupos de Lie isomorfos son isomorfas.*

De acá en adelante, usaremos la convención de notar $\varphi = L_\Phi$ al morfismo de álgebras de Lie inducido por un morfismo de grupos de Lie. Las propiedades analíticas de la exponencial permiten obtener una fórmula para calcular explícitamente el morfismo inducido por funtorialidad:

COROLARIO 2.20. *Dado $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$ un morfismo de grupos de Lie, se verifica para todo X en $\mathfrak{g}_1$ la siguiente fórmula:*

$$\varphi(X) = \frac{d}{dt} \Phi(e^{tX})|_{t=0}.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es inmediata de la Observación 2.10 y usar la regla de la cadena. $\square$

A continuación mejoraremos las propiedades del functor introducido anteriormente. Para eso, nos aprovecharemos de las propiedades topológicas (y en particular diferenciales) de la exponencial. El siguiente resultado muestra que la exponencial es localmente un difeomorfismo (homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable):

TEOREMA 2.21. *Sea G un grupo de Lie matricial. Luego, existe un abierto U de $M_n(\mathbb{C})$ que contiene al 0 y un abierto V de $M_n(\mathbb{C})$ que contiene a I tales que la exponencial $\exp(-) : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo y que verifican que para todo X en U :*

$$X \in \mathfrak{g} \iff e^X \in G$$

DEMOSTRACIÓN. Ver Theorem 2.27, en [6]. $\square$

Utilizando que la multiplicación a izquierda en un grupo de Lie es un difeomorfismo, podemos trasladar el entorno de la identidad a un entorno de cualquier elemento de G . De esta forma, se tiene el siguiente corolario:

COROLARIO 2.22. *Todo grupo de Lie matricial es una subvariedad embebida real de $M_n(\mathbb{C})$ con dimensión igual a la de $\mathfrak{g}$ como espacio vectorial real. Es decir, para todo A en G existe un entorno U en $M_n(\mathbb{C})$ de A y un difeomorfismo Φ con un entorno V del 0 en $M_n(\mathbb{C})$ tal que $\Phi(U \cap G) = V \cap \mathbb{R}^d$, con $d = \dim \mathfrak{g}$.*

En particular, el Corolario 2.22 garantiza propiedades topológicas locales sobre los grupos de Lie:

COROLARIO 2.23. *Todo grupo matricial de Lie es localmente arcoconexo. En particular, G es conexo si y solo si G es arcoconexo.*

COROLARIO 2.24. *Sea G un grupo de Lie conexo. Entonces, para todo A en G existen $X_1, \dots, X_n$ en $\mathfrak{g}$, el álgebra de Lie inducida por G , tales que:*

$$A = e^{X_1} \dots e^{X_n}.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos U el conjunto de todos los puntos de G que verifican el lema y probemos que es abierto y cerrado en G . Si A pertenece a U , tomamos un entorno de A como en el Corolario 2.22. Luego, para todo $B \in G$ en el entorno, $A^{-1}B \in G$ pertenece a un entorno a la identidad que, por el Teorema 2.21, se escribe como la exponencial de la matriz, lo cual concluye que B también lo hace; y por ende que U es abierto. Análogamente, si A pertenece a la clausura de U , existe un $B \in U$ tal que $AB^{-1} \in G$ pertenece al entorno de la identidad en G y por ende se puede escribir como una exponencial, lo cual concluye que A pertenece a U . $\square$

El siguiente corolario muestra que en el caso de grupos de Lie conexos los morfismos de grupos de Lie quedan definidos, a menos de isomorfismos, por los correspondientes en sus álgebras de Lie inducidas.

COROLARIO 2.25. *Sean $\Phi_1, \Phi_2 : G_1 \rightarrow G_2$ morfismos de grupos de Lie y $\varphi_1, \varphi_2 : G_1 \rightarrow G_2$ sus morfismos de álgebras de Lie asociados. Si G_1 es conexo, vale la siguiente implicación³:*

$$\varphi_1 = \varphi_2 \implies \Phi_1 = \Phi_2.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado A en G_1 , por el Corolario 2.24 existen $X_1, \dots, X_n$ en $\mathfrak{g}$, el álgebra de Lie inducida por G , tales que $A = e^{X_1} \dots e^{X_n}$. Luego, el resultado se sigue de la siguiente igualdad:

$$\Phi_1(e^{X_1}) \dots \Phi_1(e^{X_n}) = e^{\varphi_1(X_1)} \dots e^{\varphi_1(X_n)} = e^{\varphi_2(X_1)} \dots e^{\varphi_2(X_n)} = \Phi_2(e^{X_1}) \dots \Phi_2(e^{X_n}).$$

$\square$

Dado este punto, encontramos condiciones para las cuáles los morfismos de grupos de Lie quedan determinados por sus inducidos entre álgebras de Lie. Una buena pregunta a responder es si podemos ir en la dirección opuesta: hallar condiciones para las cuales, dado un morfismo entre álgebras de Lie inducidas, exista un morfismo entre los grupos de Lie matriciales que induzca ese morfismo. El siguiente resultado, muestra condiciones para las cuáles podemos hacer esto:

TEOREMA 2.26. *Dados G_1 y G_2 grupos de Lie matriciales con álgebras de Lie inducidas $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$, y dado un morfismo $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$; si G_1 es simplemente conexo, entonces existe⁴ un (único, por el Corolario 2.25) morfismo de grupos de Lie $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$ que están relacionados según la asignación del Teorema 2.18*

³En lenguaje categórico, esto significa que el funtor es fiel en los grupos de Lie conexos

⁴En lenguaje categórico, esto significa que el funtor es plenamente fiel en los grupos de Lie simplemente conexos, además vale que la categoría de grupos de Lie simplemente conexos es equivalente a la de álgebras de Lie

DEMOSTRACIÓN. La idea de esta prueba es usar la *fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff*, que dice que para X, Y de norma pequeña, vale una expansión para el producto de exponenciales en función de los conmutadores:

$$e^X e^Y = e^{X+Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] + \dots}$$

La fórmula es utilizada para construir un morfismo local, relacionado por functorialidad con φ , entre entornos de la identidad de G_1 y de G_2 . Luego, utilizando la simple-conexión del dominio, se puede extender el morfismo a todo G_1 . Para los detalles, ver Section 3.6, de [6]. $\square$

Resulta que en el caso de grupos de Lie matriciales simplemente conexos, los mismos quedan determinados por sus álgebras de Lie inducidas:

COROLARIO 2.27. *Todo par G_1, G_2 de grupos de Lie matriciales simplemente conexos con álgebras de Lie inducidas $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ isomorfas resultan isomorfos.*

DEMOSTRACIÓN. En consecuencia del Teorema 2.26, el isomorfismo entre dos álgebras de Lie inducidas y su inversa tienen una preimagen cuya composición induce la identidad en cada álgebra de Lie y, por el Teorema 2.25, necesariamente implica que la composición a ambos lados coincide con la identidad de cada grupo de Lie. $\square$

El resultado anterior no es cierto en el caso de retirar las hipótesis de simple-conexión sobre los grupos de Lie. El siguiente ejemplo es central en el desarrollo de la teoría de Representaciones relevante en Mecánica Cúantica:

EJEMPLO 2.28. *Las álgebras de Lie $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{so}(3)$ son isomorfas, pero los grupos de Lie $SU(2)$ y $SO(3)$ no lo son.*

DEMOSTRACIÓN. Es directo verificar que las siguientes matrices forman una base de $\mathfrak{so}(3)$, según la descripción del Ejemplo 2.17:

$$F_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad F_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad F_3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Más aún, las matrices verifican las siguientes relaciones de conmutación:

$$[F_1, F_2] = F_3; \quad [F_2, F_3] = F_1; \quad [F_3, F_1] = F_2.$$

De manera análoga, teniendo en cuenta el Ejemplo 2.17, podemos considerar la siguiente base de $\mathfrak{su}(2)$:

$$E_1 := \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad E_2 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_3 := \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta base verifica las siguientes relaciones de conmutación análogas:

$$[E_1, E_2] = E_3; \quad [E_2, E_3] = E_1; \quad [E_3, E_1] = E_2.$$

De esta manera, es posible definir un isomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : su(2) \rightarrow so(3)$ de manera tal que $\varphi(E_i) = F_i$ para cada $i = 1, 2, 3$, extendiéndolo por linealidad, pues se preservan las relaciones de conmutación. Por otra parte, los grupos de Lie $SU(2)$ y $SO(3)$ no son isomorfos pues se puede verificar que el centro de $SO(3)$ es el grupo trivial, mientras que el centro de $SU(2)$ contiene, al menos, a I y a $-I$. $\square$

PROPOSICIÓN 2.29. *Existe un único morfismo $\Phi : SU(2) \rightarrow SO(3)$ que induce al morfismo $\varphi : su(2) \rightarrow so(3)$ del Ejemplo 2.28. Más aún, el morfismo es sobreyectivo y su kernel viene dado por $\ker \Phi = \{I, -I\}$*

DEMOSTRACIÓN. Como $SU(2) \cong S^3$, y por ende es simplemente conexo, por el Teorema 2.26 existe un único morfismo $\Phi : SU(2) \rightarrow SO(3)$ que induce al morfismo $\varphi : su(2) \rightarrow so(3)$ del Ejemplo 2.28. La verificación de la segunda parte se puede encontrar en Example 16.34, de [7]. $\square$

2.2. Representaciones de Grupos y Álgebras de Lie

Recordando que una acción de un grupo sobre un conjunto es un morfismo entre el grupo mismo y el grupo de permutaciones del conjunto, las *representaciones* pueden interpretarse como acciones lineales sobre un conjunto equipado de estructura de espacio vectorial. En el sencillo caso de acciones de grupos, identificamos a los elementos del grupo dado con funciones biyectivas de un conjunto en sí mismo. Aquí, en busca de favorecernos por las herramientas del Álgebra Lineal, identificaremos a los elementos de un grupo con endomorfismos lineales inversibles de un espacio vectorial. Adicionalmente, en este contexto trabajaremos con representaciones de grupos y álgebras de Lie, por lo que pediremos que esta acción preserve cada una de las estructuras algebraicas, respectivamente.

2.2.1. Representaciones en dimensión finita.

Un ejemplo importante de las aplicaciones de teoría de representaciones en Mecánica Cuántica resulta en el estudio de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. En particular, se dice que el Hamiltoniano es *invariante por rotaciones*, si al aplicar una rotación en el espacio a una función de onda que sea solución, obtenemos otra solución de la ecuación de autovectores y autovalores $\hat{H}\psi = E\psi$. Si bien el espacio de Hilbert en consideración es usualmente de dimensión infinita (por ejemplo, $L^2(\mathbb{R}^3)$), el espacio de soluciones de la ecuación anterior, en el caso de un Hamiltoniano invariante por rotaciones, es típicamente de dimensión finita, y constituyen las representaciones de $SO(n)$, para algún n adecuado. De esta forma, es preciso comprender las representaciones de grupos y álgebras de Lie sobre un espacio vectorial de dimensión finita para avanzar en la tarea de resolver las ecuaciones del sistema cuántico en cuestión.

DEFINICIÓN 2.30. Dado $G \leq GL(n, \mathbb{C})$ un grupo matricial de Lie, una **representación de dimensión finita** es un morfismo de grupos de Lie $\Pi : G \rightarrow GL(V)$, con V un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión finita.

DEFINICIÓN 2.31. Dada una $\mathbb{R}$ -álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, una **representación de dimensión finita de un álgebra de Lie** es un morfismo de $\mathbb{R}$ -álgebras de Lie $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$, donde V es un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial y $gl(V)$ viene equipado del corchete de Lie dado por el conmutador.

En particular, eligiendo una base (un isomorfismo con $\mathbb{C}^n$) para el espacio vectorial de dimensión finita, las representaciones de grupos y álgebras de Lie están relacionadas según el Teorema 2.18:

OBSERVACIÓN 2.32. Si $\Pi : G \rightarrow GL(V)$ es un morfismo de representaciones y tomamos una base para V , obtenemos un morfismo de grupos de Lie entre G y $GL(n, \mathbb{C})$ e, identificando mediante la base a $gl(n, \mathbb{C})$ con $gl(V)$, obtenemos una representación $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$ que verifica que para todo X en $\mathfrak{g}$:

$$\Pi(e^X) = e^{\pi(X)}.$$

Más aún, si G es simplemente conexo el Teorema 2.26 implica que dada una representación de su álgebra de Lie inducida es posible obtener una representación de grupos de Lie relacionada por funtorialidad en este mismo sentido.

Por otra parte, se tiene una noción de morfismo de representaciones que permite compararlas:

DEFINICIÓN 2.33. Dadas $\Pi_1 : G \rightarrow V_1$ y $\Pi_2 : G \rightarrow V_2$ dos representaciones de un grupo de Lie matricial G , una transformación lineal $\Phi : V_1 \rightarrow V_2$ se dice un **morfismo de representaciones** si para todo g en G y v en V vale que:

$$\Phi(\Pi_1(g)v) = \Pi_2(g)\Phi(v).$$

En particular, si Φ es inversible como transformación lineal se dice que es un **isomorfismo de representaciones**, y en este caso, las representaciones se dicen **isomorfas**. Se tienen las definiciones análogas para representaciones de álgebras de Lie.

Resulta de especial interés la siguiente clase de representaciones:

DEFINICIÓN 2.34. Sean V un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión finita, G un grupo de Lie matricial, $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\Pi : G \rightarrow GL(V)$ y $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$ representaciones de grupos y álgebras de Lie, respectivamente. Un subespacio $W \subset V$ se dice que es **Π -invariante** si para todo g en G , vale que $\Pi(g)(W) \subset W$. Además, W se dice **π -invariante** si para todo X en $\mathfrak{g}$ vale que $\pi(X)(W) \subset W$. Más aún, una representación de grupos o álgebras de Lie se dice **irreducible** si sus únicos subespacios invariantes son V y 0 .

PROPOSICIÓN 2.35. Sean G un grupo matricial de Lie conexo con álgebra de Lie asociada $\mathfrak{g}$ y $\Pi : G \rightarrow GL(V)$ es una representación de dimensión finita con $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$

su representación de álgebras de Lie inducidas. Entonces, un subespacio $W \subset V$ es Π -invariante si y solo si es π -invariante. En particular, Π es irreducible si y solo si π lo es. Más aún, dos representaciones de G son isomorfas si y solo si las representaciones inducidas de $\mathfrak{g}$ lo son.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $W \subset V$ es π -invariante. Luego, es claro que, para todo m entero no negativo y para todo X en $\mathfrak{g}$, W es invariante por $\pi(X)^m$. Como V es de dimensión finita, W es cerrado y por ende W es invariante por:

$$\Pi(e^X) = e^{\pi(X)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\pi(X)^m}{m!}.$$

Como G es conexo, por el Corolario 2.24, todo elemento se escribe como producto de exponenciales y por ende W es Π -invariante. Recíprocamente, si W es Π -invariante, como W es cerrado se obtiene diferenciando que, para todo X en $\mathfrak{g}$, W es invariante por:

$$\pi(X) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hX} - I}{h}.$$

Por último, un argumento análogo muestra que si $\Pi_1 : G \rightarrow GL(V_1)$ y $\Pi_2 : G \rightarrow GL(V_2)$ son representaciones de dimensión finita de G con representaciones inducidas π_1 y π_2 en sus álgebras de Lie, y $\Phi : V_1 \rightarrow V_2$ es un isomorfismo lineal, entonces para todo v en V_1 :

$$\Phi(\Pi_1(A)v) = \pi_2(A)\Phi(v), \quad \forall A \in G \iff \Phi(\pi_1(X)v) = \pi_2(X)\Phi(v), \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

□

A continuación, presentamos el teorema central de esta sección. Utilizaremos el abuso de notación de referirnos a una representación de grupos o álgebras de Lie únicamente como al espacio vectorial V sobre el cual se realiza la representación.

TEOREMA 2.36. (Lema de Schur) Sean V_1 y V_2 dos representaciones irreducibles de grupos o álgebras de Lie. Vale que:

1. Si $\Phi : V_1 \rightarrow V_2$ es un morfismo de representaciones, entonces $\Phi = 0$ ó un isomorfismo.
2. Si $\Phi : V_1 \rightarrow V_2$ y $\Psi : V_1 \rightarrow V_2$ son morfismos de representaciones no nulos, entonces existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $\Phi = \lambda\Psi$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, es directo verificar que tanto el núcleo como la imagen de Φ son subespacios invariantes por la representación en V_1 y en V_2 , respectivamente. Luego, debe ser que $\Phi = 0$ ó $\ker \Phi = 0$ e $\text{Im} \Phi = V_2$. Por lo tanto, $\Phi = 0$ ó Φ es un isomorfismo. En segundo lugar, por el ítem (1) del teorema Φ y Ψ son isomorfismos y entonces es suficiente probar que el morfismo de representaciones $\Gamma := \Psi^{-1} \circ \Phi$ es un múltiplo de la identidad de V_1 . Como estamos trabajando con representaciones sobre $\mathbb{C}$, Γ admite necesariamente un autovector v en V_1 con autovalor λ en $\mathbb{C}$, tal que $\Gamma(v) = \lambda v$. Considerando el autoespacio asociado a λ ,

denotado E_λ , resulta claro que es invariante respecto la representación de grupos o álgebras de Lie en V_1 y por ende debe ser que $E_\lambda = V_1$. De esta forma, se sigue que $\Gamma = \lambda I$. $\square$

OBSERVACIÓN 2.37. *El Lema de Schur 2.36 vale para representaciones que no sean necesariamente de dimensión finita. Además, la primer parte vale para representaciones sobre un cuerpo arbitrario, mientras que la segunda parte solo es cierta en representaciones sobre cuerpos algebraicamente cerrados.*

2.2.2. Representaciones Unitarias.

En Mecánica Cuántica nos interesa estudiar no solo la estructura vectorial que describe a los sistemas físicos, si no la completa estructura de espacio de Hilbert mediante la cual definimos, por ejemplo, el valor medio en las mediciones. De esta manera, tiene sentido restringirnos a un caso particular de representaciones:

DEFINICIÓN 2.38. *Dado $\mathcal{H}$ un $\mathbb{C}$ -espacio de Hilbert de dimensión finita, se define una **representación unitaria** de un grupo matricial de Lie G como un morfismo de grupos de Lie $\Pi : G \rightarrow U(\mathcal{H})$. Análogamente, se define una **representación unitaria** de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como un morfismo de álgebras de Lie $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{u}(\mathcal{H})$. Más aún, se tienen las nociones análogas de subespacio invariante y representación irreducible.*

OBSERVACIÓN 2.39. *Es claro que una representación unitaria de un grupo de Lie matricial G induce una representación unitaria de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.*

PROPOSICIÓN 2.40. *Sea $\Pi : G \rightarrow GL(V)$ una representación de dimensión finita de un grupo de Lie matricial conexo y sea π su representación del álgebra de Lie inducida. Sea $\langle , \rangle$ un producto interno en V . Entonces, Π es unitaria con respecto al producto interno si y solo si para todo X en $\mathfrak{g}$, vale que $\pi(X)^* = -\pi(X)$. En este caso, π es unitaria.*

DEMOSTRACIÓN. Luego de observar, por el Corolario 2.24, que la conexión del grupo de Lie implica que todo elemento puede escribirse como un producto de exponenciales, la demostración es análoga a la construcción de $\mathfrak{u}(n)$ en el Ejemplo 2.17. $\square$

Por último, veamos una proposición que es consecuencia casi directa el Lema de Schur, y muestra la fuerza del resultado

PROPOSICIÓN 2.41. *Sea $\pi : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ una representación unitaria de un grupo de Lie matricial G . Sean V_1 y V_2 subespacios de dimensión finita Π -invariantes, cuya acción restringida es irreducible. Si V_1 y V_2 no son isomorfos como representaciones de G , entonces son ortogonales.*

DEMOSTRACIÓN. El resultado es una consecuencia de que la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre V_2 restringida a V_1 resulta un morfismo de representaciones entre las restricciones a V_1 y V_2 , por la invarianza de los subespacios. Luego, por el Teorema 2.36, se sigue que la restricción de la proyección es o bien nula, o bien un isomorfismo, de lo que se deduce el resultado. $\square$

2.2.3. Representaciones Projectivas.

De manera análoga a cuando trabajamos con simetrías, es preciso considerar que dos operadores que difieren por un escalar unitario se comportaran como la identidad al nivel de los estados físicos. En particular, De esta forma, trabajaremos en un espacio cociente por los operadores de la forma $e^{i\theta}I$ con θ en $\mathbb{R}$, que conforman un subgrupo normal cerrado de $U(\mathcal{H})$, para $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión finita.

DEFINICIÓN 2.42. Sea $\mathcal{H}$ un $\mathbb{C}$ -espacio de Hilbert de dimensión finita. Entonces, el **grupo proyectivo unitario** sobre $\mathcal{H}$, denotado por $PU(\mathcal{H})$ viene dado por:

$$PU(\mathcal{H}) := U(\mathcal{H}) / \{e^{i\theta}I\}_{\theta \in \mathbb{R}}.$$

En principio, el grupo proyectivo unitario podría no ser un grupo de Lie matricial. Sin embargo, se puede probar que resulta isomorfo a uno:

PROPOSICIÓN 2.43. Sea $\mathcal{H}$ un $\mathbb{C}$ -espacio de Hilbert de dimensión finita. Entonces, $PU(\mathcal{H})$ es isomorfo a un grupo de Lie matricial. Más aún, si $Q : U(\mathcal{H}) \rightarrow PU(\mathcal{H})$ es la proyección al cociente y $q : u(\mathcal{H}) \rightarrow pu(\mathcal{H})$ el morfismo inducido en las álgebras de Lie, entonces q es sobreyectivo y su núcleo coincide con las matrices de la forma iaI , con a en $\mathbb{R}$. En particular:

$$pu(\mathcal{H}) \cong u(\mathcal{H}) / \{iaI\}_{a \in \mathbb{R}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si la dimensión del espacio de Hilbert es n , resulta que $gl(\mathcal{H}) \cong M_n(\mathbb{C})$. Más aún, para cada U en $U(\mathcal{H})$ podemos definir la transformación lineal inversible $C_U : gl(\mathcal{H}) \rightarrow gl(\mathcal{H})$ dada, para cada X en $gl(\mathcal{H})$, por:

$$C_U(X) = UXU^{-1}.$$

En particular, es sencillo verificar que la asignación

$$\begin{aligned} U(\mathcal{H}) &\longrightarrow GL(gl(\mathcal{H})) \\ U &\longmapsto C_U \end{aligned}$$

es un morfismo de grupos de Lie que tiene como núcleo a los múltiplos unitarios de la identidad. Por otra parte, $U(\mathcal{H})$ es compacto pues es isomorfo a $U(n)$ con lo que la imagen de la asignación anterior es compacta y por ende un subgrupo cerrado de $GL(gl(\mathcal{H}))$, que es isomorfo a un grupo matricial de Lie en $GL(n^2, \mathbb{C})$. En particular, $PU(\mathcal{H})$ es el cociente de $U(\mathcal{H})$ por el núcleo de la asignación, que por el primer teorema de isomorfismos coincide con la imagen que es isomorfa un grupo matricial de Lie en $GL(n^2, \mathbb{C})$. La demostración del resto de las afirmaciones pueden encontrarse en Proposition 16.44, de [7]. $\square$

De esta forma, podemos introducir una nueva clase de representaciones:

DEFINICIÓN 2.44. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión finita. Una **representación unitaria proyectiva** de dimensión finita de un grupo matricial de Lie G es un morfismo de grupos de Lie $\Pi : G \rightarrow PU(\mathcal{H})$. Más aún, se tienen las nociones análogas de subespacio invariante y representación irreducible.

Dada una representación unitaria cualquiera, siempre podemos conformar una representación proyectiva, componiendo con la proyección al grupo proyectivo unitario. Sin embargo, no toda representación proyectiva proviene de una unitaria. El siguiente resultado muestra que una representación proyectiva puede *desproyektivizarse* al nivel de álgebras de Lie, lo cual resultará útil al definir la noción de spin para una partícula

TEOREMA 2.45. *Sea $\Pi : G \rightarrow PU(\mathcal{H})$ una representación proyectiva unitaria y sea $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow pu(\mathcal{H})$ su morfismo de álgebras de Lie asociado. Entonces, existe un morfismo de álgebras de Lie $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow u(\mathcal{H})$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathfrak{g} & \\
 \sigma \swarrow & & \searrow \pi \\
 u(\mathcal{H}) & \xrightarrow{q} & pu(\mathcal{H})
 \end{array}$$

Además, el σ es único tal que $\text{tr}(\sigma(X)) = 0$ para todo X en $\mathfrak{g}$.

DEMOSTRACIÓN. Como sabemos que $pu(\mathcal{H}) \cong u(\mathcal{H})/\{iaI\}_{a \in \mathbb{R}}$, para cada X en $\mathfrak{g}$, $\pi(X)$ es una clase de operadores sesqui-autoadjuntos que difieren por sumar iaI para algún número real a . Si Y es un representante de la clase, vale que $Y^* = -Y$ y por ende tiene traza imaginaria. Luego, existe un único número imaginario c_X que verifica que la traza de $Y + c_X I$ es nula. Luego, definiendo $\sigma(X) := Y + c_X I$, obtenemos la conmutatividad del diagrama. Más aún, la asignación definida es un morfismo de álgebras de Lie pues, como π es un morfismo de álgebras de Lie, resulta lineal y resulta que existe a real tal que $\sigma([X_1, X_2]) = [\sigma(X_1), \sigma(X_2)] + iaI$. Luego, como la traza de $\sigma([X_1, X_2])$ es cero por construcción y la traza de un conmutador es cero, a debe ser cero, y σ preserva el corchete de Lie. Es claro, de la unicidad de c_X , que imponiendo la condición de que $\sigma(X) = 0$ para todo X en $\mathfrak{g}$, el morfismo es único. $\square$

De esta forma, se obtiene el siguiente corolario que se utiliza en el contexto de Mecánica Cuántica en vistas del Ejemplo 2.28.

COROLARIO 2.46. *Sea G un grupo matricial de Lie y $\overline{G}$ un grupo matricial de Lie simplemente conexo. Supongamos que $\Phi : \overline{G} \rightarrow G$ es un morfismo de grupos de Lie tal que su morfismo de álgebras de Lie, inducido φ sea un isomorfismo y sea $\Pi : G \rightarrow PU(\mathcal{H})$ una representación proyectiva unitaria. Entonces existe una representación unitaria $\Sigma : \overline{G} \rightarrow U(\mathcal{H})$, única si requerimos que $\det(\Sigma(A)) = 1$ para todo A en $\overline{G}$, tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc}
\bar{G} & \xrightarrow{\Phi} & G \\
\downarrow \Sigma & & \downarrow \Pi \\
U(\mathcal{H}) & \xrightarrow{Q} & PU(\mathcal{H})
\end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 2.45, existe $\sigma : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow u(\mathcal{H})$ tal que $q \circ \sigma = \pi$. Luego, definamos $\bar{\sigma} := \sigma \circ \varphi : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow u(\mathcal{H})$. Como $\bar{G}$ es simplemente conexo, existe una única $\Sigma : \bar{G} \rightarrow U(\mathcal{H})$ tal que para todo X en $\bar{\mathfrak{g}}$:

$$\Sigma(e^X) = e^{\bar{\sigma}(X)}.$$

Usando que:

$$q \circ \bar{\sigma} = q \circ \sigma \circ \varphi = \pi \circ \varphi,$$

y el resultado del Teorema 2.26, se sigue la conmutatividad del cuadrado del teorema. Por último, si $\det(\Sigma(A)) = 1$ para todo A en $\bar{G}$, entonces $\text{tr}(\sigma(X)) = 0$ para todo X en $\mathfrak{g}$ y por ende σ y $\bar{\sigma}$ quedan unívocamente determinados, lo cual también deja determinado de manera única a Σ . $\square$

2.2.4. Suma directa y producto tensorial de representaciones.

Para concluir con la sección, introducimos herramientas sencillas para construir nuevas representaciones. En primer lugar, se tiene la suma directa:

DEFINICIÓN 2.47. Sean $\Pi_1 : G \rightarrow GL(V_1)$ y $\Pi_2 : G \rightarrow GL(V_2)$ representaciones de un grupo matricial de Lie G . Entonces, la **suma directa de las representaciones** es el morfismo $\Pi_1 \oplus \Pi_2 : G \rightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$, dado, para cada A en G por:

$$(\Pi_1 \oplus \Pi_2)(A) := \Pi_1(A) \oplus \Pi_2(A).$$

Similarmente, si $\pi_1 : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V_1)$ y $\pi_2 : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V_2)$ son representaciones del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces su suma directa $\pi_1 \oplus \pi_2 : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V_1 \oplus V_2)$ viene dado para cada X en $\mathfrak{g}$ por:

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(X) := \pi_1(X) \oplus \pi_2(X).$$

Por otra parte, se define el producto tensorial:

DEFINICIÓN 2.48. Sean $\Pi_1 : G \rightarrow GL(V_1)$ y $\Pi_2 : G \rightarrow GL(V_2)$ representaciones de un grupo matricial de Lie G . Entonces, la **producto tensorial de las representaciones** es el morfismo $\Pi_1 \otimes \Pi_2 : G \rightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$, dado, para cada A en G por:

$$(\Pi_1 \otimes \Pi_2)(A) := \Pi_1(A) \otimes \Pi_2(A).$$

Similarmente, si $\pi_1 : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V_1)$ y $\pi_2 : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V_2)$ son representaciones del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces su producto tensorial $\pi_1 \otimes \pi_2 : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V_1 \otimes V_2)$ viene dado para cada X en $\mathfrak{g}$ por:

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(X) := \pi_1(X) \otimes I + I \otimes \pi_2(X).$$

Un problema importante en teoría de representaciones, del cual nos encargaremos más adelante en este trabajo, será descomponer al producto tensorial de representaciones como suma directa de representaciones irreducibles. Esto motiva la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.49. Una representación de dimensión finita de un grupo o álgebra de Lie se dice **completamente reducible** si es isomorfa a la suma directa de representaciones irreducibles. A su vez un grupo o álgebra de Lie se dice que son completamente reducibles si toda representación es completamente reducible.

Existen condiciones para las cuáles una representación de dimensión finita es completamente reducible. Una de las más importantes es la siguiente:

PROPOSICIÓN 2.50. Toda representación de dimensión finita unitaria de un grupo o álgebra de Lie es completamente reducible.

DEMOSTRACIÓN. Se verifica de manera directa que dado un subespacio invariante, su complemento ortogonal es invariante para el caso de una representación unitaria. Luego, si la representación es irreducible, no hay nada que probar. En caso contrario, podemos tomar un subespacio invariante no trivial y descomponer al espacio vectorial como suma de ese subespacio y su complemento ortogonal, que son ambos invariantes. Luego, podemos restringir la representación y reiterar el proceso. La dimensión finita de la representación asegura que este proceso eventualmente termina, y por ende logramos descomponer a la representación como suma directa de representaciones irreducibles. $\square$

PROPOSICIÓN 2.51. Sea G un grupo de Lie compacto y $\Phi : G \rightarrow GL(V)$ una representación de grupos de Lie de dimensión finita. Entonces, existe un producto interno en V para el cual la representación es unitaria. En particular G es completamente reducible.

DEMOSTRACIÓN. La idea de la demostración es construir, en base a cualquier producto interno sobre V , un nuevo producto interno para la cual la representación sea unitaria. Para eso, utilizaremos que un grupo de Lie compacto admite una medida invariante a izquierda por la operación del grupo: la medida de Haar μ en G [3]. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno cualquiera para V y, utilizando la medida de Haar en G , construimos un nuevo producto interno:

$$\langle v, w \rangle_G := \int_G \langle \Phi(g)(v), \Phi(g)(w) \rangle d\mu$$

Como la medida de Haar es invariante a izquierda es claro que con este producto interno la representación es unitaria. La última afirmación se sigue de la proposición 2.50. $\square$

PROPOSICIÓN 2.52. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie inducida por un grupo de Lie compacto y simplemente conexo y $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ una representación de álgebras de Lie. Entonces, existe un producto interno en V para el cual la representación es unitaria. En particular $\mathfrak{g}$ es completamente reducible.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la Proposición 2.51 y el teorema 2.26. La última afirmación se sigue de la proposición 2.50. $\square$

COROLARIO 2.53. *$\mathfrak{so}(3)$ y $\mathfrak{su}(2)$ son álgebras de Lie completamente reducibles.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, como las álgebras de Lie son isomorfas, una es completamente reducible si y solo si la otra lo es. $\mathfrak{su}(2)$ es completamente reducible por la Proposición 2.52, ya que es el álgebra de Lie de $SU(2)$ que es un grupo de Lie simplemente conexo y compacto. $\square$

En el siguiente capítulo nos centraremos en clasificar representaciones, haciendo uso de todas estas herramientas, para grupos y álgebras de Lie concretas que tendrán un impacto directo en el desarrollo de la Mecánica Cuántica.

Capítulo 3

Representaciones en Mecánica Cuántica

*Algebra's like sheet music, the
important thing isn't can you
read music, it's can you hear it.*

Niels Bohr, 2023
OPPENHEIMER (C. NOLAN)

3.1. Momento Angular y Spin

El momento angular es un concepto central a tener en cuenta cuando un sistema presenta simetría rotacional. En estos sistemas, resulta ser una cantidad conservada y, en el sentido del teorema de Noether comentado previamente, corresponde con una simetría continua del sistema. La definición clásica de momento angular (como una magnitud vectorial), admite ciertas relaciones de conmutación en cada componente. Esas relaciones de conmutación coinciden con aquellas del álgebra de Lie inducidas por el grupo de Lie matricial $SO(3)$. Si el Hamiltoniano de un sistema conmuta con cada componente del momento angular, los autoespacios del Hamiltoniano serán invariantes respecto a un tal operador de momento angular. De esta forma, cada autoespacio del Hamiltoniano constituye una representación del álgebra de Lie $so(3)$. El objetivo de esta sección, será clasificar las representaciones irreducibles de $so(3)$ y comprenderlas en el contexto del espacio de Hilbert por excelencia para representar sistemas cuánticos: $L^2(\mathbb{R}^3)$. Más aún, analizar el momento angular desde el punto de vista de las representaciones de álgebras de Lie nos permitirá comprender el significado del *spin* de una partícula, y presentar el último postulado central de la Mecánica Cuántica que clasifica a las partículas mediante representaciones proyectivas irreducibles de dimensión finita. Comenzaremos por extender la noción de simetrías continuas uniparamétricas, para simetrías continuas en general. Eso nos llevará directamente a la definición de momento angular.

DEFINICIÓN 3.1. Sea G un grupo de Lie y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, una **representación unitaria fuertemente continua** de G es un morfismo de grupos de Lie

$$\Lambda : G \rightarrow U(\mathcal{H})$$

que cumple que para todo $g \in G$, para todo $\psi \in \mathcal{H}$ y toda sucesión g_n en G que converge a g :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Lambda(g_n)\psi - \Lambda(g)\psi\| = 0$$

OBSERVACIÓN 3.2. Si en la definición anterior ponemos $G = \mathbb{R}$, recuperamos la Definición 1.49 de grupo unitario uniparamétrico fuertemente continuo.

DEFINICIÓN 3.3. Sea $\Lambda : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ una representación unitaria fuertemente continua del grupo de Lie G , y sea $F \in \mathfrak{g}$, el álgebra de Lie inducida. Entonces, podemos definir el grupo uniparamétrico fuertemente continuo Λ_F , como $\Lambda_F := \Lambda \circ \sigma_F : \mathbb{R} \rightarrow U(\mathcal{H})$, donde σ_F viene dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_F : \mathbb{R} &\longrightarrow G \\ t &\longmapsto e^{tF}. \end{aligned}$$

Además, como Λ_F es un grupo unitario uniparamétrico fuertemente continuo, y por el teorema de Stone 1.53, tiene un generador infinitesimal $\lambda(F)$. De esta forma, obtenemos una función:

$$\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \{\text{Operadores autoadjuntos}\}$$

OBSERVACIÓN 3.4. Λ_F resulta fuertemente continuo del hecho de que Λ lo es y σ_F es continuo.

OBSERVACIÓN 3.5. Es interesante notar que construimos λ de forma muy similar a como definimos el morfismo de álgebras de Lie asociado a un morfismo de grupos de Lie. Esto sugiere pensar a $U(\mathcal{H})$ como un grupo de Lie y a los operadores autoadjuntos densamente definidos como su álgebra de Lie y, efectivamente, esto se puede hacer: $U(\mathcal{H})$ se puede ver como un Grupo de Lie de Frechet [10] donde λ es un morfismo de álgebras de Lie.

Ahora vamos a ver la acción natural por rotaciones de $SO(3)$ en $L^2(\mathbb{R}^3)$:

DEFINICIÓN 3.6. Se define la **acción canónica** de $SO(3)$ en $L^2(\mathbb{R}^3)$, como la representación $\Pi : SO(3) \rightarrow GL(L^2(\mathbb{R}^3))$, que viene dada, para cada ψ en $L^2(\mathbb{R}^3)$ y cada R en $SO(3)$, por:

$$(\Pi(R)\psi)(x) = \Psi(R^{-1}\psi).$$

PROPOSICIÓN 3.7. La acción canónica de la Definición 3.6 es una representación unitaria fuertemente continua.

DEMOSTRACIÓN. La unitareidad se sigue de la invarianza por rotaciones de la medida de Lebesgue. El resto de la demostración puede hallarse en Proposition 17.2, de [7]. $\square$

DEFINICIÓN 3.8. Considerando la acción canónica $\Pi : SO(3) \rightarrow U(L^2(\mathbb{R}^3))$ y usando la Definición 3.3, tenemos un morfismo:

$$\pi : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \{\text{Operadores autoadjuntos}\}$$

De esta forma, se definen los **operadores de momento angular** como:

$$\begin{aligned} L_x &= \pi(F_1) \\ L_y &= \pi(F_2) \\ L_z &= \pi(F_3). \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 3.9. Como π es un morfismo de álgebras de Lie se tiene que los operadores de momento angular satisfacen las relaciones de conmutación del álgebra de Lie $so(3)$.

Clásicamente uno tiene que el momento angular es el producto vectorial $\vec{L} = \vec{X} \times \vec{P}$, donde X y P son los vectores de posición y momento lineal. A nivel cuántico, donde las magnitudes físicas son descriptas a través de operadores, ¡vale lo mismo!

PROPOSICIÓN 3.10. Se tiene que $\vec{L} = \vec{X} \times \vec{P}$, donde $\times$ denota la operación producto vectorial.

DEMOSTRACIÓN. Para la demostración, ver Proposition 17.3, de [7]. □

OBSERVACIÓN 3.11. La igualdad anterior debe pensarse como una igualdad coordinada a coordinada entre operadores y también de dominios. Por ejemplo, el dominio de L_x es el dominio maximal para el que está bien definido $X_x P_z - X_z P_y$. Luego, como conocemos bien los dominios de los operadores momento y posición, podemos describir el dominio de L_x .

En particular, recordando la definición de los operadores de posición y momento lineal, podemos calcular cada componente del momento angular de manera explícita. Por ejemplo, si ψ es una función infinitamente derivable en $L^2(\mathbb{R}^3)$, para cada x en $\mathbb{R}^3$ se tiene que:

$$(3.12) \quad (\hat{L}_3 \psi)(x) = (x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}) \psi(x).$$

3.1.1. Representaciones irreducibles de $so(3)$.

En este apartado, intentaremos clasificar a menos de isomorfismos todas las representaciones irreducibles de dimensión finita del álgebra de Lie $so(3)$. Esto permitirá clasificar las representaciones irreducibles de $SO(3)$, y determinar cuáles representaciones irreducibles del álgebra de Lie inducida provienen de una del grupo de Lie correspondiente. A partir de ahora, trabajaremos con la base $\{F_1, F_2, F_3\}$ de $so(3)$ dada por el Ejemplo 2.28. El siguiente teorema no solo es el paso clave para clasificar todas las representaciones irreducibles de $so(3)$, si no también muestra como la dimensión del espacio vectorial determina unívocamente la representación, exhibiendo una base utilizada ampliamente para describir el momento angular en la literatura de Física.

TEOREMA 3.13. (Base de Spin) Sea $\pi : so(3) \rightarrow gl(V)$ una representación irreducible de dimensión finita. Definamos los operadores :

$$\begin{aligned} L^+ &= i\pi(F_1) - \pi(F_2), \\ L^- &= i\pi(F_1) + \pi(F_2), \\ L_3 &= i\pi(F_3). \end{aligned}$$

Sea $l = \frac{1}{2}(\dim V - 1)$. Entonces, existe una base de V , llamada **base de spin**, $\{v_0, \dots, v_{2l}\}$ tal que:

$$\begin{aligned} L^+(v_j) &= \begin{cases} j(2l+1-j)v_{j-1} & \text{si } j > 0 \\ 0 & \text{si } j = 0 \end{cases} \\ L^-(v_j) &= \begin{cases} v_{j+1} & \text{si } j < 2l \\ 0 & \text{si } j = 2l \end{cases} \\ L_3(v_j) &= (l-j)v_j. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Del hecho de que π es un morfismo de álgebras de Lie, se deducen fácilmente las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [L_3, L^+] &= L^+, \\ [L_3, L^-] &= -L^-, \\ [L^+, L^-] &= 2L_3. \end{aligned}$$

Luego, como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, el operador L_3 tiene al menos un autovector v de autovalor λ . Luego, vale que:

$$L_3 L^+(v) = (L^+ L_3 + L^+)(v) = L^+(\lambda v) + L^+(v) = (\lambda + 1)L^+(v).$$

Esto muestra que $L^+(v) = 0$ ó $L^+(v)$ es un autovector de L_3 , con autovalor $\lambda + 1$. Es por esto que se lo conoce a L^+ como *operador de subida*, dado que tiene el efecto de subir en uno el valor del autovalor de L_3 . Reiterando el proceso, por la dimensión finita de V , debe ser necesariamente que exista $k \geq 0$ tal que $(L^+)^k v \neq 0$, pero $(L^+)^{k+1} v = 0$. Llamando $v_0 := (L^+)^k v$, tenemos que v_0 es un autovector de L_3 con autovalor $l := \lambda + k$. Llamando $v_j = (L^-)^j v_0$, obtenemos por un argumento análogo que el efecto de L^- es disminuir en uno el autovalor de L_3 . A este operador se lo conoce como *operador de bajada*. En concreto, se tiene que $L_3(v_j) = (l-j)v_j$. De esta forma, argumentando como antes la sucesión $\{v_j\}_{j \geq 0}$ es eventualmente nula y con vectores linealmente independientes, por ser autovectores de L_3 de distinto autovalor. Por inducción en j , se verifica rápidamente que para $j \geq 1$:

$$L^+(v_j) = j(2l+1-j)v_j.$$

Por último, debe existir N tal que $v_N \neq 0$, pero $v_{N+1} = 0$. En particular, por lo probado anteriormente:

$$0 = L^+(v_{N+1}) = (N+1)(2l-N)v_N$$

y, por lo tanto, $2l = N$. De esta forma, $\{v_j\}_{0 \leq j \leq 2l}$ es un conjunto linealmente independiente, que por ser invariante por L^+ , L^- y L_3 debe ser invariante por toda la representación de $so(3)$; y por ser la misma irreducible, la colección de vectores debe ser un sistema de generadores. De este modo, resulta ser una base de V y además verifica que $l = \frac{1}{2}(\dim V - 1)$. $\square$

Si, en lugar de comenzar con una representación irreducible, simplemente comenzábamos con cualquier representación de dimensión finita, el resultado puede traducirse para obtener un subespacio invariante en donde la representación es irreducible:

COROLARIO 3.14. *Sea $\pi : so(3) \rightarrow gl(V)$ una representación de dimensión finita, no necesariamente irreducible. Supongamos que v_0 en V es no nulo tal que $L^+(v_0) = 0$ y $L_3(v_0) = lv_0$, para algún l complejo. Luego, l es un entero o semientero y los vectores definidos, para cada $0 \leq j \leq 2l$, como:*

$$v_j = (L^-)^j v_0,$$

generan un subespacio invariante e irreducible de dimensión $2l + 1$ donde los operadores de subida, bajada y L_3 actúan según el Teorema 3.13.

En honor al nombre del Teorema de la base de spin, se tiene la siguiente definición:

DEFINICIÓN 3.15. *Sea $\pi : so(3) \rightarrow gl(V)$ una representación irreducible de dimensión finita. El **spin de la representación** es el autovalor l más grande del operador $L_3 := i\pi(F_3)$. Equivalentemente, l es el único número tal que $\dim V = 2l + 1$. El spin se dice **entero** o **semi-entero** para los casos enteros o fraccionarios, respectivamente.*

Más adelante, veremos que las representaciones de álgebras de Lie que provienen de una representación de grupos de Lie son aquellas de spin entero. Sin embargo, las representaciones de spin semi-entero también tienen una interpretación física relevante y el uso de representaciones proyectivas será fundamental para comprenderlas. Sin más preámbulo, procedemos a clasificar, a menos de isomorfismos, las representaciones irreducibles de $so(3)$:

TEOREMA 3.16. *Para cualquier $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ existe una única (a menos de isomorfismo) representación irreducible de $so(3)$ de dimensión $2l + 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado un l entero o semi-entero, construimos la representación definiendo el espacio V con la acción según el Teorema de la base de spin 3.13. Es fácil verificar que los operadores de subida, bajada y L_3 verifican las relaciones de conmutación adecuadas como para que el π sea morfismo de grupos de Lie. Resta ver que V es irreducible. Para eso, tomamos un subespacio invariante W

de V no nulo y un elemento $w = \sum_{j=0}^{2l} a_j v_j$ no nulo. Considerando j_0 el máximo índice tal que a_{j_0} sea no nulo, debe ocurrir que $(L^+)^{j_0} w$ sea un múltiplo no nulo de v_0 . Como W es invariante, esto significa que $v_0 \in W$. Luego, aplicando el operador de bajada L^- repetidas veces, observamos que $v_j \in W$ para cada $0 \leq j \leq 2l$ y por ende que $W = V$; con lo cual la representación es irreducible. Dada cualquier otra representación, el Teorema 3.13 nos permite definir un isomorfismo que identifique elementos de las bases de spin, que da lugar a un isomorfismo entre las representaciones. $\square$

Por último, se deduce que esta representación única obtenida para cada spin entero o semi-entero se puede equipar de un único producto interno para que resulte unitaria:

COROLARIO 3.17. *Sea $\pi : so(3) \rightarrow gl(V)$ una representación irreducible de $so(3)$. Entonces, existe un producto interno sobre V , único salvo multiplicación por una constante, tal que la representación es unitaria.*

DEMOSTRACIÓN. La condición unitaria sobre la representación se traduce fácilmente en que el operador L_3 sea autoadjunto, y que los operadores de subida y bajada sean adjuntos el uno del otro. En este contexto, como consecuencia de imponer esas condiciones sobre un producto interno, la existencia y unicidad se convierten en un ejercicio sencillo. Ver los detalles en Proposition 17.7, de [7]. $\square$

OBSERVACIÓN 3.18. *Notar que en realidad ya sabíamos que por la proposición 2.52 que existía un producto interno para el cual la representación es unitaria, acá dimos una demostración alternativa en un caso particular y vimos que hay una cierta unicidad.*

3.1.2. Representaciones irreducibles de $SO(3)$.

Habiendo clasificado las representaciones irreducibles del álgebra de Lie inducida $so(3)$, es momento de clasificar las representaciones del grupo de Lie matricial $SO(3)$. Para eso, primero es necesario observar una propiedad topológica deseable para el grupo de Lie en cuestión:

LEMA 3.19. *$SO(3)$ es un grupo de Lie matricial conexo.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración se sigue de observar, en primer lugar, que toda matriz A en $SO(3)$ es conjugada en $SO(3)$ a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

para algun $\theta \in \mathbb{R}$. Luego, utilizando que la exponencial de $so(3)$ en $SO(3)$ es sobreyectiva, se puede explicitar un camino continuo de A en la identidad, concluyendo lo buscado. $\square$

Luego, la Proposición 2.35 y el hecho de que $SO(3)$ es conexo implican que para clasificar todas las representaciones irreducibles de $SO(3)$, basta determinar las representaciones irreducibles de $so(3)$ que provienen de una en $SO(3)$.

TEOREMA 3.20. *Sea $\pi_l : so(3) \rightarrow gl(V)$ una representación irreducible de $so(3)$ con spin l . Luego, existe una representación de grupos de Lie $\Pi_l : SO(3) \rightarrow GL(V)$ que induce, en el sentido del Teorema 2.18, a la representación π_l si y solo si l es entero.*

DEMOSTRACIÓN. Si l es semi-entero, entonces L_3 es diagonal en la base de Spin del Teorema 3.13 con autovalores semi-enteros y por ende:

$$e^{2\pi\pi_l(F_3)} = e^{2\pi i L_3} = -I.$$

Sin embargo, un cálculo sencillo muestra que $e^{2\pi F_3} = I$, lo cual indica que si una representación Π_l existiera, debería ser que:

$$\Pi_l(I) = \Pi_l(e^{2\pi F_3}) = e^{2\pi\pi_l(F_3)} = -I,$$

lo cual es una contradicción. Por otra parte, si l es entero, consideremos el isomorfismo $\varphi : su(2) \rightarrow so(3)$ del Ejemplo 2.28. Obtenemos una representación de $su(2)$ definiendo $\overline{\pi}_l(X) := \pi_l(\varphi(X))$ para cada X en $so(3)$. Luego, como $SU(2)$ es simplemente conexo, el Teorema 2.26 implica que existe una representación $\overline{\Pi}_l$ relacionada por funtorialidad, para la cual:

$$\overline{\Pi}_l(-I) = \overline{\Pi}_l(e^{2\pi E_1}) = e^{2\pi\overline{\pi}_l(E_1)} = e^{2\pi\pi_l(F_1)} = e^{2\pi i L_3} = I.$$

De esta forma, por la Proposición 2.29, existe un morfismo Φ de grupos de Lie sobreyectivo con núcleo $\{I, -I\}$ entre $SU(2)$ y $SO(3)$, que induce a φ entre las álgebras de Lie. Como $\overline{\Pi}_l$ contiene en su núcleo al núcleo de Φ , por el teorema de isomorfismos existe un único morfismo que se factoriza por la imagen. Es decir, una representación de grupos de Lie $\Pi_l : SO(3) \rightarrow GL(V)$, tal que $\overline{\Pi}_l = \Pi_l \circ \Phi$. Por la funtorialidad, se sigue que Π_l induce a la representación irreducible de álgebras de Lie π_l . $\square$

3.1.3. Armónicos esféricos.

Estudiar la acción de $SO(3)$ en $L^2(\mathbb{R}^3)$ dada por la Proposición 3.6 resulta fundamental al resolver problemas rotacionalmente invariantes, como lo haremos con el átomo de Hidrógeno en el futuro cercano. De esta forma, será importante entender la estructura de las representaciones que son invariantes por la acción de $SO(3)$, y cuya restricción es irreducible. Si escribimos a las funciones de $\mathbb{R}^3$ en coordenadas polares, el grupo de Lie actúa solo en las variables angulares. De esta forma, es útil considerar la acción de $SO(3)$ sobre el espacio $L^2(S^2)$, dotado de la medida de superficie sobre la esfera (ver 2.7, de [4]), y describir los subespacios invariantes. Luego, solo será cuestión de inducir subespacios invariantes

correspondientes dentro de $L^2(\mathbb{R}^3)$. Estaremos interesados, a lo largo de esta sección, en trabajar con polinomios armónicos¹ y homogéneos² en $\mathbb{R}^3$ con coeficientes complejos.

DEFINICIÓN 3.21. Dado $l \geq 0$, se denota $\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^3)$ el espacio de polinomios homogéneos de grado l en $\mathbb{R}^3$ con coeficientes complejos y $\mathcal{P}_l(S^2)$ su restricciones a la esfera.

OBSERVACIÓN 3.22. La asignación dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^3) &\longrightarrow \mathcal{P}_l(S^2) \\ p &\longmapsto p|_{S^2}\end{aligned}$$

es un monomorfismo lineal.

DEFINICIÓN 3.23. Dado $l \geq 0$, se define $V_l(S^2)$ el subespacio de **armónicos esféricos** de $L^2(S^2)$, dado por las restricciones a la esfera de polinomios armónicos en $\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^3)$. Equivalentemente, es la imagen de polinomios armónicos por la asignación de la Observación 3.22.

OBSERVACIÓN 3.24. Como la asignación de la Observación 3.22 es un monomorfismos, resulta indistinto referirnos a polinomios armónicos en $\mathbb{R}^3$ o a sus restricciones correspondientes a los armónicos esféricos de la Definición 3.23, de modo que simplemente denotamos a estos polinomios V_l .

Una sencilla cuenta muestra que el Laplaciano conmuta con rotaciones. De eso, se sigue que cada V_l es invariante por la acción canónica de $SO(3)$ en $L^2(S^2)$. Más aún, el objetivo de lo que queda en este apartado es mostrar que es de hecho irreducible por la acción, y demás propiedades que muestra el siguiente teorema:

TEOREMA 3.25. Los armónicos esféricos verifican las siguientes propiedades:

1. La dimensión de V_l , con $l \geq 0$ es $2l + 1$
2. Cada V_l es invariante e irreducible con respecto a la acción de $SO(3)$
3. Los V_l son ortogonales entre sí, para cualquier producto interno que haga de la representación canónica de $SO(3)$ unitaria.
4. $L^2(S^2)$ se descompone como suma directa de los V_l .

Antes de probar el teorema, vamos a necesitar de varios lemas previos que nos encargaremos de enunciar y demostrar. De acá en adelante, nos referiremos a $\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^3)$ simplemente como $\mathcal{P}_l$.

OBSERVACIÓN 3.26. La cantidad de tuplas de enteros no negativos (l_1, l_2, l_3) tales que $l_1 + l_2 + l_3 = l$, para un entero no negativo l , es igual a $\frac{(l+1)(l+2)}{2}$. Como la colección $\{x_1^{l_1}x_2^{l_2}x_3^{l_3}\}$ es una base de $\mathcal{P}_l$, entonces:

$$\dim \mathcal{P}_l = \frac{(l+1)(l+2)}{2}.$$

¹Es decir, los polinomios p tales que $\Delta p = 0$, donde Δ es el Laplaciano

²Es decir, que todos los monomios no nulos tienen el mismo grado

PROPOSICIÓN 3.27. *El Laplaciano $\Delta_l : \mathcal{P}_l \rightarrow \mathcal{P}_{l-2}$, con $l \geq 2$ es sobreyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Basta ver que es sobreyectivo en los monomios de la forma $x_1^{l_1} x_2^{l_2} x_3^{l_3}$, tales que $l_1 + l_2 + l_3 = l - 2$. Hagamos inducción decreciente en:

$$M = \max\{l_1, l_2, l_3\}.$$

El caso base, cuando $M = l - 2$, es directo dado que

$$\Delta_l\left(\frac{1}{(l+1)(l+2)}x_i^l\right) = x_i^{l-2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Veamos ahora el paso inductivo: supongamos que $0 \leq m < l - 2$ es tal que para cualquier máximo de los exponentes M , tal que $m < M \leq l - 2$ es cierta la propiedad, y verifiquemos que si el máximo de los exponentes es m , entonces la propiedad también vale bajo esta suposición. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el máximo se realiza en la primer variable y veamos que $x_1^m x_2^{l_2} x_3^{l_3}$ está en la imagen del Laplaciano. Notar que:

$$\Delta_l(x_1^{m+2} x_2^{l_2} x_3^{l_3}) = (m+1)(m+2)x_1^{m+2} x_2^{l_2} x_3^{l_3} + l_2(l_2-1)x_1^m x_2^{l_2-2} x_3^{l_3} + l_3(l_3-1)x_1^m x_2^{l_2} x_3^{l_3-2}$$

Y por hipótesis inductiva, los últimos dos términos de la igualdad pertenecen a la imagen³ de Δ_l . Usando la linealidad del Laplaciano, se sigue que el monomio de interés también pertenece a la imagen, lo que termina la inducción. $\square$

COROLARIO 3.28. *Vale que, si $l \geq 0$:*

$$\dim V_l = 2l + 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Como $V_l = \ker \Delta_l$, resulta por la Observación 3.26 y el teorema de la dimensión que:

$$\dim V_l = \dim \ker \Delta_l = \dim \mathcal{P}_l - \dim \text{Im} \Delta_l = \dim \mathcal{P}_l - \dim \mathcal{P}_{l-2} = 2l + 1.$$

$\square$

Nuestro siguiente objetivo es probar que cada $\mathcal{P}_l$ se descompone como suma directa (interna) de V_l y de $\mu(\mathcal{P}_l)$, donde $\mu : \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] \rightarrow \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ es el monomorfismo lineal que dado un polinomio p , devuelve:

$$\mu(p)(x) := |x|^2 p(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)p(x).$$

En primer lugar, probemos la siguiente serie de lemas:

LEMA 3.29. *Dado p un polinomio en $\mathcal{P}_l$, vale que:*

$$\Delta_{l+2}(\mu(p)) = \mu(\Delta_l(p)) + (4l + 6)p$$

DEMOSTRACIÓN. La prueba se sigue de escribir a p como una suma de monomios homogéneos y utilizar la regla del producto para el Laplaciano. $\square$

³Observar que los exponentes de estos monomios podrían ser negativos, pero en ese caso sencillamente serán cero, de considerar las constantes que los multiplican.

LEMA 3.30. *Sea p un polinomio en $\mathcal{P}_l$ y supongamos que existe $k \geq 0$ tal que $|x|^{2k}$ divide, como polinomio, a p . Entonces, para cualquier $0 \leq j \geq 2k$, vale que:*

$$\Delta_{l+2}(|x|^2 p) = |x|^{2(j+1)} \Delta_{l-2j}\left(\frac{p}{|x|^{2j}}\right) + \sum_{m=0}^j (4(l-2m) + 6)p.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración se sigue de inducción y el Lema 3.29. $\square$

PROPOSICIÓN 3.31. *Se tiene la siguiente igualdad:*

$$\mathcal{P}_l = \mu(\mathcal{P}_{l-2}) \oplus V_l,$$

donde $\oplus$ denota la suma directa interna.

DEMOSTRACIÓN. Veamos que la intersección de los subespacios es trivial. Sea $\mu(p) \in \mu(\mathcal{P}_{l-2}) \cap V_l$, y supongamos que p es no nulo. En ese caso, existe $k \geq 0$ máximo tal que $|x|^{2k}$ divide, como polinomio, a p . Por hipótesis, $\Delta_l(|x|^2 p) = 0$. Además, por el Lema 3.30 aplicado a k , se sigue que:

$$0 = \Delta_l(|x|^2 p) = |x|^{2(k+1)} \Delta_{l-2k}\left(\frac{p}{|x|^{2k}}\right) + \sum_{m=0}^k (4(l-2m) + 6)p,$$

de lo que reordenando y el hecho de que p es no nulo deducimos que $|x|^{2(k+1)}$ divide, como polinomio, a p . Esto es una contradicción, que vino de asumir que p era distinto de cero. De esta forma, obtenemos que la suma es directa y, como ambos sumandos son subespacios de $\mathcal{P}_l$, obtenemos que la suma es un subespacio. Por último, como μ es monomorfismo, y Δ_l sobreyectivo se sigue del teorema de la dimensión que:

$$\dim(\mu(\mathcal{P}_{l-2}) \oplus V_l) = \dim \mu(\mathcal{P}_{l-2}) + \dim V_l = \dim \text{Im}(\Delta_l) + \dim \ker \Delta_l = \dim \mathcal{P}_l,$$

y por lo tanto la igualdad deseada. $\square$

Inductivamente, obtenemos una descomposición para los polinomios homogéneos en polinomios armónicos, que concluirá una descomposición para todo $L^2(S^2)$ en los armónicos esféricos:

COROLARIO 3.32. *Sean l entero no negativo y $k = \frac{l}{2}$, si l es par, o $k = \frac{l-1}{2}$ si l es impar. Luego, para cada p en $\mathcal{P}_l$ existe una descomposición de la forma:*

$$p(x) = p_0(x) + |x|^2 p_1(x) + |x|^4 p_2(x) + \dots + |x|^{2k} p_k(x),$$

donde cada p_j es un polinomio armónico de grado $l - 2j$. En particular, la restricción de p a la esfera verifica que:

$$p|_{S^2} = (p_0 + p_1 + \dots + p_k)|_{S^2},$$

donde $(p_0 + \dots + p_k)$ es un polinomio armónico, no necesariamente homogéneo.

DEMOSTRACIÓN. Procedemos inductivamente en l . Para el caso base, si $l = 0$ o $l = 1$, todos los polinomios resultan armónicos. Suponiendo que $l \geq 2$, observar que si p pertenece a $\mathcal{P}_l$, entonces por la Proposición 3.31 existen p_0 armónico y q_0 en $\mathcal{P}_{l-2}$ tal que $p = p_0 + |x|^2 q_0$. Luego, procedemos por hipótesis inductiva descomponiendo a q_0 para concluir la demostración. $\square$

Para probar que los armónicos esféricos son de hecho irreducibles ante la acción de $SO(3)$, recurrimos al siguiente lema:

LEMA 3.33. Consideremos $\pi : so(3) \rightarrow gl(L^2(S^2))$ la representación inducida por la acción canónica de $SO(3)$ junto a la definición de momento angular, y sean, como en el Teorema 3.13, $L_3 = i\pi(F_3) = iL_z$, $L^+ = i\pi(F_1) - \pi(F_2) = iL_x - L_y$. Entonces, para cualquier entero no negativo l , el polinomio $p_l(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + ix_2)^l$ pertenece a V_l y satisface:

$$\begin{aligned} L_3 p &= p, \\ L^+ p &= 0. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Primero notemos que el polinomio es armónico, y por ende pertenece a V_l :

$$\Delta_l(p) = l(l-1)(x_1 + ix_2)^{l-2} + l(l-1)i^2(x_1 + ix_2)^{l-2} = 0.$$

Por otra parte, utilizando la Ecuación 3.12, se tiene que:

$$L_3(p) = iL_z(p) = i(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2})p = l(x_1 + ix_2)^l = lp.$$

Además, deduciendo las expresiones análogas para L_x y L_y , obtenemos:

$$L^+(p) = iL_x(p) - L_y(p) = i(x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3})p + (x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3})p = 0.$$

$\square$

COROLARIO 3.34. El espacio V_l es irreducible con respecto a la acción canónica de $SO(3)$ restringida.

DEMOSTRACIÓN. El resultado del Corolario 3.14 junto al Lema 3.33 nos dice que tenemos un subespacio de V_l de dimensión $2l + 1$ irreducible. De esta forma, ese subespacio necesariamente coincide con V_l . $\square$

Ahora si, demostremos el teorema:

DEMOSTRACIÓN. (Teorema 3.25). El ítem (1) y (2) ya están demostrados. Para el ítem (3), observemos que como los V_l son de dimensión finita, invariantes e irreducibles sobre la acción canónica, la Proposición 2.41 garantiza que serán ortogonales para cualquier producto interno que haga de la representación una unitaria. Finalmente, usando argumentos de densidad y el Teorema de Stone-Weierstrass (ver Section 4.7, de [4]), se ve que las restricciones de polinomios con coeficientes complejos a la esfera forman un subconjunto denso de $L^2(S^2)$. Más aún, teniendo

en cuenta que todo polinomio se puede escribir como suma de homogéneos y el Corolario 3.32, deducimos que el espacio de restricciones de polinomios a S^2 coincide con la restricción de polinomios armónicos. De esta forma, la suma directa de los V_l conforman un subespacio denso de $L^2(S^2)$, concluyendo lo deseado. $\square$

3.1.4. Representaciones dentro de $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Una vez descritas las representaciones irreducibles de $SO(3)$ en $L^2(S^2)$, veremos cómo las mismas inducen las representaciones irreducibles en el contexto de $L^2(\mathbb{R}^3)$. En algún sentido, nos ocuparemos de tener en cuenta el aporte *radial* a los armónicos esféricos:

DEFINICIÓN 3.35. Sea l un entero no negativo y f una función medible no nula en $(0, +\infty)$ tal que:

$$(3.36) \quad \int_0^{+\infty} |f(r)|^2 r^{2l+2} dr < \infty.$$

Se define el espacio $V_{l,f} \subset L^2(\mathbb{R}^3)$ como el espacio de funciones ψ de la forma:

$$\psi(x) = p(x)f(|x|),$$

con p en V_l y x en $\mathbb{R}^3$.

La condición técnica sobre las f en los espacios $V_{l,f}$ son para garantizar que sean subespacios de $L^2(\mathbb{R}^3)$. De esta forma, se obtiene el teorema principal de la sección:

TEOREMA 3.37. Todo espacio de la forma $V_{l,f} \subset L^2(\mathbb{R}^3)$ es isomorfo, como representación, al espacio $V_l \subset L^2(S^2)$. En particular, resulta invariante e irreducible con respecto a la acción canónica de $SO(3)$. Recíprocamente, todo subespacio de $L^2(\mathbb{R}^3)$ de dimensión finita invariante e irreducible con respecto a la acción canónica de $SO(3)$ es de la forma $V_{l,f}$, para algún l no negativo y una f que satisfaga la Condición 3.36.

DEMOSTRACIÓN. Como el factor $f(|x|)$ es invariante por rotaciones, la acción canónica de $SO(3)$ solo afecta a la función p . Esto se traduce en que la asignación $p(x) \mapsto p(x)f(|x|)$ sea un isomorfismo de representaciones con el espacio V_l , que por el Teorema 3.23 es de dimensión finita, invariante e irreducible por la acción canónica de $SO(3)$. Para la otra implicación, es necesario descomponer a la medida de Lebesgue como un producto de medidas de la esfera y del $(0, +\infty)$. En particular, esto descompone al espacio de Hilbert como un producto tensorial entre $L^2(S^2)$ y $L^2(0, +\infty)$, para el cual aplicaremos el Teorema 2.36 y la Proposición 3.3. Los detalles se pueden encontrar en Proposition 17.19, de [7]. $\square$

3.1.5. Spin.

Logramos clasificar todas las representaciones irreducibles de dimensión finita por su *spin* l . Es decir, el autovalor más grande del operador $L_3 = i\pi(F_3)$. Los valores posibles que hallamos para l son los enteros y semi-enteros no negativos.

Sin embargo, logramos describir en un contexto adecuado ($L^2(\mathbb{R}^3)$ y $L^2(S^2)$) únicamente a las representaciones de spin entero, pues por el Teorema 3.20, son las únicas que provienen de una representación del grupo de Lie $SO(3)$; en el caso descripto, la acción *canónica*. El argumento de la demostración del Teorema 3.20 no funciona para el caso de spin semi-entero porque la representación de Grupos de Lie de $SU(2)$ obtenida a través del isomorfismo cumple que $\bar{\Pi}(-I) = -I$. Sin embargo, si trabajáramos en su lugar con representaciones *proyectivas*, $[-I]$ coincide con la identidad en $PU(V)$ y, recordando el resultado más general del Corolario 2.46, obtenemos una representación proyectiva Π_l de $SO(3)$ que para cada X en $so(3)$ verifica:

$$\Pi_l(e^{tX}) = [e^{t\pi_l(X)}].$$

Si bien la relevancia en la Física de estudiar las representaciones que provienen de la acción canónica de $SO(3)$ es evidente, los experimentos muestran que las representaciones proyectivas semi-entera también aparecen en la naturaleza. El experimento de Stern-Gerlach (ver [5]) demuestra como un electrón confinado a un átomo de hidrógeno, invariante por rotaciones y por ende con momento angular ordinario nulo, devuelve mediciones de momento angular no nulas, con dos posibles resultados de igual magnitud pero dirección opuesta. Esto confirmó que los electrones, y en general las partículas cuánticas, portan *grados de libertad internos*, y no basta con describirlos como el espacio de Hilbert más sencillo: $L^2(\mathbb{R}^3)$. Los grados de libertad internos (i.e, los posibles valores de medición de momento angular total) para una partícula deben actuar sobre un espacio de Hilbert distinto, y es por eso que se proponen representaciones de $so(3)$ para describir este nuevo momento angular. La propuesta para modelar la combinación de espacios de Hilbert es utilizar el producto tensorial de espacios de Hilbert, dando lugar al producto tensorial de representaciones de $so(3)$. Por ejemplo, una representación con dos grados de libertad correspondería a una de dimensión 2, y por ende de spin $\frac{1}{2}$: una que no proviene de una representación unitaria de $SO(3)$, pero si de una proyectiva. Finalmente, los experimentos y desarrollos teóricos muestran que todas las partículas cuánticas admiten un *spin intrínseco*, o grado de libertad interno; lo cual da lugar a los postulados restantes de la Mecánica Cuántica:

POSTULADO 6. *Cada tipo de partícula admite un **spin** l , que es un número entero o semi-entero no negativo. El espacio de Hilbert para esa partícula viene dado por el producto tensorial de espacios de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3)$, donde V_l es una representación proyectiva unitaria irreducible de $SO(3)$ de dimensión $2l + 1$.*

En vistas de la Proposición 1.37, el producto tensorial de espacios de Hilbert del Postulado 6 coincide con el de espacios vectoriales. Por otra parte, obtenemos una clasificación según si las representaciones unitarias de $so(3)$ provienen o no de una de $SO(3)$:

DEFINICIÓN 3.38. *Las partículas de spin entero se las conoce como **bosones** y las de spin semi-entero **fermiones**.*

Por último, la descripción de espacios de Hilbert para una partícula individual motiva el postulado restante, que generaliza este escenario. Además, en el contexto de Teoría Cuántica de Campos (QFT), consideraciones relativistas muestran que el spin emerge naturalmente y hay una distinción fundamental en las funciones de onda de los bosones y fermiones, que en el marco de esa teoría es justificado a través del llamado Teorema de la Spin-Estadística [13]. Este último postulado, toma en cuenta esos efectos para incluirlos en la descripción de sistemas de múltiples partículas cuánticas:

POSTULADO 7. *Un sistema cuántico de N **bosones** de spin l indistinguibles viene dado por el subespacio de Hilbert de $L^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes (V_l)^{\otimes N}$, generado por los tensores elementales de las funciones de onda que son simétricas respecto al intercambio de coordenadas. Un sistema cuántico de N **fermiones** de spin l indistinguibles viene dado por el subespacio de Hilbert de $L^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes (V_l)^{\otimes N}$, generado por los tensores elementales de las funciones de onda que son antisimétricas respecto al intercambio de coordenadas^a.*

^aEs decir, se multiplican por el signo de la permutación correspondiente.

De la antisimetría de las partículas de spin semi-entero que establece el Postulado 7, los fermiones satisfacen el llamado **Principio de Exclusión de Pauli**: no pueden existir dos partículas en el mismo estado global. Se debe notar que dos fermiones con diferente spin sí pueden ocupar el mismo estado espacial, pero diferir de su componente de spin en la representación irreducible. Motivados por cómo se describen sistemas de múltiples partículas, el siguiente objetivo es describir el producto tensorial de representaciones irreducibles: la fórmula de Clebsch-Gordan.

3.2. La fórmula de Clebsch-Gordan

3.2.1. La complexificación.

Hasta ahora trabajamos con representaciones complejas de las álgebras de Lie reales isomorfas $so(3)$ y $su(2)$. En la literatura matemática, se usa como representante $sl(2, \mathbb{C})$, por la simplicidad de las cuentas y las herramientas de este álgebra de Lie compleja⁴. En concreto: todo lo que para un físico es $su(2)$ para un matemático es $sl(2, \mathbb{C})$, la idea de esta sección es lograr la traducción. Para eso, empezamos definiendo la complexificación de un álgebra de Lie real:

⁴En el capítulo anterior definimos este álgebra de Lie como una real. Sin embargo, es claro que también es un álgebra de Lie compleja.

DEFINICIÓN 3.39. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real se define la **complexificación** de $\mathfrak{g}$ como $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ con el corchete de Lie dado, en los tensores elementales para x_1, x_2, y_1, y_2 en $\mathfrak{g}$, como:

$$[x_1 \otimes 1 + y_1 \otimes i, x_2 \otimes 1 + y_2 \otimes i] = [x_1, x_2] - [y_1, y_2] + i([y_1, x_2] + [x_1, y_2]).$$

OBSERVACIÓN 3.40. En lenguaje categórico, la complexificación define un funtor de las álgebras de Lie reales en las complejas:

$$-\mathbb{C} : \text{LieAlg}_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{LieAlg}_{\mathbb{C}}.$$

Veamos un ejemplo concreto que va a ser de mucho interés:

PROPOSICIÓN 3.41. Las siguientes álgebras de Lie complejas son isomorfas:

$$su(2)_{\mathbb{C}} \cong sl(2, \mathbb{C})$$

DEMOSTRACIÓN. La función dada por:

$$\begin{aligned} su(2)_{\mathbb{C}} &\longrightarrow sl(2, \mathbb{C}) \\ A \otimes 1 + B \otimes i &\longmapsto A + iB. \end{aligned}$$

es un isomorfismo de álgebras de Lie complejas con inversa:

$$\begin{aligned} sl(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow su(2)_{\mathbb{C}} \\ A &\longmapsto \frac{A - A^*}{2} \otimes 1 + \frac{A + A^*}{2i} \otimes i \end{aligned}$$

□

¿Por qué empezamos a hablar de complexificar álgebras de Lie si nos interesan representaciones de álgebras de Lie que son reales? La siguiente proposición responde la pregunta:

PROPOSICIÓN 3.42. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real y sea $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie compleja, hay una biyección:

$$\Gamma : \text{Hom}_{\text{LieAlg}_{\mathbb{R}}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \rightarrow \text{Hom}_{\text{LieAlg}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h})$$

que, dado $\varphi \in \text{Hom}_{\text{LieAlg}_{\mathbb{R}}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ define $\Gamma(\varphi) \in \text{Hom}_{\text{LieAlg}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h})$ como

$$\Gamma(\varphi)(x \otimes \lambda) = \lambda\varphi(x);$$

cuya inversa es

$$\Theta : \text{Hom}_{\text{LieAlg}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}) \rightarrow \text{Hom}_{\text{LieAlg}_{\mathbb{R}}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$$

que dado $\phi \in \text{Hom}_{\text{LieAlg}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h})$ define $\Theta(\phi) \in \text{Hom}_{\text{LieAlg}_{\mathbb{R}}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ como

$$\Theta(\phi)(x) = \phi(x \otimes 1).$$

DEMOSTRACIÓN. Una sencilla verificación muestra que $\Gamma(\varphi)$ y $\Theta(\phi)$ son respectivamente morfismos de álgebra de Lie. Luego, es claro que Γ es una biyección con inversa Θ . □

OBSERVACIÓN 3.43. *En lenguaje categórico, la biyección anterior refleja una adjunción entre dos funtores, el funtor complexificación $-_{\mathbb{C}} : \text{LieAlg}_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{LieAlg}_{\mathbb{C}}$ y el funtor olvido $U : \text{LieAlg}_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{LieAlg}_{\mathbb{R}}$. No es solamente una biyección si no que es una biyección natural.*

En cuántica estudiamos representaciones de álgebras de Lie reales $\mathfrak{g}$ sobre $gl(n, \mathbb{C})$ (que a su vez también es un álgebra de Lie compleja). Sin embargo, por la Proposición 3.42, esto resulta es lo mismo que estudiar representaciones complejas de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ sobre $gl(n, \mathbb{C})$. En particular, la teoría de representaciones reales sobre $gl(n, \mathbb{C})$ de $su(2)$ (o $so(3)$) es *exactamente* la misma que la teoría de representaciones complejas sobre $gl(n, \mathbb{C})$ de $sl(2, \mathbb{C})$, al ser la complexificación de $su(2)$. Más aún, la biyección de la Proposición 3.42 además preserva las representaciones irreducibles

OBSERVACIÓN 3.44. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real. Entonces, la biyección*

$$\Gamma : \text{Hom}_{\text{LieAlg}_{\mathbb{R}}}(\mathfrak{g}, gl(V)) \rightarrow \text{Hom}_{\text{LieAlg}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, gl(V))$$

descripta en la Proposición 3.42 preserva representaciones irreducibles.

3.2.2. Un nuevo carácter: $sl(2, \mathbb{C})$.

Ahora vamos a dar la versión del Teorema de la Base de Spin 3.13 para $sl(2, \mathbb{C})$, usando que ya lo tenemos demostrado para $so(3)$.

LEMA 3.45. *Sean*

$$\begin{aligned} H &= 2iE_3, \\ X &= iE_1 - E_2 \\ Y &= iE_1 + E_2, \end{aligned}$$

donde $\{E_1, E_2, E_3\}$ es la base de $su(2)$ definida en el Ejemplo 2.28. Entonces, se tiene que $\{X, Y, H\}$ es una base $sl(2, \mathbb{C})$ con las siguientes reglas de conmutación:

$$[X, Y] = H; \quad [H, X] = 2X; \quad [H, Y] = -2Y.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es un sencillo cálculo de conmutadores. $\square$

TEOREMA 3.46. (Base de Spin) *Sea $\pi : sl(2, \mathbb{C}) \rightarrow gl(V)$ una representación compleja irreducible de dimensión finita.*

Sea $m = \dim V$. Entonces, existe una base de V $\{v_0, \dots, v_{m-1}\}$ tal que:

$$\begin{aligned} \pi(Y)(v_j) &= \begin{cases} j(m-j)v_{j-1} & \text{si } j > 0 \\ 0 & \text{si } j = 0 \end{cases} \\ \pi(X)(v_j) &= \begin{cases} v_{j+1} & \text{si } j < m \\ 0 & \text{si } j = m \end{cases} \\ \pi(H)(v_j) &= (m-1-2j)v_j. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Por todo lo discutido anteriormente, la representación real $\tilde{\pi} : so(3) \rightarrow gl(V)$ dada por la siguiente composición:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \tilde{\pi} & & & \\ & & \swarrow & \text{---} & \searrow & & \\ so(3) & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & su(2) & \xrightarrow{i} & sl(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\pi} & gl(V) \\ & \sim & & & & & \end{array}$$

es una representación irreducible y, por el Teorema de la Base de Spin 3.13 para $so(3)$, se tiene que existe una base de V $\{v_0, \dots, v_{m-1}\}$ tal que:

$$\begin{aligned} i\tilde{\pi}(F_1)(v_j) - \tilde{\pi}(F_2)(v_j) &= \begin{cases} j(m-j)v_{j-1} & \text{si } j > 0 \\ 0 & \text{si } j = 0 \end{cases} \\ i\tilde{\pi}(F_1)(v_j) + \tilde{\pi}(F_2)(v_j) &= \begin{cases} v_{j+1} & \text{si } j < 2l \\ 0 & \text{si } j = 2l \end{cases} \\ 2i\tilde{\pi}(F_3)(v_j) &= (m-1-2j)v_j. \end{aligned}$$

Por la definición de $\tilde{\pi}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \pi(X)(v_j) &= \begin{cases} j(m-j)v_{j-1} & \text{si } j > 0 \\ 0 & \text{si } j = 0 \end{cases} \\ \pi(Y)(v_j) &= \begin{cases} v_{j+1} & \text{si } j < 2l \\ 0 & \text{si } j = 2l \end{cases} \\ \pi(H)(v_j) &= (m-1-2j)v_j. \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 3.47. Por el Teorema 3.46, y de manera análoga al resultado para $so(3)$, dado $m \in \mathbb{N}_0$ existe una única representación irreducible de $sl(2, \mathbb{C})$ salvo isomorfismo, denotada ρ_m .

PROPOSICIÓN 3.48. $sl(2, \mathbb{C})$ es completamente reducible y toda representación es de la forma $\bigoplus_{j=1}^n s_j \rho_{q_j}$ con $q_1 < \dots < q_n$ y s_j números naturales.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de que $so(3)$ es completamente reducible por 2.53, la Observación 3.44 y el hecho de tener clasificadas las representaciones irreducibles por el Teorema de la Base de Spin 3.46 □

3.2.3. La descomposición de Clebsch-Gordan.

Ahora vamos a dar el teorema de Clebsch-Gordan que es clave para lo que se suele llamar en literatura *suma de momento angular*. ¿Qué pasa un sistema de N partículas que tienen spin y momento angular? A nivel matemático vamos a describir cómo se descompone el producto tensorial de representaciones irreducibles de $sl(2, \mathbb{C})$ en suma directa de representaciones irreducibles. se puede dar una demostración por cálculo directo y, en Física, saber el isomorfismo explícito resulta de interés. Sin embargo, vamos a exhibir una demostración mucho más profunda. Vamos a definir un caracter que va a ser un invariante total de las representaciones de $sl(2, \mathbb{C})$, que es análogo a como la dimensión es un invariante total de los espacios vectoriales.

DEFINICIÓN 3.49. Sea $\rho : sl(2, \mathbb{C}) \rightarrow gl(V)$ una representación. Considerando la base del Lema 3.45, se define:

$$V_\rho^n := \{v \in V : \rho(H)(v) = nv\}$$

y, además, el **caracter de la representación** como

$$\text{char}(\rho) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dim(V_\rho^n) t^n \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}].$$

PROPOSICIÓN 3.50. Sea $\rho_V : sl(2, \mathbb{C}) \rightarrow gl(V)$ y $\rho_W : sl(2, \mathbb{C}) \rightarrow gl(W)$ representaciones isomorfas. Entonces, $\text{Char}(\rho_V) = \text{Char}(\rho_W)$

DEMOSTRACIÓN. Esto es inmediato de que $V_{\rho_V}^n \cong W_{\rho_W}^n \forall n \in \mathbb{N}$ □

PROPOSICIÓN 3.51. Sea $\rho : sl(2, \mathbb{C}) \rightarrow gl(V)$ una representación. Entonces vale que V se descompone como:

$$V \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_\rho^n.$$

DEMOSTRACIÓN. Esto se sigue de la completa reducibilidad y que los autovalores de H en todas las representaciones irreducibles son enteros por el teorema de la base de Spin 3.46. □

PROPOSICIÓN 3.52. Vale que el caracter de las representaciones ρ_n están dados por:

$$\text{char}(\rho_n) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{n-1-2k} = \frac{t^{n+1} - t^{-n+1}}{t^2 - 1}$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue inmediatamente del teorema de la base de Spin 3.46. □

Describamos cómo se relacionan los caracteres de la suma y producto tensorial de representaciones:

PROPOSICIÓN 3.53. Sean $\rho_V : sl(2, \mathbb{C}) \rightarrow gl(V)$ y $\rho_W : sl(2, \mathbb{C}) \rightarrow gl(W)$ representaciones. Entonces, se tiene que:

1. $\text{char}(\rho_V \oplus \rho_W) = \text{char}(\rho_V) + \text{char}(\rho_W)$.
2. $\text{char}(\rho_V \otimes \rho_W) = \text{char}(\rho_V)\text{char}(\rho_W)$.

DEMOSTRACIÓN. Veamos cada uno de los items:

1. Es claro que:

$$(V \oplus W)_{\rho_V \oplus \rho_W}^n \cong V_{\rho_V}^n \oplus W_{\rho_W}^n.$$

Luego, la propiedad se deduce de que:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \dim((V \oplus W)_{\rho_V \oplus \rho_W}^n) t^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\dim(V_{\rho_V}^n) + \dim(W_{\rho_W}^n)) t^n.$$

2. Es claro que

$$(V \otimes W)_{\rho_V \otimes \rho_W}^n \cong \bigoplus_{i+j=n} V_{\rho_V}^i \otimes W_{\rho_W}^j$$

Luego, la propiedad se deduce de que:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \dim((V \otimes W)_{\rho_V \otimes \rho_W}^n) t^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{i+j=n} \dim(V_{\rho_V}^i) \dim(W_{\rho_W}^j) \right) t^n.$$

□

Finalmente, veamos que el caracter de una representación determina, a menos de isomorfismos, a una representación:

TEOREMA 3.54. Sean $\rho_V : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ y $\rho_W : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(W)$ representaciones, tales que $\text{Char}(\rho_V) = \text{Char}(\rho_W)$. Entonces:

$$\rho_V \cong \rho_W.$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\text{Char}(\rho_V) = \text{Char}(\rho_W)$, se sigue que para todo número natural n :

$$V_{\rho_V}^n \cong W_{\rho_W}^n,$$

y, por la Proposición 3.50, se tiene que $\dim(V) = \dim(W)$. Probemos el resultado por inducción en $\dim(V) = \dim(W)$. En primer lugar, si $\dim(V) = \dim(W) = 0$ es claro y probamos el caso base. Si $\dim(V) = \dim(W) > 0$, usando completa reducibilidad vale que

$$\rho_V \cong \bigoplus_{j=1}^n s_j \rho_{q_j} \text{ y } \rho_W \cong \bigoplus_{j=1}^m r_j \rho_{p_j},$$

donde $s_1 < \dots < s_n$ y $p_1 < \dots < p_m$. Entonces $\text{Char}(\rho_V) = \sum_{j=1}^n s_j \text{Char}(\rho_{q_j})$ y $\text{Char}(\rho_W) = \sum_{j=1}^m p_j \text{Char}(\rho_{p_j})$. Como los caracteres de las representaciones en V y W coinciden, se tiene que

$$\sum_{j=1}^n s_j \text{Char}(\rho_{q_j}) = \sum_{j=1}^m p_j \text{Char}(\rho_{p_j}),$$

donde t^{q_n-1} y t^{r_m-1} son los monomios de potencia más alta, respectivamente. Esto fuerza a que $s_n = p_m$ y $q_n = r_m$. Entonces, vale que

$$\sum_{j=1}^{n-1} s_j \text{Char}(\rho_{q_j}) = \sum_{j=1}^{m-1} p_j \text{Char}(\rho_{r_j}),$$

y como $\bigoplus_{j=1}^{n-1} s_j \rho_{q_j}$ y $\bigoplus_{j=1}^{m-1} r_j \rho_{p_j}$ tienen el mismo caracter y dimensión estrictamente menor que V y W , por hipótesis inductiva se tiene que:

$$\bigoplus_{j=1}^{n-1} s_j \rho_{q_j} \cong \bigoplus_{j=1}^{m-1} r_j \rho_{p_j}$$

y por lo tanto que:

$$\rho_V \cong \bigoplus_{j=1}^n s_j \rho_{q_j} \cong \bigoplus_{j=1}^m r_j \rho_{p_j} \cong \rho_W.$$

□

Ahora que ya tenemos un invariante total de las representaciones de $sl(2, \mathbb{C})$, estamos en condiciones de dar una muy linda demostración del isomorfismo de Clebsch-Gordon.

TEOREMA 3.55. (Clebsch-Gordon) Consideremos ρ_n, ρ_m representaciones irreducibles de $sl(2, \mathbb{C})$ de dimensión $n \leq m$, respectivamente. Entonces, se tiene que

$$\rho_m \otimes \rho_n \cong \bigoplus_{k=0}^{n-1} \rho_{m+n-2k-1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos que ambas representaciones tienen el mismo carácter y concluyamos el isomorfismo por el Teorema 3.54.

$$\begin{aligned} \text{Char}\left(\bigoplus_{k=0}^{n-1} \rho_{m+n-2k-1}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \text{Char}(\rho_{m+n-2k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{m+n-2k} - t^{-m-n+2k+2}}{t^2 - 1} \\ &= \frac{t^{m+1}}{t^2 - 1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^{n-1-2k} \right) - \frac{t^{-m+1}}{t^2 - 1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^{-n+2k+1} \right) \\ &= \frac{t^{m+1} - t^{-m+1}}{t^2 - 1} \text{Char}(\rho_n) \\ &= \text{Char}(\rho_m) \text{Char}(\rho_n) \\ &= \text{Char}(\rho_m \otimes \rho_n). \end{aligned}$$

□

Veamos un ejemplo para poner esto en contexto: ¿Qué ocurre con el momento angular en un sistema de múltiples partículas idénticas? En primer lugar, por el Postulado 7, el espacio de Hilbert que modela el sistema coincide con el producto tensorial los espacios de cada partícula independiente. Si conformamos los tensores elementales a partir de las bases usuales de spin de cada partícula como base del espacio de Hilbert global, el operador de momento angular global L_3 no será diagonalizado por esta base. De esa forma, es indispensable para realizar cálculos saber *explícitamente* cómo descomponer este producto tensorial en representaciones irreducibles, donde cada representación se escribe en una base de Spin como la del Teorema 3.13. Por lo tanto, es usual ver en literatura Física la siguiente tabla de coeficientes del isomorfismo de Clebsch-Gordan:

FIGURA 3.1. Tabla de coeficientes del isomorfismo de Clebsch-Gordan.

3.3. Átomo de Hidrógeno

3.3.1. Resolviendo el átomo de hidrógeno.

A modo de aplicación de toda la teoría desarrollada hasta el momento, buscamos *resolver* el átomo de hidrógeno. Pero, ¿qué quiere decir resolver en este contexto? Buscamos, en primer lugar, definir un operador Hamiltoniano adecuado para el sistema, y luego encontrar las soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para ese sistema. Es decir, hallar los autovectores y autovalores del operador Hamiltoniano. Con toda esa información, integrando adecuadamente la ecuación dependiente del tiempo puede propagarse una dinámica molecular y, además, conocer valores medios o probabilidades para mediciones físicas deseadas. Un protón es aproximadamente 1800 veces más masivo que un

electrón ($1800m_e \approx m_p$), con lo cual una aproximación razonable sugiere interpretar al protón fijo y el electrón orbitando alrededor de su núcleo. Con el origen de coordenadas fijo en el núcleo, se reemplaza de manera análoga al caso clásico la masa del electrón por la **masa reducida** μ :

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}.$$

El Hamiltoniano del átomo de hidrógeno resultará, en analogía a una interacción electrostática clásica y con Q la carga de un electrón, según la siguiente expresión:

$$(3.56) \quad \hat{H} = -\frac{\hbar}{2\mu}\Delta - \frac{Q^2}{|x|}.$$

Se puede demostrar (ver Theorem 9.38, de [7]) que el operador Hamiltoniano resulta autoadjunto, densamente definido y su espectro es acotado inferiormente. Esta última afirmación tiene una interpretación física razonable: el electrón admite un estado fundamental de menor energía. Para ese estado fundamental, el electrón es estable y su energía no puede recaer infinitamente, como las partículas clásicas cargadas se comportan frente a un campo electromagnético. Esto último, implicaría al electrón cayendo hasta colapsar en el núcleo atómico, liberando grandes niveles de radiación electromagnética. En particular, el objetivo será encontrar los *estados ligados* del átomo de Hidrógeno. Esos estados, representados por autovectores, forman parte de lo que se conoce como espectro puntual del operador Hamiltoniano y son de **autovalores negativos**⁵. Los autoespacios de estados ligados son subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R}^3)$ que, como el Hamiltoniano de la Ecuación 3.56 es invariante por rotaciones, resultan invariantes ante la acción canónica de $SO(3)$ y se descomponen como suma directa de subespacios irreducibles $V_{l,f}$, a consecuencia del Teorema 3.37. El objetivo concreto de la sección es hallar cuáles son las f mediante las cuáles los autoespacios, invariantes por la acción de $SO(3)$, se descomponen.

LEMA 3.57. Sean l un entero no negativo y p un polinomio en V_l , de la Definición 3.23. Además, sea f una función suave⁶ en el $(0, +\infty)$. Consideramos $\psi : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada, para cada x en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, por:

$$\psi(x) = p(x)f(|x|).$$

Entonces, vale que:

$$\Delta\psi(x) = p(x) \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2(l+1)}{r} \frac{df}{dr} \right].$$

⁵La parte positiva del espectro del Hamiltoniano del átomo de hidrógeno (los estados *no ligados*) es puramente continua y representa al átomo ionizado, en donde el electrón ya no es gobernado por la interacción electrostática con protón.

⁶I.e, una condición que garantice que la función ψ definida a continuación esté en el dominio del Laplaciano.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, supongamos que $l = 0$. En este caso, p resulta constante. Luego, vale que para $j = 1, 2, 3$:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(|x|) = \frac{df}{dr} \frac{d}{dx_j} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{df}{dr} \frac{x_j}{|x|}.$$

De esta forma:

$$\Delta f(|x|) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(|x|) = \sum_{j=1}^3 \left[\frac{d^2 f}{dr^2} \frac{x_j^2}{|x|^2} + \frac{df}{dr} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_j^2}{|x|^3} \right) \right] = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr}.$$

El caso general se sigue de utilizar la regla del producto para el Laplaciano y el caso $l = 0$. $\square$

TEOREMA 3.58. (*Átomo de hidrógeno*). Para cada entero positivo n , sea:

$$E_n := \frac{-\mu Q^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2},$$

donde Q es la carga de un electrón y μ la masa reducida del sistema protón-electrón. Además, para cada x en $\mathbb{R}^3$ sea:

$$\rho_n(x) := \frac{\sqrt{8\mu|E_n|}}{\hbar} |x|.$$

Entonces, para cada $0 \leq l \leq n-1$, existe un polinomio $L_{n,l}$ ⁷ tal que para cada polinomio q en V_l , la función:

$$\psi(x) := q(x) e^{\frac{\rho_n(x)}{2}} L_{n,l}(\rho_n(x)),$$

verifica la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el átomo de hidrógeno:

$$\hat{H}\psi = E_n\psi.$$

DEMOSTRACIÓN. Buscamos soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo con valores de $E < 0$. Usando el Lema 3.57, buscamos alguna f que verifique:

$$(3.59) \quad -\frac{\hbar}{2\mu} \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2(l+1)}{r} \frac{df}{dr} \right] - \frac{Q^2}{r} f(r) = E f(r).$$

Analizando la ecuación diferencial cuando $r \rightarrow +\infty$, resulta que la ecuación se aproxima a:

$$-\frac{\hbar}{2\mu} \frac{d^2 f}{dr^2} \approx E f$$

De esta forma, es preciso proponer una solución de la forma:

$$f(r) = e^{-\frac{\sqrt{2\mu|E|}}{\hbar} r} g(r),$$

⁷Conocidos como *Polinomios de Laguerre*.

para alguna función g suave. Sustituyendo en la ecuación diferencial, y realizando el cambio de variables $\rho := \frac{\sqrt{8\mu|E|}}{\hbar}r$, se obtiene la siguiente ecuación simplificada:

$$\rho \frac{d^2 g}{d^2 \rho} + (2(l+1) - \rho) \frac{dg}{d\rho} + \left[\frac{Q^2 \sqrt{\mu}}{\hbar \sqrt{2|E|}} - (l+1) \right] g(\rho) = 0.$$

Proponiendo a g como una serie de potencias, se obtiene una relación recursiva entre los coeficientes $(a_k)_{k \geq 0}$:

$$a_{k+1} = a_k \frac{k + l + 1 - \lambda}{k(k + 1 + 2(l + 1))},$$

donde:

$$\lambda = \frac{Q^2 \sqrt{\mu}}{\hbar \sqrt{2|E|}}.$$

Suponiendo que λ es un número entero no negativo $n \geq l + 1$, se deduce que la serie termina y g resulta un polinomio; y los valores posibles de $|E|$ en función de n resultan como en el teorema. Más aún, escribiendo a f en función de g se deduce la fórmula en el enunciado del teorema. $\square$

Se puede mostrar, como fue comentado anteriormente, que de hecho estas funciones generan todo el espectro negativo del Hamiltoniano. La estrategia de la demostración es usar teoría espectral para probar que cualquier elemento del espectro en la parte negativa forma parte del espectro puntual, en el sentido de que está constituido únicamente por autovectores. Más aún, es posible demostrar que los autoespacios son de dimensión finita y utilizar que se pueden descomponer como suma directa de subespacios irreducibles por la acción de $SO(3)$, que por el Teorema 3.37 son exactamente los $V_{l,f}$. Por último, si una función es de la forma $p(x)f(|x|)$ debe verificar la Ecuación 3.59, y, por ser una ecuación diferencial lineal de segundo orden, existen exactamente dos soluciones linealmente independientes a la ecuación de autovectores del Hamiltoniano. Una de ellas, se puede probar que es necesariamente la obtenida en el Teorema 3.58. La otra, se puede justificar que no pertenece al dominio del Hamiltoniano, concluyendo que las halladas son todas las soluciones.

COROLARIO 3.60. *Cada autovalor E_n del Teorema 3.58 tiene multiplicidad n^2 .*

DEMOSTRACIÓN. Suponiendo cierto que todos los autovectores de autovalor E_n son los dados en el Teorema 3.58, la dimensión del autoespacio coincide con la suma de las dimensiones de los espacios V_l en los que se descompone. Por el Teorema 3.25, la dimensión de cada V_l es $2l + 1$. En particular, como los valores posibles de l son los dados por $0 \leq l \leq n - 1$, resulta que la multiplicidad es igual a:

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2.$$

$\square$

3.3.2. Funciones de Densidad de Probabilidad.

Por lo comentado en la Sección 1.2.1, un aspecto central de la teoría cuántica desarrollada se basa en utilizar a las funciones de onda como funciones de densidad de probabilidad para la posición electrónica. Conocer explícitamente las funciones de onda para un sistema atómico resulta inviable al aumentar la cantidad de protones y electrones. El átomo de hidrógeno es uno de los pocos sistemas del cual tenemos información completa y, a partir de él, fue que desarrollamos las principales aproximaciones, teorías o analogías para extrapolar información física sobre otros sistemas. En particular, fue fundamental en visualizar y comprender cómo se distribuye la *densidad electrónica* del sistema y para predecir en qué secciones del espacio es más probable encontrar un electrón. Los científicos del siglo XX y XXI se encontraron con la sorprendente noticia de que sencillos modelos computacionales⁸ o aproximaciones burdas basadas en las expresiones para las funciones de onda que dedujimos en el Teorema 3.58 pueden explicar, *incluso*, ¡el enlace químico entre moléculas de gran tamaño y relevancia biológica! En el contexto de bibliografía físico-química, las soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el hidrógeno se los conoce como **orbitales**. Además, los números n y l en el Teorema 3.58 son conocidos como **número cuántico principal** y **número cuántico azimutal**, respectivamente. Los denominados orbitales suelen clasificarse en función del número cuántico azimutal porque, a igual l , los polinomios de Laguerre $L_{n,l}$ adquieren una forma geométrica comparable entre sí. Es posible, tratando a las funciones de onda como densidades de probabilidad, simular mediciones de la posición de un electrón gobernado por la interacción electrostática con un átomo de hidrógeno. Para un número de mediciones igual a 10000, se obtuvieron [16] los siguientes gráficos, clasificados por el número cuántico azimutal, donde cada punto en el espacio representa el resultado de una medición simulada para la posición del electrón.

Orbitales s: número cuántico azimutal $l = 0$

Se observa en la Figura 3.2 que al aumentar el número cuántico principal, la densidad de probabilidad se dispersa de manera más difusa a lo largo del espacio. Más aún, al crecer en n se conforman *nodos* en las nubes electrónicas; i.e., regiones internas de los orbitales en donde la probabilidad de hallar a un electrón es nula. Otra característica singular que resulta de observar los orbitales s es la simetría esférica que todas las funciones de onda con $l = 0$ presentan. Esto trae consecuencias significativas en la interacción atómica: el enlace químico.

⁸Un ejemplo (posiblemente el más conocido) es el método de Hartree-Fock [11], que plantea de manera iterativa utilizar como punto de partida a estas funciones de onda para realizar cálculos computacionales de estructura electrónica.

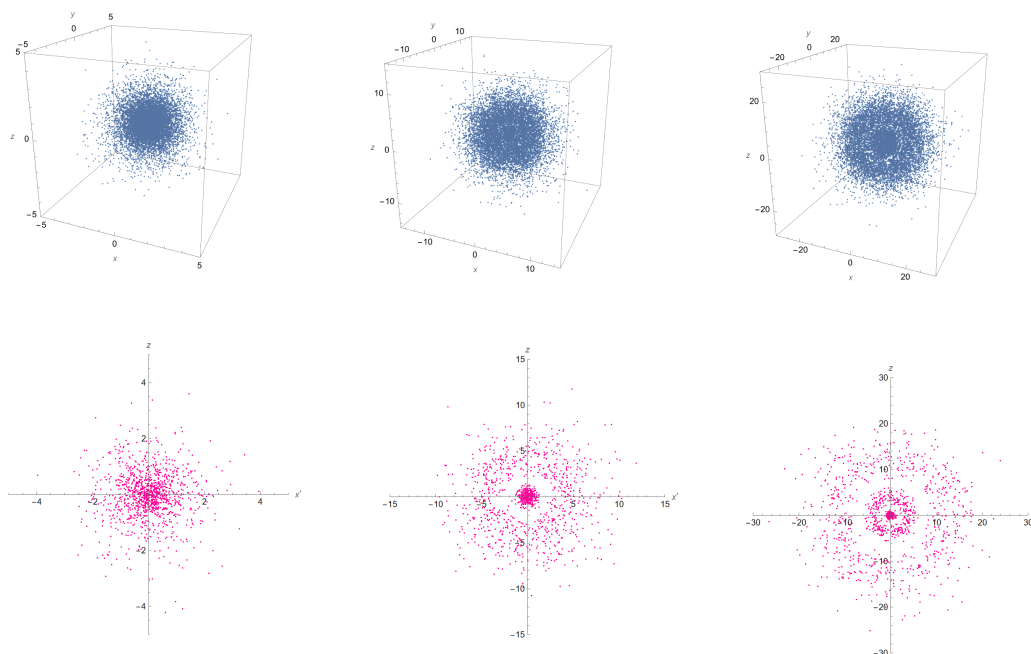


FIGURA 3.2. Orbitales de número azimutal $l = 0$ ordenados de izquierda a derecha por número cuántico principal $n = 1, 2, 3$. La primera fila muestra los resultados de las mediciones en el espacio. La segunda fila muestra una sección paralela al plano zy .

Orbitales p: número cuántico azimutal $l = 1$

Esta clase nueva de orbitales con número cuántico azimutal igual a 1 se disponen geoméricamente en dirección a un eje. Por la condición de l en relación a n en el Teorema 3.58, solo existen a partir del número cuántico principal 2. Si bien también presentan nodos y, como se observa en la Figura 3.3, se tornan más difusos al aumentar n , la característica que los distingue respecto a los orbitales s es que pierden la simetría esférica, para solo preservar simetría de rotación respecto al eje en el que apuntan. A su vez, esto tiene un impacto crucial en el enlace químico.

Orbitales d: número cuántico azimutal $l = 2$

Los orbitales d resultan, hasta el momento, ser los más difusos de todos. Presentan una nueva restricción geométrica para la posición de electrones: *planos nodales*; i.e., planos para los cuáles la probabilidad de encontrar un electrón es nula.

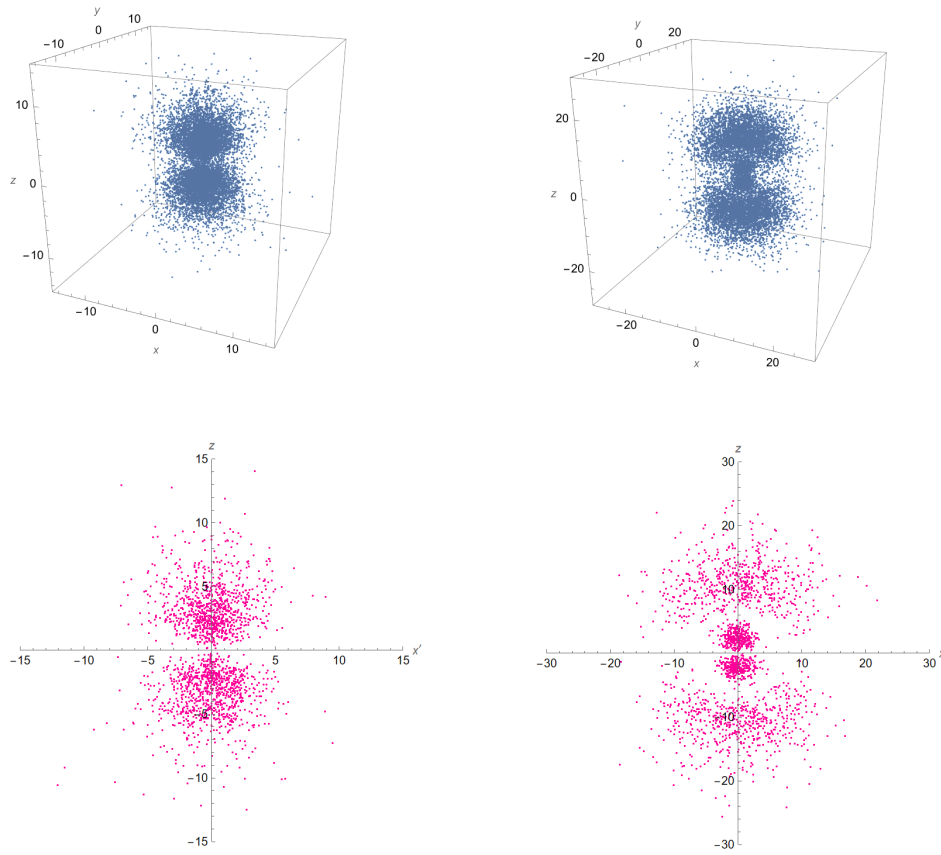


FIGURA 3.3. Orbitales de número azimutal $l = 1$ ordenados de izquierda a derecha por número cuántico principal $n = 2, 3$. La primera fila muestra los resultados de las mediciones en el espacio. La segunda fila muestra una sección paralela al plano zy .

Aunque en la Figura 3.4 solo se muestra el caso $n = 3$, se puede verificar la existencia de nodos para números cuánticos más elevados.

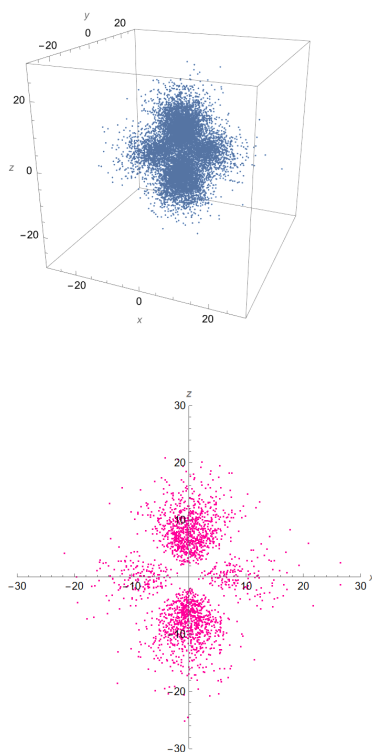


FIGURA 3.4. Orbital de número azimutal $l = 2$ con número cuántico principal $n = 3$. La primera fila muestra los resultados de las mediciones en el espacio. La segunda fila muestra una sección paralela al plano zy .

Cierre

Nothing in physics seems so hopeful to as the idea that it is possible for a theory to have a high degree of symmetry was hidden from us in everyday life. The physicist's task is to find this deeper symmetry. – S. Weinberg.

La larga y rigurosa tarea de desarrollar las herramientas matemáticas, aquí expuestas, como para que interpretaciones físico-químicas fueran viables a raíz de aquellas, pone de manifiesto la utilidad del lenguaje que los científicos tenemos y desarrollamos día a día. Mientras, como matemáticos, nuestra búsqueda es la de ese lenguaje, esperamos dejar la idea en el lector que la Física moderna tiene como motor de búsqueda principal las simetrías. El rol que ellas juegan en explicar el mundo es crucial y forman parte de hasta la más elemental interacción existente del universo. Esperamos haber logrado transmitir ese mensaje, y aportar a la comunidad una *representación* plena de la teoría matemática que subyace a la aparición de la simetría en la naturaleza.

Bibliografía

- [1] Paolo Aluffi, *Algebra: chapter 0*, Vol. 104, American Mathematical Soc., 2021.
- [2] John B. Conway, *A course in functional analysis*, Vol. 96, Springer, 2019.
- [3] Joe Diestel and Angela Spalsbury, *The joys of haar measure*, American Mathematical Soc., 2014.
- [4] Gerald B Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications*, Vol. 40, John Wiley & Sons, 1999.
- [5] Dudley Friedrich Bretislav y Herschbach, *Stern and gerlach: How a bad cigar helped reorient atomic physics*, *Physics Today* **56** (2003), no. 12, 53–59.
- [6] Brian C. Hall, *Lie groups, lie algebras, and representations*, Springer, 2013.
- [7] ———, *Quantum theory for mathematicians*, Springer, 2013.
- [8] Hugo D. Junghenn, *Principles of analysis: Measure, integration, functional analysis, and applications*, Chapman and Hall/CRC, 2018.
- [9] Irving Kaplansky, *Set theory and metric spaces*, Vol. 298, American Mathematical Society, 2020.
- [10] Osamu Kobayashi, Akira Yoshioka, Yoshiaki Maeda, and Hideki Omori, *The theory of infinite-dimensional lie groups and its applications*, *Acta Applicandae Mathematica* **3** (1985), 71–106.
- [11] Per-Olov Löwdin, *Quantum theory of many-particle systems. ii. study of the ordinary hartree-fock approximation*, *Physical Review* **97** (1955), no. 6, 1490.
- [12] Konrad Schmüdgen, *Unbounded self-adjoint operators on hilbert space*, Vol. 265, Springer Science & Business Media, 2012.
- [13] Raymond Frederick Streater and Arthur Strong Wightman, *Pct, spin and statistics, and all that*, Vol. 30, Princeton University Press, 2000.
- [14] Steven Weinberg, *The quantum theory of fields*, Vol. 2, Cambridge university press, 1995.
- [15] Eugene P Wigner, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, *Philosophical reflections and syntheses*, 1995.
- [16] Carlos Rodríguez Fernández y Andrés Santos, *Plots of quantum probability density functions in the hydrogen atom*, Wolfram Demonstrations Project (2012).
- [17] Anton Zeilinger, *Experiment and the foundations of quantum physics*, *Reviews of Modern Physics* **71** (1999), no. 2, S288.