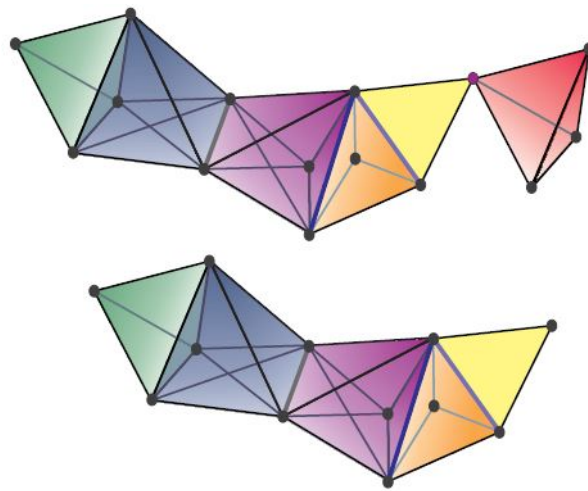


TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

PRIMER CUATRIMESTRE - 2025



Una Breve Introducción a los Conjuntos Simpliciales

Valentín Nico

Índice general

Introducción	3
Capítulo 1. Preliminares Categóricos	4
1.1. La categoría de ordinales finitos	4
1.2. Lema(s) de Yoneda	5
1.3. (Co)límites y adjunciones	6
Capítulo 2. Conjuntos Simpliciales	9
2.1. Definiciones y ejemplos	9
2.2. Realización Geométrica	14
2.3. La adjunción Geométrica-Singular	16
2.4. Subcomplejos, esqueletos y esferas	19
2.5. La estructura de CW	22
2.6. Algunas aplicaciones de la teoría	23
Bibliografía	26

Introducción

En este trabajo haremos una breve exposición introductoria a la teoría de conjuntos simpliciales. Este objeto matemático pretende ser un modelo combinatorio, similar al de los complejos simpliciales, que se utilice para describir propiedades homotópicas de los espacios topológicos. La ventaja respecto a los complejos es que los conjuntos simpliciales admiten propiedades formales mucho más versátiles, como por ejemplo, la completitud por límites y colímites o una adjunción con espacios topológicos, sin perder el espíritu geométrico que los motiva. Más aún, quizás la motivación central de esta teoría es recuperar resultados como la existencia de un espacio de Eilenberg-MacLane o la CW-aproximación de manera **funtorial**, una virtud no encontrada en las construcciones tradicionales.

La idea para introducir los conceptos será consistentemente alternar entre un enfoque categórico y una descripción concreta del objeto matemático en cuestión. En el primer apartado se presenta la categoría Δ sobre la que se construye la teoría, siguiendo la exposición de [Rie11] y los resultados de [ML98]. Luego, se incluirán por completitud algunas herramientas de la Teoría de Categorías que serán revisitadas en el texto y recomendamos leer en [Rie17].

La siguiente parte comienza con una introducción a la definición e intuición geométrica de los conjuntos simpliciales, como se encuentra en [Fri08] y en [HW21]. Allí, el objetivo principal será el de definir la realización geométrica de manera análoga al caso de complejos simpliciales y demostrar que recupera propiedades topológicas deseables. Finalmente, se enuncian algunas aplicaciones del marco teórico establecido, como herramienta formal para la definición de algunos objetos algebraicos de gran relevancia.

Se supondrán como preliminares la definición de categoría y funtor, junto con las nociones correspondientes a un curso básico de Topología Algebraica.

Preliminares Categóricos

En esta primera parte nos ocuparemos de definir la categoría en cuestión sobre la que trabajaremos a lo largo de este texto, junto con recordar algunas nociones básicas de Teoría de Categorías.

1.1. La categoría de ordinales finitos

Definición 1.1.1. La **categoría de ordinales finitos** Δ es aquella que tiene como objetos a los conjuntos ordenados $\llbracket n \rrbracket = \{0 < 1 < \dots < n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y como morfismos a los morfismos de posets entre ellos; i.e. las funciones que preservan el orden.

La idea será considerar una clase de morfismos en la categoría Δ que la *genere*. Es decir, esta clase será tal que todo morfismo en la categoría de ordinales finitos se escriba como una composición de estas flechas distinguidas. Más aún, veremos que esos morfismos satisfacen ciertas identidades que dan lugar a una presentación de la categoría.

Definición 1.1.2. Sea $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \llbracket n \rrbracket$, consideramos los morfismos¹ de **cocaras**

$$d^i: \llbracket n-1 \rrbracket \rightarrow \llbracket n \rrbracket$$

$$k \mapsto \begin{cases} k & \text{si } k < i \\ k+1 & \text{si } k \geq i \end{cases}$$

y los morfismos de **codegeneraciones**

$$s^i: \llbracket n+1 \rrbracket \rightarrow \llbracket n \rrbracket$$

$$k \mapsto \begin{cases} k & \text{si } k \leq i \\ k-1 & \text{si } k > i \end{cases}$$

Resumidamente, la i -ésima cocara se pierde el elemento i -ésimo y la i -ésima codegeneración colapsa dos elementos a i . Los nombres elegidos para estos morfismos quedarán en evidencia al estudiar los ejemplos concretos de conjuntos simpliciales.

Observación 1.1.3. Los morfismos de cocaras y degeneraciones satisfacen las siguientes *identidades cosimpliciales*:

$$\begin{cases} d^j d^i = d^i d^{j-1} & \text{si } i < j \\ s^j s^i = s^i s^{j+1} & \text{si } i \leq j \\ s^j d^i = d^i s^{j-1} & \text{si } i < j \\ s^j d^j = s^j d^{j+1} = \text{Id} \\ s^j d^i = d^{i-1} s^j & \text{si } i > j+1 \end{cases}$$

¹Como es usual, realizamos el abuso de notación de suprimir la dependencia de n en los morfismos.

Veamos que de hecho estos morfismos generan la categoría:

Proposición 1.1.4. Para cualquier morfismo $\llbracket n \rrbracket \xrightarrow{f} \llbracket m \rrbracket$ en Δ existe una única factorización epi-mono $f = \delta \circ \sigma$, donde δ es una composición de cocaras ordenadas:

$$\delta = d^{i_1} \cdots d^{i_s} \text{ con } 0 \leq i_s < \cdots < i_1 \leq m.$$

y σ es una composición de codegeneraciones ordenadas:

$$\sigma = s^{j_1} \cdots s^{j_t} \text{ con } 0 \leq j_1 < \cdots < j_t \leq n.$$

DEMOSTRACIÓN. Una función que preserva el orden como f queda completamente determinada por su imagen y por el conjunto de números de $\llbracket n \rrbracket$ donde la función no crece; i.e los $0 \leq j \leq n$ tales que $f(j) = f(j+1)$. Consideremos $0 \leq i_s < \cdots < i_1 \leq m$ los números que no están en la imagen de f y, además, $0 \leq j_1 < \cdots < j_t \leq n$ aquellos tales que $f(j_r) = f(j_r + 1)$, para cada $1 \leq r \leq t$. Notar que los $n+1$ elementos del dominio son enviados a $m+1-s$ elementos con t de ellos repetidos. Luego, debe ser que $n+1 = m+1-s+t$. Definiendo $p = m-s = n-t$, obtenemos un epimorfismo

$$\sigma := s^{j_1} \cdots s^{j_t} : \llbracket n \rrbracket \rightarrow \llbracket p \rrbracket$$

tal que los números donde la función no crece son exactamente $\sigma(j_r) = \sigma(j_r + 1)$, para $1 \leq r \leq t$. Esto último es consecuencia de tomar los j_r ordenados de manera creciente. Más aún, obtenemos un monomorfismo

$$\delta := d^{i_1} \cdots d^{i_s} : \llbracket p \rrbracket \rightarrow \llbracket m \rrbracket$$

que verifica que su imagen pierde exactamente a los números $0 \leq i_s < \cdots < i_1 \leq m$. Luego, como la composición $\delta \circ \sigma$ queda determinada por su imagen y los puntos donde la función no crece, resulta que $f = \delta \circ \sigma$ y además la escritura resulta única requiriendo el ordenamiento de los índices. ■

En vista de la Observación 1.1.3 y la Proposición 1.1.4, obtenemos una «presentación de la categoría en términos de generadores y relaciones». En concreto, las identidades cosimpliciales permiten re-escribir cualquier composición de cocaras o codegeneraciones en la manera única de la factorización epi-mono. La idea será, en analogía al caso de las presentaciones de grupos, definir funtores en estos generadores que respeten las relaciones y extenderlos usando la unicidad de escritura.

1.2. Lema(s) de Yoneda

Recordemos la definición de transformación natural:

Definición 1.2.1. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Dados dos funtores $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, una **transformación natural** $\eta : F \Rightarrow G$ es una colección de morfismos $\eta_c : Fc \rightarrow Gc$ para cada $c \in \text{obj}(\mathcal{C})$ llamados componentes, tales que para todo morfismo $f : c \rightarrow d$ en la categoría $\mathcal{C}$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Fc & \xrightarrow{Ff} & Fd \\ \eta_c \downarrow & & \downarrow \eta_d \\ Gc & \xrightarrow{Gf} & Gd \end{array}$$

Se dice que η es un **isomorfismo natural** si es un isomorfismo en cada componente. Denotamos $\text{nat}(F, G)$ a la clase de transformaciones naturales entre F y G .

Las transformaciones naturales funcionan como *morfismos* entre funtores:

Observación 1.2.2. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías, entonces $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ es una categoría cuyos objetos son funtores $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y los morfismos transformaciones naturales.

En general, pedir que un funtor tenga una inversa resulta algo muy restrictivo. Una noción más débil de isomorfismo que preserva *casi* todas las propiedades deseables es la siguiente:

Definición 1.2.3. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor. Decimos que $F: \mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ es una **equivalencia de categorías** si existe un funtor $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ junto con isomorfismos naturales $\varphi: GF \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$ y $\psi: FG \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$.

Uno de los resultados centrales de la teoría de categorías es el siguiente:

Lema 1.2.4 (Yoneda I). Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña y $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ un funtor. Entonces, para cada $c \in \text{obj}(\mathcal{C})$ hay una biyección

$$\begin{aligned} \text{nat}(\text{hom}(c, -), F) &\cong Fc \\ \eta &\mapsto \eta_c(\text{id}_c). \end{aligned}$$

Más aún, el isomorfismo es natural en la variable c .

DEMOSTRACIÓN. Basta definir como inversa la asignación que toma un $x \in Fc$ y la envía a $\varphi^x: \text{hom}(c, -) \Rightarrow F$, la transformación natural que en la componente $d \in \mathcal{C}$ viene dada por

$$\begin{aligned} \varphi_d^x: \text{hom}(c, d) &\rightarrow Fd \\ f &\mapsto Ff(x). \end{aligned}$$

Los detalles pueden verse en Theorem 2.2.3 de [Rie17]. ■

Un corolario importante del lema es el siguiente:

Corolario 1.2.5. Toda transformación natural $\text{hom}(c, -) \Rightarrow \text{hom}(d, -)$ es de la forma f^* para alguna $f: d \rightarrow c$.

DEMOSTRACIÓN. Basta tomar en el Lema 1.2.4 $F = \text{hom}(d, -)$ y elegir el elemento de $\text{hom}(d, c)$ que le corresponde. ■

Observación 1.2.6. Todos los resultados aquí expuestos valen para funtores contravariantes trabajando en $\mathcal{C}^{\text{op}}$ la categoría opuesta. Esta observación resulta crucial pues los conjuntos simpliciales serán funtores contravariantes.

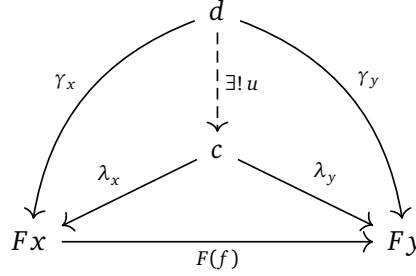
1.3. (Co)límites y adjunciones

La idea de esta sección es introducir la noción de (co)límites que será revisitada en el texto.

Definición 1.3.1. Un **diagrama** en una categoría $\mathcal{C}$ indexado por una categoría J es un funtor $J \rightarrow \mathcal{C}$

Definición 1.3.2. Sea $F: J \rightarrow \mathcal{C}$ un diagrama. Un **cono** (resp. cocono) de F es un objeto c de $\mathcal{C}$ junto a una familia $\lambda_x: c \rightarrow Fx$ para cada $x \in \text{obj}(J)$ tal que para todo morfismo $f: x \rightarrow y$ en J se tiene que $F(f) \circ \lambda_x = \lambda_y$. Decimos que $c = \lim_j F$ es un cono **límite** (resp. colímite) si

es universal con esta propiedad: para todo cono (d, γ) de F existe un único morfismo $u: d \rightarrow c$ tal que para todo morfismo $f: x \rightarrow y$ en J el siguiente diagrama conmuta:



Observación 1.3.3. Un cono (c, λ) sobre F es una transformación natural $\lambda: c \Rightarrow F$, cuyo dominio es el funtor constante c .

Observación 1.3.4. Los objetos finales, productos y pullbacks son límites y los objetos iniciales, coproductos y pushouts son colímites.

Observación 1.3.5. Los límites y colímites de una categoría pueden o no existir. Decimos que una categoría es **completa** (resp. cocompleta) si admite todos los límites (resp. colímites). En caso de existir, resultan único salvo isomorfismo natural.

Un caso relevante es aquel de calcular (co)límites en una categoría de funtores:

Proposición 1.3.6. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Entonces los límites (resp. colímites) de la categoría de funtores $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ se calculan puntualmente. Es decir, para cada objeto c de $\mathcal{C}$ el funtor evaluación $ev_c: \mathcal{D}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{D}$ preserva límites (resp. colímites).

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de verificar la propiedad universal y el hecho de que las transformaciones naturales involucradas se evalúan puntualmente. Ver los detalles en Proposition 3.5.1 de [Rie17]. ■

Corolario 1.3.7. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Si $\mathcal{D}$ es completa (resp. cocompleta), entonces $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ es completa (resp. cocompleta).

El lenguaje de los límites y colímites permite aplicar el Lema de Yoneda y obtener que todo funtor a los conjuntos se puede *aproximar* por funtores representables. Para formalizar esto, definamos la siguiente categoría:

Definición 1.3.8. Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña y $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ un funtor contravariante. Definimos la **categoría de elementos** de F y la notamos $\mathcal{C} \downarrow F$, cuyos objetos son pares (x, Fc) con c un objeto de $\mathcal{C}$ y $x \in Fc$, y los morfismos entre $(x, Fc) \rightarrow (y, Fd)$ son flechas $f: c \rightarrow d$ en $\mathcal{C}$ tales que $Ff(y) = x$.

Observación 1.3.9. Se tiene un funtor $\diamond: \mathcal{C} \downarrow F \rightarrow \mathbf{set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ que en objetos viene dado por $\diamond(x, Fc) = \text{hom}(-, c)$ y en morfismos viene dado por $\diamond(f) = f_*: \text{hom}(-, c) \Rightarrow \text{hom}(-, d)$.

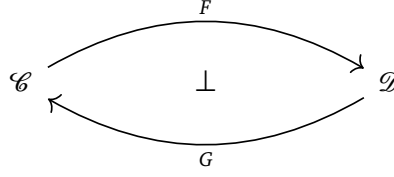
Lema 1.3.10 (Yoneda II). Todo funtor contravariante $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ es colímite de funtores representables. Más aún, se tiene que

$$F \cong \text{colim}_{\mathcal{C} \downarrow F} \text{hom}(-, c) = \text{colim}_{(x, Fc) \in \mathcal{C} \downarrow F} \diamond(x, Fc).$$

DEMOSTRACIÓN. F es un cocono del diagrama indexado por $\mathcal{C} \downarrow F$ cuya componente $\lambda_{(x,Fc)}: \text{hom}(-, c) \Rightarrow F$ es exactamente la transformación correspondida por $x \in Fc$ según el Lema de Yoneda 1.2.4. Dado otro cocono (G, μ) la única transformación natural $\varphi: F \Rightarrow G$ que factoriza el cocono μ por F es la dada en la componente $c \in \mathcal{C}$ por $\varphi_c(x) = (\mu_{(x,Fc)})_c(\text{id}_c)$. La naturalidad se sigue inmediatamente de la definición. Ver detalles en Lemma 4.1 en [Dub23]. ■

Procedemos a introducir una noción fundamental en la teoría de categorías:

Definición 1.3.11. Sean $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ dos funtores entre categorías localmente pequeñas. Decimos que



es un **par adjunto** si existe un isomorfismo natural en ambas variables

$$\text{hom}_{\mathcal{D}}(Fc, d) \cong \text{hom}_{\mathcal{C}}(c, Gd),$$

para todo $c \in \text{obj}(\mathcal{C})$ y $d \in \text{obj}(\mathcal{D})$. En este caso, decimos que F es **adjunto a izquierda** de G y G es **adjunto a derecha** de F y lo notamos $F \dashv G$.

Lema 1.3.12. Dado un par adjunto $F \dashv G$, entonces existen transformaciones naturales $\eta: \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ llamada **unidad** y $\epsilon: FG \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ llamada **counidad**.

DEMOSTRACIÓN. La unidad se obtiene tomando $d = Fc$ en la definición y eligiendo el morfismo que corresponde a id_{Fc} . La counidad se obtiene tomando $c = Gd$ y eligiendo el morfismo que corresponde a id_{Gd} . Los detalles pueden verse en Lemma 4.2.1 y Lemma 4.2.2 de [Rie17]. ■

A continuación enunciamos la propiedad más importante de las adjunciones:

Proposición 1.3.13. Los adjuntos a izquierda preservan colímites y los adjuntos a derecha preservan límites

DEMOSTRACIÓN. La demostración no es difícil y es muy estándar: para el caso de límites basta tomarse un cono sobre el diagrama resultante al aplicar el adjunto a derecha y usar la naturalidad de la adjunción para *trasponerlo* al diagrama original junto a un cono que es imagen del adjunto a izquierda. Luego, aplicar la propiedad universal del límite y volver a usar la biyección en el sentido opuesto. Ver los detalles en Theorem 4.4.2 y Theorem 4.4.3 en [Rie17]. ■

Conjuntos Simpliciales

2.1. Definiciones y ejemplos

Definición 2.1.1 (Descripción abstracta). Un **Conjunto Simplicial** es un funtor $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$. Más generalmente, un **objeto simplicial** en una categoría $\mathcal{C}$ es un funtor $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$.

Si X es un conjunto simplicial, denotamos al conjunto $X_n := X[[n]]$ y llamamos a sus elementos n -símplices generalizados (o simplemente n -símplices). Es usual representar los n -símplices generalizados gráficamente como un poliedro con vértices ordenados tales que sus caras representan símplices (generalizados) de menor dimensión.

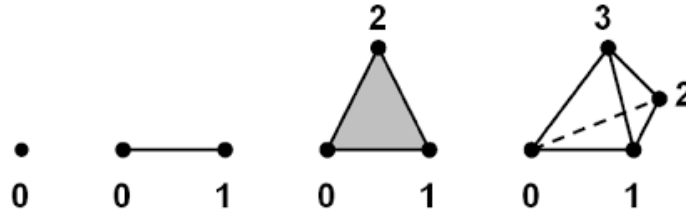


FIGURA 2.1. Representación de 0-, 1-, 2-, y 3-símplices.

Denominamos para cada $n \in \mathbb{N}$ como **caras** a las funciones

$$d_i := X d^i : X_n \rightarrow X_{n-1}, \text{ con } i \in [[n]],$$

y **degeneraciones** a las funciones

$$s_i := X s^i : X_n \rightarrow X_{n+1}, \text{ con } i \in [[n]].$$

Luego, resulta evidente que las caras y degeneraciones satisfacen las relaciones duales a las de la Observación 1.1.3. Más aún, por la Proposición 1.1.4 para definir un conjunto simplicial basta determinar, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, una sucesión de n -símplices junto a una colección de caras y cocaras que verifiquen las identidades duales a las cosimpliciales. De esta manera, se obtiene la siguiente descripción concreta:

Definición 2.1.2 (Descripción concreta). Un conjunto simplicial es

- (I) una sucesión $X_0, X_1, \dots$ de conjuntos, y

- (II) una colección de caras $d_i: X_n \rightarrow X_{n-1}$ y degeneraciones $s_i: X_n \rightarrow X_{n+1}$ para cada $i \in \llbracket n \rrbracket$ que satisfacen las *identidades simpliciales*:

$$\begin{cases} d_i d_j = d_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i & \text{si } i \leq j \\ d_i s_j = s_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ d_j s_j = d_{j+1} s_j = \text{Id} & \\ d_i s_j = s_j d_{i-1} & \text{si } i > j + 1 \end{cases}$$

Es claro que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ hay exactamente $n + 1$ morfismos en Δ entre $\llbracket 0 \rrbracket \rightarrow \llbracket n \rrbracket$. Por lo tanto, si X es un conjunto simplicial obtenemos funtorialmente $n + 1$ funciones $X_n \rightarrow X_0$. Llamamos *vértices* de un n -símplice $x \in X_n$ a las imágenes de x por cada una de esas $n + 1$ funciones. A diferencia de en los complejos simpliciales, sus vértices no tienen por qué ser distintos ni determinar al n -simplex que generan. Esto se verá más claramente en los ejemplos. Las caras de un conjunto simplicial le asignan, a cada n -símplice $x \in X_n$, ciertos $n + 1$ $(n - 1)$ -símplices $d_0(x), \dots, d_n(x) \in X_{n-1}$ llamados *caras* de x . Por convención, la cara $d_i(x)$ es la que no contiene al vértice x y la relación $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ expresa el hecho de que como caras comunes de un n -símplice, la i -ésima cara de $d_j(x)$ coincide con la $(j - 1)$ -ésima de $d_i(x)$.

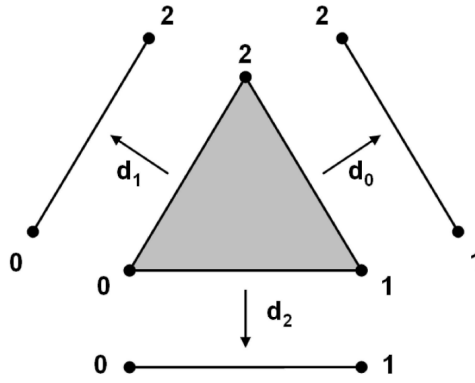


FIGURA 2.2. Representación de las caras de un 2-símplice.

Para cada n -símplice $x \in X_n$, las degeneraciones asignan ciertos $n + 1$ $(n + 1)$ -símplices $s_0(x), \dots, s_n(x) \in X_{n+1}$. Como s_i es sección de d_i y d_{i+1} , resulta que $s_i(x)$ es exactamente un $(n + 1)$ -símplice que tiene como cara i -ésima y como $(i + 1)$ -ésima cara a x . La intuición será que la imagen por la degeneración es un símplice que recupera x al proyectar su vértice i sobre el $i + 1$. Diremos que $y \in X_{n+1}$ es *degenerado* si es la imagen de algún n -símplice por una degeneración.

Antes de proceder a la familia de ejemplos, es preciso definir la noción de morfismo de conjuntos simpliciales:

Definición 2.1.3. Un **morfismo** entre dos conjuntos simpliciales $X, Y: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ es una transformación natural entre los funtores.

Gracias a la presentación obtenida de la categoría Δ , la naturalidad en la definición anterior solo basta verificarla en los generadores:

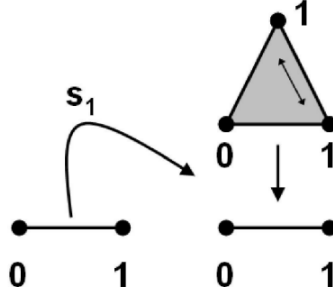


FIGURA 2.3. Representación de una degeneración de un 1-simplex.

Observación 2.1.4. Un morfismo entre dos conjuntos simpliciales X e Y es exactamente una familia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de funciones $f_n: X_n \rightarrow Y_n$ tales que, para cada $i \in \llbracket n \rrbracket$, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
 X_n & \xrightarrow{d_i} & X_{n-1} \\
 f_n \downarrow & & \downarrow f_{n-1} \\
 Y_n & \xrightarrow{d_i} & Y_{n-1}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 X_n & \xrightarrow{s_i} & X_{n+1} \\
 f_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\
 Y_n & \xrightarrow{s_i} & Y_{n+1}
 \end{array}$$

Llamamos **sSet** a la categoría de conjuntos simpliciales, que por la misma definición coincide con la categoría de funtores $\mathbf{Set}^{\Delta^{op}}$. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2.1.1 (El n -simplex estándar). Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, tenemos un conjunto simplicial Δ^n dado por el funtor co-representado por $\llbracket n \rrbracket$; i.e. $\Delta(-, \llbracket n \rrbracket)$. Concretamente, para cada $m \geq 0$ definimos el conjunto

$$\Delta_m^n := \Delta(\llbracket m \rrbracket, \llbracket n \rrbracket) = \{f: \llbracket m \rrbracket \rightarrow \llbracket n \rrbracket \mid f \text{ es morfismo de posets}\},$$

cuyas caras están dadas, para cada $i \in \llbracket m \rrbracket$ por

$$\begin{aligned}
 (d^i)^*: \Delta(\llbracket m \rrbracket, \llbracket n \rrbracket) &\rightarrow \Delta(\llbracket m-1 \rrbracket, \llbracket n \rrbracket) \\
 f &\mapsto f d^i
 \end{aligned}$$

y las degeneraciones por

$$\begin{aligned}
 (s^i)^*: \Delta(\llbracket m \rrbracket, \llbracket n \rrbracket) &\rightarrow \Delta(\llbracket m+1 \rrbracket, \llbracket n \rrbracket) \\
 f &\mapsto f s^i
 \end{aligned}$$

Llamamos a este conjunto simplicial el **n -simplex estándar**. Considerando a $\llbracket m \rrbracket$ como un m -simplex combinatorio ordenado, este conjunto simplicial representa todas las formas de incluirlo o colapsarlo en $\llbracket n \rrbracket$. Los m -símplices no degenerados son exactamente aquellas funciones $\llbracket m \rrbracket \rightarrow \llbracket n \rrbracket$ inyectivas (inclusiones), de modo que en particular Δ^n admite un único n -símplice no degenerado: $\text{id}_{\llbracket n \rrbracket}$.

El ejemplo anterior resulta representativo en el siguiente sentido: el Lema de Yoneda I 1.2.4 dice que hay una biyección natural

$$X_n \cong \text{hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, X)$$

entre n -símplices de X y morfismos de conjuntos simpliciales $\Delta^n \rightarrow X$. De manera más concreta, un n -simplex x corresponde con el único morfismo simplicial $\varphi^x: \Delta^n \rightarrow X$ que envía el único n -símplice no degenerado en x , es decir: $\varphi_n^x(\text{id}_{\llbracket n \rrbracket}) = x$.

Naturalmente, la interpretación geométrica de los conjuntos simpliciales depende de un orden en los llamados vértices. Veamos que un complejo simplicial junto a un orden en sus vértices da lugar a un conjunto simplicial:

Ejemplo 2.1.2 (Complejos simpliciales ordenados). Sea K un complejo simplicial equipado con un orden total para sus vértices $V = \{v_i\}_{i \in I}$. Para cada colección de vértices $v_{i_0} \leq \dots \leq v_{i_n}$, denotamos $[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}]$ a la n -tupla compuesta por ellos. Observar que las tuplas pueden tener, eventualmente, elementos repetidos. Asociemos a K el siguiente conjunto simplicial: para cada $n \in \mathbb{N}_0$ definimos

$$K_n := \{[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}] : v_{i_k} \leq v_{i_{k+1}}, \text{ tal que } \{v_{i_k}\} \in K\},$$

cuyas caras y degeneraciones j -ésimas vienen dadas en una tupla $[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}] \in K_n$ por:

$$d_j[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}] = [v_{i_0}, \dots, \widehat{v_{i_j}}, \dots, v_{i_n}] \text{ y } s_j[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}] = [v_{i_0}, \dots, v_{i_j}, v_{i_j}, \dots, v_{i_n}].$$

Notar que un morfismo $f: K \rightarrow L$ de complejos simpliciales (ordenados) induce functorialmente un morfismo de complejos simpliciales ordenados dado, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, por

$$f_n([v_{i_0}, \dots, v_{i_n}]) = [f(v_{i_0}), \dots, f(v_{i_n})]$$

para cada n -tupla $[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}] \in K_n$. Esto permite asignar a cada complejo simplicial (ordenado) un conjunto simplicial, aunque no resulta evidente una manera canónica de realizarlo en el sentido opuesto. Veremos próximamente que es posible extender la construcción de una realización geométrica para conjuntos simpliciales y que, restringidos al caso de complejos simpliciales, las mismas coinciden.

Veamos un primer ejemplo topológico:

Ejemplo 2.1.3 (Conjunto singular). Para empezar, se tiene un funtor covariante $|\Delta|: \Delta \rightarrow \mathbf{Top}$ que asigna a cada $\llbracket n \rrbracket \in \Delta$ el n -símplex topológico estándar:

$$|\Delta^n| := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 + \dots + x_n = 1, x_i \geq 0\}.$$

Para cada $i \in \llbracket n \rrbracket$, los morfismos $|d^i|: |\Delta^{n-1}| \rightarrow |\Delta^n|$ son aquellos que insertan un 0 en la i -ésima coordenada, mientras que los $|s^i|: |\Delta^{n+1}| \rightarrow |\Delta^n|$ suman las coordenadas x_i e x_{i+1} . Como estos verifican las identidades cosimpliciales, se tiene un funtor bien definido. Geométricamente, el primero inserta un n -símplex como cara de un $(n+1)$ -símplex y el segundo proyecta el $(n+1)$ -símplex al n -símplex que es ortogonal a la cara i -ésima. Notar que los $|d^i|$ y $|s^i|$ coinciden con realizaciones geométricas de morfismos (análogos a cocaras y codegeneraciones) entre los símplices estándares como complejos simpliciales ordenados. Definimos el *conjunto singular de un espacio topológico* X como el conjunto simplicial $\mathbf{Sing}(X)$ dado por la composición:

$$\mathbf{Sing}(X): \Delta \xrightarrow{|\Delta|} \mathbf{Top} \xrightarrow{\text{Top}(-, X)} \mathbf{Set}.$$

Más aún, esta construcción es funtorial en X , lo cual permite ir de los espacios topológicos a los conjuntos simpliciales en el sentido del **functor singular**:

(2.1.5) **Sing**: **Top** $\rightarrow$ **sSet**,

que envía una función continua $f : X \rightarrow Y$ al morfismo de conjuntos simpliciales dado para cada $n \in \mathbb{N}_0$ por $f_* : \mathbf{Top}(|\Delta^n|, X) \rightarrow \mathbf{Top}(|\Delta^n|, Y)$ la post-composición por f .

El lenguaje de conjuntos simpliciales permite recuperar sencillamente las teorías de homología estudiadas:

Definición 2.1.6. Dado un conjunto simplicial X , definimos el **complejo de Moore** como el complejo de cadenas:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}X_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}X_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}X_0 \rightarrow 0,$$

donde $\mathbb{Z}X_i$ es el grupo abeliano libre generado por el conjunto X_i y los morfismos de borde

$$\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i.$$

Esto permite dar la siguiente definición:

Definición 2.1.7. La **Homología** del conjunto simplicial X es la homología de su complejo de Moore.

Más aún, la manera en la que definimos los morfismos de borde es similar a la utilizada en general para definir la homología, por ejemplo, de espacios topológicos. De hecho, la homología singular de un espacio topológico se factoriza por el complejo de Moore del conjunto singular que le corresponde:

$$H_n(-, \mathbb{Z}) : \mathbf{Top} \xrightarrow{\mathbf{Sing}} \mathbf{sSet} \xrightarrow{\mathbb{Z}(-)} \mathbf{Ch}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{H_n} \mathbf{Ab}.$$

En palabras más concretas, no es otra forma de decir que la homología de un espacio topológico X coincide con la homología de **Sing**(X).

Ejemplo 2.1.4 (Nervio de una categoría). Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña. Definimos el **nervio** de $\mathcal{C}$ como el conjunto simplicial dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathcal{C})_0 &:= \text{obj}(\mathcal{C}), \\ \mathcal{N}(\mathcal{C})_1 &:= \text{Arr}(\mathcal{C}), \\ \mathcal{N}(\mathcal{C})_2 &:= \{(f_1, f_2) \mid \text{dom}(f_1) = \text{codom}(f_2)\} \\ &\dots \\ \mathcal{N}(\mathcal{C})_n &:= \{(f_1, \dots, f_n) \mid \text{dom}(f_i) = \text{codom}(f_{i+1})\} \\ &\dots \end{aligned}$$

cuyas caras vienen dadas, para cada $0 < i < n$ y cada $(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{N}(\mathcal{C})_n$, por:

$$d_i(f_1, \dots, f_n) := (f_1, \dots, f_i \circ f_{i+1} \cdots, f_n)$$

y para $i = 0$ o $i = n$ por quitar el primer o último morfismo respectivamente. Por otra parte, las degeneraciones vienen dadas para cada $i \in \llbracket n \rrbracket$ por:

$$s_i(f_1, \dots, f_n) := (f_1, \dots, f_i, \text{id}, f_{i+1} \cdots, f_n).$$

Un ejemplo de esta construcción es el de $\mathcal{C} = \mathcal{B}G$, el grupoide de un punto asociado a un grupo G . Esta categoría tiene un único objeto $\star$ y como morfismos $\star \rightarrow \star$ a los elementos de G . Su nervio en el lugar $n \in \mathbb{N}_0$ consiste de n -tuplas de elementos de G con las caras y degeneraciones como antes.

La construcción anterior del nervio recupera un conjunto simplicial ya conocido:

Ejemplo 2.1.5. Si consideramos a $\llbracket n \rrbracket$ como la categoría poset, entonces su nervio $\mathcal{N}(\llbracket n \rrbracket)$ tiene como k -símplices a las tuplas de k -morfismos componibles. Es decir, un k -símplice x corresponde a elegir k elementos ordenados de manera creciente en $\llbracket n \rrbracket$, o sea un elemento $x \in \Delta_k^n$. De esta forma se tiene que

$$\mathcal{N}(\llbracket n \rrbracket) = \Delta^n.$$

2.2. Realización Geométrica

Veamos que podemos construir un análogo a la realización geométrica de complejos simpliciales pero para conjuntos simpliciales. Esto permitirá definir una asignación funtorial en el sentido opuesto a la del conjunto singular en 2.1.5.

Definición 2.2.1. Sea X un conjunto simplicial. Dotando a cada X_n con la topología discreta, definimos la **realización geométrica** de X como el espacio

$$|X| := \left(\bigsqcup_{n \geq 0} X_n \times |\Delta^n| \right) / \sim$$

con la topología cociente, donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por $(x, |d^i|(p)) \sim (d_i(x), p)$ y $(x, |s^i|(q)) \sim (s_i(x), q)$ para cada $x \in X_n$, $p \in |\Delta^{n-1}|$, $q \in |\Delta^{n+1}|$ e $i \in \llbracket n \rrbracket$.

Notar que esto recupera la noción geométrica que teníamos: a cada n -símplice $x \in X_n$ lo interpretamos topológicamente como una copia del n -simplex estándar, obteniendo la colección disjunta $X_n \times |\Delta^n|$. El próximo paso natural es identificar las caras comunes: para cada n símplice x , identificamos cada punto de la cara i -ésima $|d^i|(p)$ con ese mismo punto p visto en la copia del $(n-1)$ -símplice estándar que le corresponde a $d_i(x)$. Es decir, $(x, |d^i|(p)) \sim (d_i(x), p)$. Por otra parte, el próximo paso razonable es identificar todas las degeneraciones en símplices pues su información geométrica esta codificada en símplices no degenerados. En particular, como cada simplex degenerado $s_i(x)$ se colapsa a x , todo punto q en el $(n+1)$ -símplice degenerado debería identificarse con su proyección $|s^i|(q)$ al n -simplex estándar correspondiente. Esto es, $(x, |s^i|(q)) \sim (s_i(x), q)$.

Proposición 2.2.2. La realización geométrica del n -símplice estándar $\Delta(-, \llbracket n \rrbracket): \Delta \rightarrow \mathbf{Set}$ es homeomorfa al n -símplice topológico estándar $|\Delta^n|$. Es decir, $|\Delta(-, \llbracket n \rrbracket)|$ coincide con la realización geométrica de Δ^n como complejo simplicial (ordenado).

DEMOSTRACIÓN. Para cada $k \geq 0$, tenemos una asignación

$$\begin{aligned} \Delta(\llbracket k \rrbracket, \llbracket n \rrbracket) \times |\Delta^k| &\rightarrow |\Delta^n| \\ (f, x) &\mapsto |f|(x), \end{aligned}$$

donde $|f|$ denota la realización geométrica como complejo simplicial de f . La asignación es continua porque cada $\Delta(\llbracket k \rrbracket, \llbracket n \rrbracket)$ es discreto y $|f|$ es continua. Esta familia de funciones

continuas induce una función continua r desde la unión disjunta que preserva la relación pues si g es una cocara o codegeneración en tal que $(f, |g|(x)) \sim (g^*(f), x)$, entonces

$$r(f, |g|(x)) = |f|(|g|(x)) = |f| \circ |g|(x) = |f \circ g|(x) = r(g^*(f), x).$$

Por otra parte, podemos considerar la inclusión $i: |\Delta^n| \rightarrow |\Delta(-, \llbracket n \rrbracket)|$ dada por la composición de funciones continuas:

$$i: |\Delta^n| \xrightarrow{\text{inc}} \{\text{id}\} \times |\Delta^n| \xrightarrow{i_n} \prod_{k \geq 0} X_k \times |\Delta^k| \xrightarrow{\text{proy}} |\Delta(-, \llbracket n \rrbracket)|.$$

En particular, se tiene que $r \circ i(x) = |\text{id}|(x) = x$ y luego i es sección. Basta ver que i es sobreyectiva; es decir, que para cada $[f, x] \in |\Delta(-, n)|$, con $f \in \Delta(\llbracket k \rrbracket, \llbracket n \rrbracket)$ y $x \in |\Delta^k|$ existe un $y \in |\Delta^n|$ tal que $[\text{id}, y] = [f, x]$. Para eso, tomemos $y = |f|(x)$. Por la Proposición 1.1.4, existen $g_1, \dots, g_r$ cocaras o codegeneraciones tales que $f = g_1 \circ \dots \circ g_r$, y por lo tanto

$$[(f, x)] = [g_1 \circ \dots \circ g_r, x] = [(g_r^* \circ \dots \circ g_1^*)(\text{id}), x] = [\text{id}, |g_1 \circ \dots \circ g_r|(x)] = [\text{id}, |f|(x)],$$

lo cual concluye que r es un homeomorfismo. ■

Más aún, veamos que la realización geométrica de conjuntos simpliciales recupera la realización geométrica de todos los complejos simpliciales (ordenados):

Teorema 2.2.3. Si K es un complejo simplicial ordenado, entonces sus realizaciones geométricas como conjunto y complejo simplicial coinciden.

Definamos funciones continuas en ambas direcciones y probemos que son inversas mutuas. En primer lugar, para cada n -tupla $x = [v_{i_0}, \dots, v_{i_n}] \in K_n$, resulta que $\sigma_x = \{v_{i_j}\}_{0 \leq j \leq n} \in K$ es un símple de K como complejo simplicial. Luego, el morfismo de posets f_x que envía cada $k \in \llbracket n \rrbracket$ a v_{i_k} es un morfismo de complejos simpliciales ordenados $f_x: \Delta^n \rightarrow \sigma_x$ e induce una función continua $|f_x|: |\Delta^n| \rightarrow |\sigma_x|$. Como K_n tiene la topología discreta, se tiene una función continua $f_n: K_n \times |\Delta^n| \rightarrow |K|$, tal que $f_n(x, p) = |f_x(p)| \in |\sigma_x| \subseteq |K|$. Más aún, la función inducida en la unión disjunta respeta la relación como consecuencia de que $f_x \circ d^i = f_{d_i(x)}$ y $f_x \circ s^i = f_{s_i(x)}$ para cada símple $x \in K_n$. Por lo tanto, tenemos una función bien definida:

$$\left(\prod_{n \geq 0} K_n \times |\Delta^n| \right) / \sim \xrightarrow{f} |K|.$$

Recíprocamente, dado un símple $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\} = \sigma \in K$ denotamos $[\sigma]$ al k -símple (no degenerado) $[v_{i_1}, \dots, v_{i_k}] \in K_k$. En particular, obtenemos para cada $\sigma \in K$ una función continua

$$g_\sigma: |\sigma| \xrightarrow{\cong} \{[\sigma]\} \times |\Delta^k| \xrightarrow{\text{inc}} \left(\prod_{n \geq 0} K_n \times |\Delta^n| \right) / \sim.$$

Por otra parte, se tiene una función g que envía la combinación convexa ordenada con escalares no nulos $\sum_{j=0}^k a_j v_{i_j} \in |K|$ a la clase del elemento $([v_{i_0}, \dots, v_{i_k}], (a_0, \dots, a_k))$ en la realización geométrica como conjunto simplicial. Esta función es continua porque restringida a cada símple $\sigma \in K$ lo es:

$$\begin{array}{ccc}
|K| & \xrightarrow{\quad g \quad} & (\coprod_{n \geq 0} K_n \times |\Delta^n|) / \sim \\
\uparrow & \nearrow \forall g_\sigma & \\
|\sigma| & &
\end{array}$$

Resta ver que f y g son inversas mutuas: por construcción, para cada símple $\sigma \in K$ se tiene que $|f_{[\sigma]}| \circ g_{|\sigma|} = \text{id}_{|\sigma|}$ y por lo tanto $f \circ g = \text{id}$. Recíprocamente, si $x \in K_n$ es un n -símple no degenerado, entonces $[\sigma_x] = x$ y por lo tanto $g_{|\sigma_x|} \circ |f_x| = \text{id}_{|\Delta^n|}$ y como todo elemento en la realización geométrica como conjunto simplicial se puede representar por uno no degenerado¹, obtenemos también que $g \circ f = \text{id}$.

2.3. La adjunción Geométrica-Singular

El objetivo de esta sección es demostrar la adjunción entre la realización geométrica y el conjunto singular, que termina de establecer el puente entre la topología y los conjuntos simpliciales. Para eso, probemos la funtorialidad de la realización geométrica:

Proposición 2.3.1 (Funtorialidad). Se tiene un funtor:

$$|\cdot| : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$$

que asigna a cada conjunto simplicial X su realización geométrica y a cada morfismo simplicial $f : X \rightarrow Y$ un morfismo $|f| : |X| \rightarrow |Y|$ inducido en el cociente por $f_n \times \text{id} : X_n \times |\Delta^n| \rightarrow Y_n \times |\Delta^n|$.

DEMOSTRACIÓN. las funciones $(f_n \times \text{id})_{n \in \mathbb{N}_0}$ son continuas porque X_n e Y_n tienen la topología discreta, y por lo tanto inducen una función continua $\tilde{f} : \coprod_{n \geq 0} X_n \times |\Delta^n| \rightarrow |Y|$. Más aún, la naturalidad de f como morfismo simplicial dice que para cualquier morfismo de posets $\theta : \llbracket n \rrbracket \rightarrow \llbracket m \rrbracket$ se tiene que

$$f_m \circ X(\theta) = Y(\theta) \circ f_n.$$

En particular, si θ es una cocara o codegeneración obtenemos para $x \in X_n$ y $p \in |\Delta^m|$:

$$\tilde{f}(x, |\theta|(p)) = [f_n(x), |\theta|(p)] = [Y(\theta)(f_n(x)), p] = [f_m(X(\theta)(x)), p] = \tilde{f}(X(\theta)(x), p),$$

luego $\tilde{f}$ preserva la relación e induce una función continua $|f| : |X| \rightarrow |Y|$. La funtorialidad se sigue inmediatamente de la definición. ■

La idea a continuación es observar que la realización geométrica de un conjunto simplicial tiene una estructura de colímite que permitirá explotar favorablemente sus propiedades categóricas. Para eso, se tiene la siguiente definición:

Definición 2.3.2. Sea X un conjunto simplicial. Su **categoría de símplexes** $\Delta \downarrow X$ tiene como objetos a sus símplexes y como morfismos entre un n -símple $x \in X_n$ y un m -símple $y \in X_m$ a morfismos de posets $\theta : \llbracket n \rrbracket \rightarrow \llbracket m \rrbracket$ tales que $X(\theta)(x) = y$.

Para el lector categórico, notar que esta definición coincide con la categoría de elementos de X (ver Definición 1.3.8).

¹Aquí usamos que si un n -símple en un conjunto simplicial $x \in X_n$ es no degenerado, siguiendo un argumento inductivo, podemos escribirlo como $x = s_{i_1} \cdots s_{i_k}(y)$, con $y \in X_m$ un m -símple no degenerado.

Observación 2.3.3. Por el Lema de Yoneda I 1.2.4, los objetos de esta categoría corresponden con morfismos simpliciales $\Delta^n \rightarrow X$ y los morfismos entre $x \in X_n$ e $y \in X_m$ con morfismos simpliciales $\theta_* : \Delta^n \rightarrow \Delta^m$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & & \\ \theta_* \downarrow & \searrow \varphi^x & \\ & X & \\ \Delta^m & \nearrow \varphi^y & \end{array}$$

donde φ^x y φ^y son los morfismos simpliciales como en el Ejemplo 2.1.1, inducidos por el Lema de Yoneda I 1.2.4, y θ_* es la post-composición por θ .

La categoría de símplices da lugar a un funtor $\diamond : \Delta \downarrow X \rightarrow \mathbf{sSet}$ que en objetos viene dado por $\diamond(x) = \Delta^n$ para cada $x \in X_n$ y en morfismos por $\diamond(\theta) = \theta_* : \Delta^n \rightarrow \Delta^m$. Este funtor permite recuperar al conjunto simplicial X como colímite de funtores representables:

Lema 2.3.4. Si X es un conjunto simplicial, entonces se tiene un isomorfismo natural:

$$X \cong \operatorname{colim}_{\substack{\Delta^n \rightarrow X \\ \text{en } \Delta \downarrow X}} \Delta^n = \operatorname{colim}_{x \in \Delta \downarrow X} \diamond(x).$$

DEMOSTRACIÓN. Observar que $\Delta^m = \Delta(-, m)$ es un funtor representable en la categoría de ordinales finitos y además la categoría de símplices de X es exactamente la categoría de elementos del funtor. Por lo tanto, este resultado es exactamente el resultado del Lema de Yoneda II 1.3.10. ■

El siguiente resultado dice que la realización geométrica de X coincide con tomar colímite sobre el funtor $\diamond$ a las realizaciones geométricas de los n -símplices, de manera análoga a lo que ocurre para complejos simpliciales:

Teorema 2.3.5. Si X es un conjunto simplicial, entonces se tiene un homeomorfismo natural

$$|X| \cong \operatorname{colim}_{\substack{\Delta^n \rightarrow X \\ \text{en } \Delta \downarrow X}} |\Delta^n| = \operatorname{colim}_{x \in \Delta \downarrow X} |\diamond(x)|.$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos que $|X|$ junto con ciertas funciones continuas cumplen la propiedad universal del colímite del funtor $|\diamond|$ en **Top**, para concluir que existe dicho isomorfismo natural. Observar que las funciones continuas de $|X|$ en un espacio topológico Z arbitrario se corresponden con funciones continuas de cada $X_n \times |\Delta^n|$ que satisfagan las relaciones de compatibilidad. Más aún, como X_n es discreto, esto equivale a dar funciones $\lambda_x : |\Delta^n| \rightarrow Z$, para cada $x \in X_n$, con $n \in \mathbb{N}_0$ que satisfagan la condición de compatibilidad

$$\lambda_{X(\theta)(x)} = \lambda_x \circ |\theta_*|.$$

para cualquier θ que sea una cocara o codegeneración en Δ . Más aún, como la relación es de equivalencia y las cocaras y codegeneraciones generan la categoría de ordinales finitos, la condición anterior es equivalente a pedir la igualdad para todos los morfismos θ en Δ . En resumen, tenemos que hay una correspondencia natural entre funciones continuas de $|X| \rightarrow Z$ y una colección, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y $x \in X_n$, de funciones continuas $\lambda_x : |\Delta^n| \rightarrow Z$ tales que cada vez que θ es un morfismo de posets con $X(\theta)(x) = y$, entonces $\lambda_{X(\theta)(x)} = \lambda_x \circ |\theta_*|$. Dicha

colección es exactamente un cocono sobre Z del funtor $|\diamond|$ y la correspondencia es establecida por componer con la inclusión, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y $x \in X_n$, dada por

$$\begin{aligned}\iota_x : |\Delta_n| &\rightarrow |X| \\ p &\mapsto [x, p]\end{aligned}$$

Esto prueba que $(|X|, (\iota_x)_{x \in X})$ tiene la propiedad universal del colímite, como queríamos. ■

Teorema 2.3.6. Se tiene una adjunción:

$$\begin{array}{ccc} & |\cdot| & \\ \text{sSet} & \xrightarrow{\quad} & \text{Top} \\ & \text{Sing} & \end{array}$$

$\perp$

DEMOSTRACIÓN. Basta ver que para cada conjunto simplicial X y cada espacio topológico Y , tenemos un isomorfismo natural en ambas variables

$$\text{Top}(|X|, Y) \cong \text{sSet}(X, \text{Sing}(Y)).$$

Gracias al Teorema 2.3.5 y la propiedad universal de los colímites tenemos la siguiente cadena de isomorfismos naturales en ambas variables:

$$\begin{aligned}\text{Top}(|X|, Y) &\cong \text{Top}(\text{colim}_{\substack{\Delta^n \rightarrow X \\ \text{en } \Delta \downarrow X}} |\Delta^n|, Y) \\ &\cong \text{colim}_{\substack{\Delta^n \rightarrow X \\ \text{en } \Delta \downarrow X}} \text{Top}(|\Delta^n|, Y) \\ &= \text{colim}_{\substack{\Delta^n \rightarrow X \\ \text{en } \Delta \downarrow X}} \text{Sing}(Y)_n\end{aligned}$$

Luego, por el Lema de Yoneda I 1.2.4 se tiene un isomorfismo natural en $\llbracket n \rrbracket \in \Delta$:

$$\text{Sing}(Y)_n \cong \text{sSet}(\Delta(-, \llbracket n \rrbracket), \text{Sing}(Y)).$$

Finalmente, aplicando el Lema 2.3.4 y la propiedad universal de los colímites concluimos que:

$$\begin{aligned}\text{Top}(|X|, Y) &\cong \text{colim}_{\substack{\Delta^n \rightarrow X \\ \text{en } \Delta \downarrow X}} \text{Sing}(Y)_n \\ &\cong \text{colim}_{\substack{\Delta^n \rightarrow X \\ \text{en } \Delta \downarrow X}} \text{sSet}(\Delta^n, \text{Sing}(Y)) \\ &\cong \text{sSet}(\text{colim}_{\substack{\Delta^n \rightarrow X \\ \text{en } \Delta \downarrow X}} \Delta^n, \text{Sing}(Y)) \\ &\cong \text{sSet}(X, \text{Sing}(Y)),\end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración del teorema. ■

Se obtiene el siguiente corolario inmediato:

Corolario 2.3.7. La realización geométrica $|\cdot| : \text{sSet} \rightarrow \text{Top}$ preserva colímites. En particular, preserva coproductos y pushouts.

2.4. Subcomplejos, esqueletos y esferas

Para describir la estructura celular de la realización geométrica, primero debemos introducir algunas nociones básicas:

Definición 2.4.1. Sea X un conjunto simplicial. Decimos que un conjunto simplicial Y junto a un morfismo simplicial $Y \rightarrow X$ es un **subcomplejo** si para cada $n \in \mathbb{N}_0$ es una inclusión de conjuntos $Y_n \subseteq X_n$.

Observación 2.4.2. Notar que la definición anterior implica que las caras y degeneraciones de un subcomplejo son restricciones de las del conjunto simplicial que lo contiene.

Veamos algunos ejemplos:

Definición 2.4.3. Sea X un conjunto simplicial y $n \in \mathbb{N}_0$. Definimos el n -**esqueleto** sk_n como el menor subcomplejo de X que contiene a los n -símplices no degenerados. En concreto, para cada $k \in \mathbb{N}$ viene dado por

$$(sk_n X)_k := \begin{cases} X_k & \text{si } k \leq n \\ \{s_{i_1} \cdots s_{i_{k-n}}(y) \in X_k : y \in X_n\} & \text{si } k > n, \end{cases}$$

cuyas caras y degeneraciones son las restricciones de las de X .

Geométricamente, el n -esqueleto se corresponde con lo que esperábamos: tiene la información exactamente de los símplices de dimensión *hasta* n . En particular, la realización geométrica colapsa los símplices degenerados por lo que no contendrá símplices de dimensión mayor.

Proposición 2.4.4. $sk_n : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sSet}$ define un funtor para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

DEMOSTRACIÓN. Si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo simplicial, entonces

$$(sk_n f)_k := f|_{(sk_n X)_k} : (sk_n X)_k \rightarrow (sk_n Y)_k$$

está bien definida pues f conmuta con las degeneraciones. La funtorialidad se sigue inmediatamente de la definición. ■

Si X es un conjunto simplicial, resulta claro que los esqueletos son subcomplejos encajados:

$$sk_0 X \subseteq sk_1 X \subseteq sk_2 X \subseteq \cdots \subseteq X.$$

Más aún, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.4.5. Si X es un conjunto simplicial, entonces

$$X \cong \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} sk_n X = \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}_0} sk_n X.$$

DEMOSTRACIÓN. X junto a las inclusiones de los n -esqueletos forman un cocono del diagrama indexado por $\mathbb{N}_0$. Más aún, para cada $k \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$X_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (sk_n X)_k$$

y por la Proposición 1.3.6 los colímites en $\mathbf{sSet}$ se calculan *lugar a lugar*. Por lo tanto, concluimos que

$$X \cong \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}_0} sk_n X.$$

■

Usando que la realización geométrica es adjunta a izquierda y el Corolario 2.3.7, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.4.6. Si X es un conjunto simplicial, entonces

$$|X| \cong \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}_0} |\operatorname{sk}_n X|$$

DEMOSTRACIÓN. La realización geométrica preserva colímites. ■

El resultado anterior nos muestra que la realización geométrica tiene la topología débil respecto ciertos n -esqueletos. Definamos un nuevo ingrediente que servirá para darle una estructura celular:

Definición 2.4.7. Definimos la n -esfera simplicial al conjunto simplicial $\partial \Delta^n := \operatorname{sk}_{n-1} \Delta^n$.

Observación 2.4.8. Explícitamente, la n -esfera simplicial en el lugar k es el subconjunto de $\Delta(\llbracket k \rrbracket, \llbracket n \rrbracket)$ con aquellos morfismos de posets no sobreyectivos. Esto coincide con el conjunto simplicial asociado al complejo simplicial ordenado $\partial \Delta^n$ de caras propias de un n -simplex. En particular, su realización geométrica coincide con la n -esfera topológica:

$$|\partial \Delta^n| \cong S^n.$$

Si quisieramos construir el n -esqueleto a partir del $(n-1)$ -esqueleto, debemos *adjuntarle* los símlices no degenerados que le faltan. De hecho, por el Lema de Yoneda I 1.2.4 los n -símlices de un conjunto simplicial $x \in X_n$ corresponden con mapas $\varphi^x: \Delta^n \rightarrow X$ que por functorialidad inducen

$$\operatorname{sk}_{n-1}(\varphi^x): \partial \Delta^n \rightarrow \operatorname{sk}_{n-1} X$$

Restringiendonos a los n -símlices no degenerados NX_n , las funciones anteriores jugarán el rol de las funciones de adjunción de n -celdas. El siguiente lema muestra cómo las degeneraciones provienen de un único símlice no degenerado de menor dimensión:

Lema 2.4.9 (Eilenberg-Zilber). Sea X un conjunto simplicial y $x \in X_n$ un n -símlice degenerado. Entonces existe un epimorfismo $s: \llbracket n \rrbracket \rightarrow \llbracket k \rrbracket$ y un k -símlice $y \in X_k$ no degenerado tal que $X(s)(y) = x$. Más aún, el par (s, y) es único con esta propiedad.

DEMOSTRACIÓN. Primero notar que un símlice es degenerado si y solo si está en la imagen de una degeneración, lo cual por la Proposición 1.1.4 ocurre si y solo si existe un epimorfismo $r: \llbracket n \rrbracket \rightarrow \llbracket j \rrbracket$ con $j < n$ tal que x es imagen de $X(r)$. La existencia de un par (s, y) como en el enunciado se sigue inductivamente del hecho de que los 0-símlices son no degenerados y la escritura en términos de símlices de dimensión menor debe terminar en finitos pasos. Supongamos que existen (s, y) y $(\tilde{s}, \tilde{y})$ tales que $X(s)(y) = X(\tilde{s})(\tilde{y})$. Nuevamente por la Proposición 1.1.4, los epimorfismos s y $\tilde{s}$ son composición de codegeneraciones y por lo tanto admiten secciones d y $\tilde{d}$. En particular, componiendo con $X(d)$ se tiene que

$$y = X(\tilde{s} \circ d)(\tilde{y}).$$

Como y es no degenerado, entonces $\tilde{s} \circ d$ no puede contener codegeneraciones en su factorización epi-mono pues de otro modo por las identidades simpliciales obtendríamos una contradicción. Luego, $\tilde{s} \circ d$ es monomorfismo y por ende y es un símlice de dimensión menor. Por simetría del argumento, resultan símlices de la misma dimensión y, en particular, $\tilde{s} \circ d$ es la identidad. Esto implica que $y = \tilde{y}$, pero además el mismo argumento muestra que las secciones de s coinciden con las de $\tilde{s}$, y como los epimorfismos en la categoría Δ quedan determinados por el conjunto de secciones concluimos que $s = \tilde{s}$.



Para formalizar la idea de adjuntar celdas, es preciso realizar la siguiente observación:

Observación 2.4.10. Por la Proposición 1.3.6, el coproducto $\coprod_{i \in I} X_i$ de una familia de conjuntos simpliciales se calcula punto a punto. Es decir, la colección de n -símplices $(\coprod_{i \in I} X_i)_n$ viene dada por la unión disjunta $\bigsqcup_{i \in I} (X_i)_n$.

Ahora si, probemos el siguiente resultado central:

Proposición 2.4.11. Sea X un conjunto simplicial y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, el siguiente diagrama es un pushout de conjuntos simpliciales:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{x \in NX_n} \partial \Delta^n & \xrightarrow{\coprod \text{sk}_{n-1} \varphi^x} & \text{sk}_{n-1} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{x \in NX_n} \Delta^n & \xrightarrow{\coprod \text{sk}_n \varphi^x} & \text{sk}_n X \end{array}$$

donde $NX_n \subseteq X_n$ es el conjunto de n -símplices no degenerados, las funciones verticales son inclusiones y $\varphi^x: \Delta^n \rightarrow X$ es el único morfismo simplicial tal que $\varphi_n^x(\text{id}_{[n]}) = x$.

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 1.3.6, basta probar que el diagrama resulta un pushout de conjuntos tras evaluar en cada $[k] \in \Delta$. En primer lugar, hay que verificar la conmutatividad del cuadrado. Basta chequear que para cada $x \in NX_n$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} (\partial \Delta^n)_k & \xrightarrow{(\text{sk}_{n-1} \varphi^x)_k} & (\text{sk}_{n-1} X)_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\Delta^n)_k & \xrightarrow{(\text{sk}_n \varphi^x)_k} & (\text{sk}_n X)_k \end{array}$$

Sin embargo, la conmutatividad resulta inmediata del hecho de que los morfismos horizontales son exactamente las restricciones de φ^x a subcomplejos. Verifiquemos que el siguiente diagrama es un pushout de conjuntos:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{x \in NX_n} (\partial \Delta^n)_k & \xrightarrow{\coprod (\text{sk}_{n-1} \varphi^x)_k} & (\text{sk}_{n-1} X)_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{x \in NX_n} (\Delta^n)_k & \xrightarrow{\coprod (\text{sk}_n \varphi^x)_k} & (\text{sk}_n X)_k \end{array}$$

Notemos que si $k \leq n-1$ entonces las flechas verticales son la identidad y las horizontales son iguales, por lo que el diagrama es un pushout. Si $k \geq n$, por la descripción de los pushouts

en la categoría de conjuntos, basta probar que la función horizontal inferior en el diagrama induce una biyección al restringirla:

$$\coprod (\mathrm{sk}_n \varphi^x)_k : \coprod_{x \in \mathrm{NX}_n} (\Delta_k^n \setminus \partial \Delta_k^n) \rightarrow (\mathrm{sk}_n X)_k \setminus (\mathrm{sk}_{n-1} X)_k.$$

Esta restricción es biyectiva si y solo si para cada $y \in (\mathrm{sk}_n X)_k \setminus (\mathrm{sk}_{n-1} X)_k$, o sea, cada k -símplice y que provenga de algún n -símplice no degenerado, existen un único morfismo de posets sobreyectivo $f : \llbracket k \rrbracket \rightarrow \llbracket n \rrbracket$ y un único n -símplice no degenerado $x \in \mathrm{NX}_n$ tales que $X(f)(x) = y$. Pero este resultado es exactamente lo demostrado en el Lema 2.4.9, de modo tal que el cuadrado resulta un pushout. ■

2.5. La estructura de CW

Con los resultados anteriores, ya estamos listos para demostrar que la realización geométrica tiene estructura de CW-complejo:

Teorema 2.5.1. Si X es un conjunto simplicial, entonces $|X|$ es un CW-complejo.

DEMOSTRACIÓN. Gracias a la Proposición 2.4.11 y el hecho de que la realización geométrica preserva colímites, y en particular pushouts, se tiene que el siguiente diagrama es un pushout de espacios topológicos:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{x \in \mathrm{NX}_n} |\partial \Delta^n| & \xrightarrow{\coprod |\mathrm{sk}_{n-1} \varphi^x|} & |\mathrm{sk}_{n-1} X| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{x \in \mathrm{NX}_n} |\Delta^n| & \xrightarrow{\coprod |\mathrm{sk}_n \varphi^x|} & |\mathrm{sk}_n X| \end{array}$$

Las identificaciones como complejos simpliciales de Δ^n con D^n y de $\partial \Delta^n$ con S^n implican que cada n -esqueleto se construye adjuntando n -celdas al esqueleto anterior. Por último, por la Proposición 2.4.6 sabemos que $|X| \cong \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} |\mathrm{sk}_n X|$ tiene la topología débil, es decir, la final respecto de las inclusiones y por lo tanto efectivamente la realización geométrica de un conjunto simplicial resulta un CW-complejo. ■

Observación 2.5.2. Dado X un espacio topológico, la counidad de la adjunción 2.3.6 es una función continua

$$\epsilon_X : |\mathrm{Sing}(X)| \rightarrow X$$

que por el Teorema 2.5.1 tiene como dominio a un CW-complejo. Más aún, la naturalidad de la counidad dice que para cualquier función continua $f : X \rightarrow Y$ se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} |\mathrm{Sing}(X)| & \xrightarrow{|\mathrm{Sing}(f)|} & |\mathrm{Sing}(Y)| \\ \epsilon_X \downarrow & & \downarrow \epsilon_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

De hecho, esta resulta una manera funtorial de obtener una CW-aproximación:

Teorema 2.5.3. Si X es un espacio topológico, la counidad de la adjunción $\epsilon_X : |\mathbf{Sing}(X)| \rightarrow X$ es una equivalencia débil funtorial.

DEMOSTRACIÓN. La demostración del teorema puede encontrarse en [GJ09] mediante el uso de teoría de extensiones anodinas. La funtorialidad de la CW-aproximación es exactamente la naturalidad de la counidad. ■

2.6. Algunas aplicaciones de la teoría

La definición del Complejo de Moore 2.1.6 tiene como consecuencia una conclusión interesante: la información homológica del complejo de cadenas en el caso singular para espacios topológicos está resumida en una asignación $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sSet}$. Es decir, la teoría de homología singular se factoriza por un funtor de la categoría de complejos simpliciales. Más aún, componiendo con el funtor grupo abeliano libre, podemos decir que se factoriza por la categoría de *grupos abelianos simpliciales*, denotada $\mathbf{sAb}$. El siguiente resultado dice que, en algún sentido, todos los complejos de cadenas son exactamente un grupo abeliano simplicial y por lo tanto toda teoría de homología proviene de la homología de conjuntos simpliciales:

Teorema 2.6.1 (La correspondencia de Dold-Kan). Se tiene una equivalencia de categorías

$$\mathbf{sAb} \simeq \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})_{\geq 0},$$

entre la categoría de grupos abelianos simpliciales y la de complejos de cadena sobre $\mathbb{Z}$ acotados inferiormente.

DEMOSTRACIÓN. Ver Theorem 2.5.6.1 de [Lur18]. ■

La realización geométrica de conjuntos simpliciales 2.2.1 es ampliamente utilizada como una herramienta en la matemática moderna. Para eso, mencionamos aquí dos ejemplos donde es conveniente utilizarla para definir ciertos objetos de interés.

Definición 2.6.2. (Espacio de Eilenberg-MacLane) Dado un grupo G , llamamos **Espacio de Eilenberg-MacLane** y lo notamos $K(G, 1)$ a la realización geométrica $|\mathcal{B}G|$.

La siguiente observación motiva la idea de definir como antes a este espacio:

Observación 2.6.3. La descripción del espacio de Eilenberg-MacLane $K(G, 1)$ a través de la realización geométrica es funtorial en G .

DEMOSTRACIÓN. Todo morfismo de grupos $G \rightarrow H$ es un funtor $\mathcal{B}G \rightarrow \mathcal{B}H$ que induce un morfismo simplicial entre los nervios y por lo tanto una función continua entre los espacios de Eilenberg-MacLane. ■

Se puede demostrar el siguiente resultado:

Teorema 2.6.4. El espacio de Eilenberg-MacLane $K(G, 1)$ es un CW-complejo que tiene grupo de homotopía $\pi_1(K(G, 1)) = G$ y trivial en otro caso.

DEMOSTRACIÓN. Ver Proposition 7.8, [GJ09]. ■

Más aún, otro ejemplo de aplicación relevante de la teoría de complejos simpliciales es en la definición de uno de los invariantes algebraicos más importantes: la K -teoría algebraica.

Definición 2.6.5. Dado un anillo R , consideramos la categoría de R -módulos proyectivos finitamente generados, denotada $\mathcal{P}(R)$. Se define la **categoría $Q_{\mathcal{P}(R)}$ de Quillen**, cuyos objetos son R -módulos proyectivos y los morfismos entre X e Y son clases de isomorfismos de diagramas en $\mathcal{P}(R)$

$$X \ll \text{-----} P \hookrightarrow Y$$

donde la composición viene dada por tomar pullback del epimorfismo por el monomorfismo.

Los detalles en la construcción Q de Quillen pueden verse en [Qui06]. En particular, si bien $Q_{\mathcal{P}(R)}$ no es pequeña, es equivalente a una categoría pequeña y por lo tanto podemos calcularle su nervio. De esto mismo, surge inmediatamente la siguiente definición dada por Quillen, que recupera los grupos K_0, K_1 y K_2 de K -teoría ya conocidos y permite extender satisfactoriamente el invariante a uno con mejores propiedades homológicas:

Definición 2.6.6. Se define la **K -teoría algebraica** de un anillo R en grado $n \in \mathbb{N}_0$ como

$$K_n(R) := \pi_{n+1} |\mathcal{N}(Q_{\mathcal{P}(R)})|.$$

Finalmente, veamos como la teoría de conjuntos simpliciales se utiliza para introducir las ∞ -categorías:

Definición 2.6.7. Dados $n \in \mathbb{N}_0$ e $i \in \llbracket n \rrbracket$ se define el i -ésimo **cuerno** Λ_i^n como el subconjunto simplicial de $\partial \Delta^n$ dado, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, por

$$(\Lambda_i^n)_k := \{f \in \Delta_k^n : \llbracket n \rrbracket \not\subseteq \text{im}(f) \cup \{i\}\}.$$

Es decir, el i -ésimo cuerno se puede obtener del n -símplex removiendo su interior y la cara opuesta al vértice i : es el mínimo subconjunto simplicial de Δ^n que contiene todas sus caras menos la i -ésima. Geométricamente, los cuernos representan lo esperado:

Observación 2.6.8. Sea $n \in \mathbb{N}_0$ e $i \in \llbracket n \rrbracket$. Identificando a la realización geométrica $|\Delta^n|$ con el n -símplex topológico estándar, obtenemos que $|\Lambda_i^n|$ se identifica con el subespacio cerrado dado por

$$|\Lambda_i^n| = \{(t_0, \dots, t_n) \in |\Delta^n| : t_j = 0 \text{ para algún } j \neq i\}$$

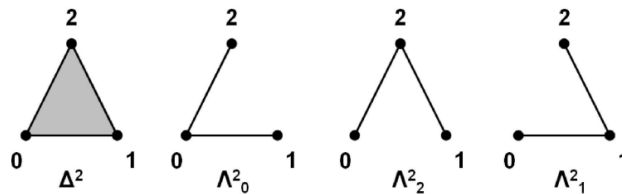


FIGURA 2.4. Tres cuernos del 2-símplex.

Definición 2.6.9. Una ∞ -**categoría** es un conjunto simplicial X que cumple que para todos $n \in \mathbb{N}_0$ y $0 < i < n$, todo morfismo de conjuntos simpliciales $\sigma_0 : \Lambda_i^n \rightarrow X$ se puede extender a un n -símplice $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

Ejemplo 2.6.1. Si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña, entonces $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ es una ∞ -categoría.

En una ∞ -categoría X , pensamos que hay morfismos representados por los 1-símplices de X . Más aún, tenemos una noción de composición: si $f \in X_1$ y $g \in X_1$ son 1-símplices tales que $d_0(f) = d_1(g)$, entonces queda determinado un morfismo $(f, g): \Lambda_1^2 \rightarrow X$ definido en generadores: el símplex (01) tiene imagen f y el símplex (12) tiene imagen g . Luego, por la propiedad de extensión existe un 2-símplex $\sigma: \Delta^2 \rightarrow X$ que extiende a (f, g) . Este 2-símplex representa *una* composición:

$$\begin{array}{ccc}
 & d_0(f) = d_1(g) & \\
 f \nearrow & & \searrow g \\
 d_1(f) & \text{-----} d_1(\sigma) \text{-----} & d_0(g)
 \end{array}$$

El problema de esta noción de composición es que no es necesariamente única, pues la extensión no necesariamente lo es. El siguiente resultado dice que las ∞ -categorías recuperan las categorías usuales si pedimos unicidad de la extensión:

Teorema 2.6.10. Sea X un conjunto simplicial. Entonces X es isomorfo al nervio de una categoría si y solo si es una ∞ -categoría con unicidad en la extensión de morfismos simpliciales.

DEMOSTRACIÓN. Ver Proposition 1.3.4.1 de [Lur18]. ■

Bibliografia

- [Dub23] Eduardo J Dubuc. From yoneda to topoi morphisms. *arXiv preprint arXiv:2312.04716*, 2023.
- [Fri08] Greg Friedman. An elementary illustrated introduction to simplicial sets. *arXiv preprint arXiv:0809.4221*, 2008.
- [GJ09] Paul G Goerss and John F Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [HW21] Calum Hughes and Sarah Whitehouse. The dold-kan correspondence. *Unpublished expository article available online at <https://calum-hughes.github.io/portfolio/Dold-Kan.pdf>*, 2021.
- [Lur18] Jacob Lurie. Kerodon. <https://kerodon.net>, 2018.
- [ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5. Springer Science & Business Media, 1998.
- [Qui06] Daniel Quillen. Higher algebraic k-theory: I. In *Higher K-Theories: Proceedings of the Conference held at the Seattle Research Center of the Battelle Memorial Institute, from August 28 to September 8, 1972*, pages 85–147. Springer, 2006.
- [Rie11] Emily Riehl. A leisurely introduction to simplicial sets. *Unpublished expository article available online at <http://www.math.harvard.edu/eriehl>*, 2011.
- [Rie17] Emily Riehl. *Category theory in context*. Courier Dover Publications, 2017.