

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA ESTRUCTURA ADITIVA EN CATEGORÍAS ABELIANAS

VALENTÍN NICO Y JULI ZANETTE

INTRODUCCIÓN

En Álgebra Homológica es habitual trabajar en el contexto de las categorías abelianas, que son una generalización de las categorías ${}_A\text{Mod}$, para A un anillo unital. La ventaja de este enfoque, sin embargo, no pasa por la mayor generalidad¹, sino por que usar categorías abelianas nos habilita varias herramientas del pensamiento categórico. Por ejemplo, las proposiciones:

- La sucesión exacta $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$ se parte si y sólo si f es sección.
- La sucesión exacta $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$ se parte si y sólo si g es retracción.

son expresables tanto en el lenguaje de los A -módulos como en el de las categorías abelianas, donde resultan mutuamente duales. Como el dual de una categoría abeliana es una categoría abeliana, para demostrar que ambos enunciados valen en toda categoría abeliana basta con hacerlo para uno solo e invocar el Principio de Dualidad. En contraste, si bien las demostraciones para ambas proposiciones en categorías de A -módulos son análogas, no es evidente cómo automatizar la conversión sin acercarse sospechosamente a demostrar que ${}_A\text{Mod}$ es una categoría abeliana.

En general, los enunciados de carácter más categórico o *flechístico* (por ejemplo, aquellos que pueden darse sin aludir a los elementos de un A -módulo) se ven beneficiados por el pensamiento propio de las categorías abelianas.

Hay varias posibles definiciones para categoría abeliana; la página dedicada de Wikipedia la define como una categoría localmente pequeña que:

- (1) Viene equipada de una estructura preaditiva.
- (2) Tiene un objeto cero.
- (3) Todo morfismo tiene kernel y cokernel.
- (4) Todo monomorfismo es el kernel de algún morfismo; todo epimorfismo es el cokernel de algún morfismo.
- (5) Todo par de objetos tiene biproducto.

¹El teorema de embebimiento de Freyd-Mitchell establece que toda categoría abeliana *pequeña* está embebida exactamente en ${}_A\text{Mod}$ para algún anillo unital A .

Es importante aclarar que esta no es la definición de categoría abeliana que usaremos en este trabajo. Si construcciones como *estructura preaditiva*, *kernel* o *biproducto* no son conocidas por el lector, no hay nada que temer; serán apropiadamente definidas y profundizadas en las secciones posteriores de este trabajo. El punto de mencionar esta definición es observar una diferencia saliente entre sus ítems:

Dar una estructura preaditiva sobre una categoría es dar una estructura de grupos abelianos para sus HomSets, que se lleva razonablemente con la composición (de nuevo, los detalles los daremos en las secciones correspondientes). *A priori*, una categoría puede admitir más de una estructura preaditiva; (1) pide, para definir una categoría abeliana, que se seleccione una en particular; en otras palabras, *dotarla de información adicional*. En contraste, los puntos (2), (3) y (4) son *condiciones*, que una categoría ordinaria puede o no cumplir. El punto (5) también califica como condición, pero es dependiente de la estructura preaditiva especificada en (1), ya que la definición de biproducto involucra sumar en los HomSets.

La finalidad de este trabajo es demostrar que los axiomas (1) y (5) pueden remplazarse por la existencia de productos y coproductos binarios; bajo esta hipótesis y los axiomas (2), (3) y (4) se puede inducir una *única* estructura preaditiva y construir biproductos binarios. Para dotar a los HomSets de estructura de grupo recurriremos a una herramienta simple pero muy útil en la definición natural de operaciones sobre conjuntos: el Argumento de Eckmann-Hilton.

En la primera sección daremos nuestra definición de categorías abelianas (Definición 9), introduciendo y demostrando los conceptos básicos necesarios. Este preámbulo culminará en la caracterización de los monomorfismos y epimorfismos en términos de sus kernels y cokernels (Teorema 19), sin recurrir a una estructura preaditiva. En la segunda sección enunciaremos y demostraremos el argumento de Eckmann-Hilton (Teorema 20), y lo extenderemos a una versión sustractiva (Teorema 25), más afín a la necesidad de definir sobre los HomSets operaciones con inversa. En la tercera sección definiremos operaciones de resta y co-resta (Definición 33 y Definición 43) sobre los HomSets de una categoría abeliana. Recurriendo a nuestra versión de Eckmann-Hilton, estas producirán en la cuarta sección una estructura preaditiva sobre la categoría, que, asombrosamente, resultará *única* (Teorema 54). Provistos ya de la operación suma sobre los HomSets, en la quinta sección introduciremos la noción de biproducto (Definición 57), y demostraremos la equivalencia entre su existencia y la de productos y coproductos finitos (Teorema 57). A su vez, comentaremos cómo la estructura preaditiva puede ser descripta a través del biproducto (Teorema 61). Finalmente, concluimos el trabajo con la unificación de las distintas axiomatizaciones de categoría abeliana (Teorema 63).

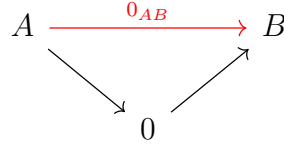
1. GENERALIDADES

Definición 1. Dada $\mathcal{C}$ una categoría, llamamos **objeto cero**, denotado 0 , a un objeto inicial y final. Es decir, un objeto que satisface que para todo objeto A de $\mathcal{C}$ existe un único

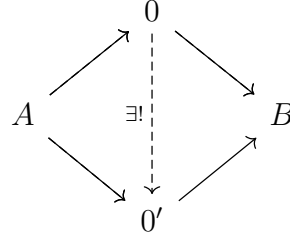
morfismo de 0 en A (inicial) y de A en 0 (final). Una categoría con objeto cero se dice **punteada**.

Observación 2. Cualesquiera dos objetos ceros son isomorfos vía un isomorfismo único.

Definición 3. Dados A, B dos objetos, llamamos **morfismo cero**, $0_{AB} : A \rightarrow B$ a la única factorización a través del objeto cero dada por:



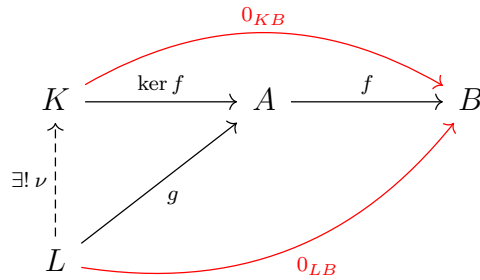
Observación 4. La buena definición del morfismo cero (esto es, que es independiente del objeto cero elegido) se sigue de la conmutatividad del siguiente diagrama:



Observación 5. Para cualquier morfismo $f : X \rightarrow A$ en una categoría punteada $\mathcal{C}$ vale que $0_{AB} \circ f = 0_{XB}$. Dualmente, para cualquier morfismo $g : B \rightarrow Y$ vale que $g \circ 0_{AB} = 0_{AY}$.

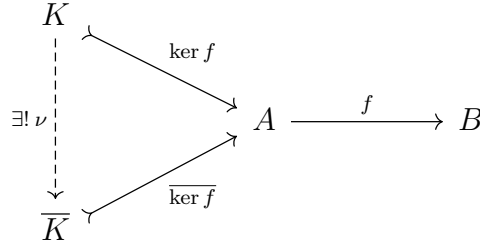
Definición 6. Dada una categoría $\mathcal{C}$ punteada y $f : A \rightarrow B$ un morfismo, decimos que $\ker f : K \rightarrow A$ es un **kernel** de f si satisface que:

- $f \circ \ker f = 0_{KB}$.
- Para toda $g : L \rightarrow A$ que cumple que $f \circ g = 0_{LB}$ existe una única factorización $\nu : L \rightarrow K$ de g a través de $\ker f$:



Dualmente, se obtiene la noción de **cokernel** de f y lo notamos $\text{coker } f$.

Observación 7. El kernel de un morfismo está bien definido salvo isomorfismo único: si $\ker f : K \rightarrow A$ y $\overline{\ker f} : \overline{K} \rightarrow A$ son kernels de $f : A \rightarrow B$, por definición de kernel existe una única $\nu : K \rightarrow \overline{K}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:



Esta ν resulta un isomorfismo.

Observación 8. Todo kernel es un monomorfismo. Dualmente, todo cokernel es un epimorfismo.

Comenzamos introduciendo los axiomas para una Categoría Abeliana:

Definición 9. Una categoría $\mathcal{C}$ localmente pequeña² se dice **abeliana** si satisface las siguientes condiciones:

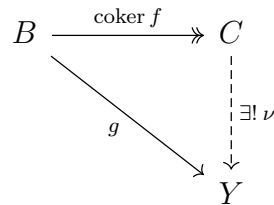
- (1) Existe un objeto cero.
- (2) Todo morfismo admite kernel y cokernel.
- (3) Todo monomorfismo es el kernel de algún morfismo y todo epimorfismo es el cokernel de algún morfismo.
- (4) Existen productos y coproductos finitos.

Observación 10. Los axiomas de categoría abeliana son simétricos. Esto implica que si $\mathcal{C}$ es abeliana, $\mathcal{C}^{op}$ también lo es y el enunciado dual a una proposición cierta en cualquier categoría abeliana también es cierto, viendo la validez del enunciado original en la categoría opuesta.

De la definición se desprenden algunas propiedades esenciales.

Proposición 11. Sea $f : A \rightarrow B$ un monomorfismo en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Entonces $f = \ker(\text{coker } f)$. Dualmente, todo epimorfismo verifica que es el cokernel de su kernel.

Demostración. Por la condición 3 en la definición de categoría abeliana, resulta que f es en particular el kernel de un morfismo $g : B \rightarrow Y$. Luego, como $g \circ f = 0_{AY}$, debe ser que existe una única factorización $\nu : C \rightarrow Y$ que haga conmutar el siguiente diagrama:

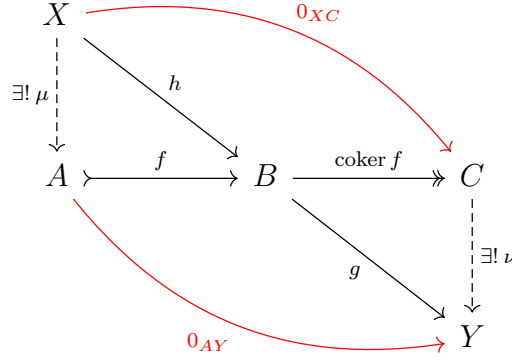


²Una categoría se dice *localmente pequeña* si para todo par de objetos X, Y vale que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un conjunto.

Más aún, verifiquemos que f satisface la propiedad universal del kernel para su cokernel. En primer lugar, es claro que $\text{coker } f \circ f = 0_{AC}$. En segundo lugar, dada $h : X \rightarrow B$ tal que $\text{coker } f \circ h = 0_{XC}$, debe ser que:

$$g \circ h = \nu \circ \text{coker } f \circ h = \nu \circ 0_{XC} = 0_{XY}.$$

Luego, por ser $f = \ker g$, existe una única factorización a través de f de manera tal que el siguiente diagrama conmute:



Luego, verificamos que f satisface la propiedad universal del $\ker(\text{coker } f)$. $\square$

Lema 12. Para cualesquiera objetos A, B de una categoría abeliana $\mathcal{C}$, vale que $\ker 0_{AB} : K \rightarrow A$ es un isomorfismo. Dualmente, vale que $\text{coker } 0_{AB} : B \rightarrow C$ es un isomorfismo.

Demostración. Por la Observación 5, vale que $0_{AB} \circ 1_A = 0_{AB}$; luego, existe una única factorización ν a través del kernel de 0_{AB} , de manera tal que: $\ker 0_{AB} \circ \nu = 1_A$. Teniendo en cuenta la Observación 8, $\ker 0_{AB} : K \rightarrow A$ es un monomorfismo y un split-epimorfismo³ y por ende un isomorfismo. $\square$

Teorema 13. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $f : A \rightarrow B$ un morfismo. Son equivalentes:

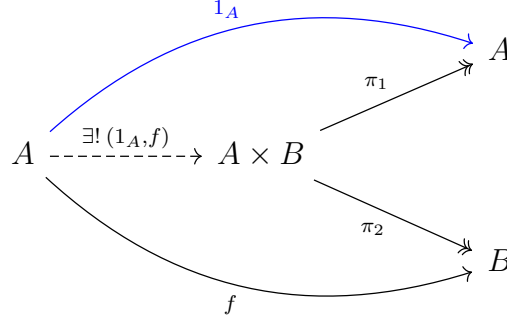
- (1) f es un isomorfismo.
- (2) f es un monomorfismo y un epimorfismo.

Demostración. La primera implicación es consecuencia directa de la existencia de una inversa para f y es cierta sin hipótesis sobre la categoría $\mathcal{C}$. Recíprocamente, si f es monomorfismo, por la condición (3) en la definición de categoría abeliana, resulta ser el kernel de un morfismo $g : B \rightarrow C$. Esto implica que $g \circ f = 0_{BC} \circ f = 0_{AC}$; pero como f es epimorfismo, debe ser que $g = 0_{BC}$. Luego, $f = \ker g = \ker 0_{BC}$ y por el lema anterior, f es un isomorfismo. $\square$

El objetivo de la siguiente serie de lemas será clasificar los monomorfismos y epimorfismos de una categoría abeliana arbitraria. En el camino, demostraremos que toda categoría abeliana admite egalizadores y coegalizadores, de donde, junto a la existencia de productos finitos, coproductos finitos y objeto cero, se deduce la existencia de pullbacks y pushouts.

³Aquí, y a lo largo del trabajo, la palabra split-monomorfismo y split-epimorfismo refieren a morfismos con una inversa a izquierda y derecha, respectivamente.

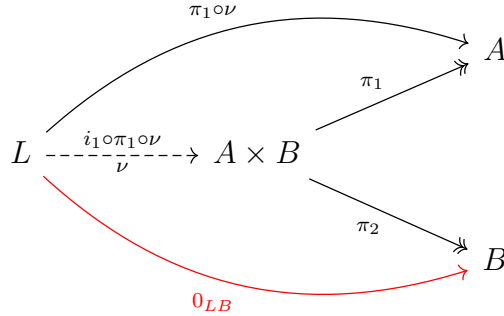
Observación 14. Dado un morfismo $f : A \rightarrow B$, por la propiedad universal del producto existe un único morfismo $(1_A, f) : A \rightarrow A \times B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:



donde π_1 y π_2 son las proyecciones canónicas. Además, $(1_A, f)$ resulta split-monomorfismo y las proyecciones canónicas split-epimorfismos. Este morfismo es llamado **gráfico** de f , pues extiende la noción de gráfico de funciones usual.

Proposición 15. Sean A, B dos objetos en una categoría abeliana. Llamando $i_1 := (1_A, 0_{AB}) : A \rightarrow A \times B$ resulta que $i_1 = \ker \pi_2$. Análogamente, si $i_2 := (0_{BA}, 1_B) : B \rightarrow A \times B$ resulta que $i_2 = \ker \pi_1$.

Demostración. Probamos la propiedad para i_1 y el otro caso es análogo. Notar que por la Observación 14, i_1 es un monomorfismo y además $\pi_2 \circ i_1 = 0_{AB}$. Como i_1 es monomorfismo, cualquier factorización de un morfismo a través de si misma resultará necesariamente única. Luego, si tomamos $\nu : L \rightarrow A \times B$ tal que $\pi_2 \circ \nu = 0_{LB}$, resulta que ambas ν y $i_1 \circ \pi_1 \circ \nu$ hacen conmutar el siguiente diagrama:



Luego, por la unicidad en la propiedad universal del producto debe necesariamente ser que $\nu = i_1 \circ \pi_1 \circ \nu$ y obtenemos la factorización deseada. $\square$

Observación 16. Dadas $f, g : A \rightarrow B$, existen $F : A \times B \rightarrow C$ y $G : A \times B \rightarrow D$ tales que $(1_A, f) = \ker F$ y $(1_A, g) = \ker G$. Además, llamemos $(F, G) : A \times B \rightarrow C \times D$ a la inducida por la propiedad universal del producto. Si $\ker(F, G) : \mathbb{E} \rightarrow A \times B$ es el kernel de (F, G) , vale que:

- $F \circ \ker(F, G) = \pi_1 \circ (F, G) \circ \ker(F, G) = 0_{\mathbb{E}C}$
- $G \circ \ker(F, G) = \pi_2 \circ (F, G) \circ \ker(F, G) = 0_{\mathbb{E}D}$

y por ende existen únicas $\alpha_1, \alpha_2 : K \rightarrow A$, monomorfismos por ser las primeras en una composición que es un monomorfismo, tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{\alpha_1} & A & & \\ \downarrow \alpha_2 & \searrow \ker(F,G) & \downarrow (1_A, f) & & \\ A & \xrightarrow{(1_A, g)} & A \times B & \xrightarrow{G} & D \\ & & \downarrow F & \searrow (F,G) & \uparrow \pi_2 \\ & & C & \xleftarrow{\pi_1} & C \times D \end{array}$$

Del hecho de que el cuadrado superior izquierdo conmuta, se deduce que:

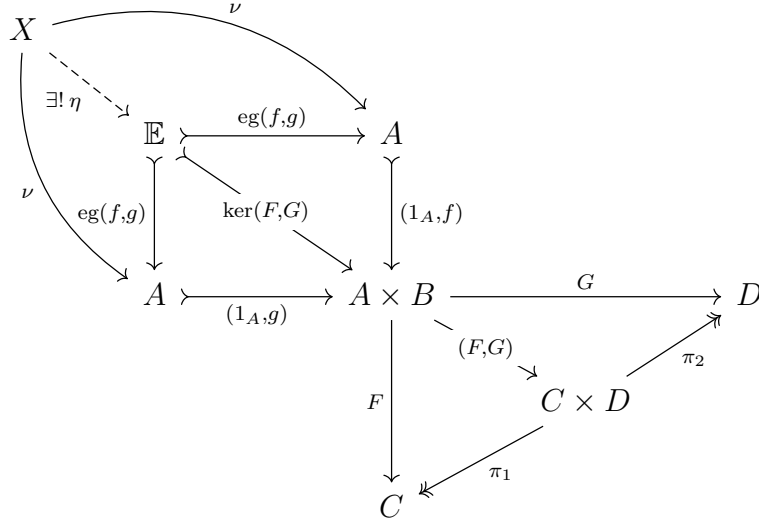
$$\alpha_1 = \pi_1 \circ (1_A, f) \circ \alpha_1 = \pi_1 \circ (1_A, g) \circ \alpha_2 = \alpha_2.$$

Teorema 17. Todo par de morfismos $f, g : A \rightarrow B$ en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ admite un egalizador $\text{eg}(f, g) : \mathbb{E} \rightarrow A$. Más aún, el egalizador es un monomorfismo. Dualmente, todo par de morfismos admite un coegalizador y el mismo resulta un epimorfismo.

Demostración. Verifiquemos que $\text{eg}(f, g) := \alpha_1 = \alpha_2$, definidos según la observación 16. En particular, probemos que el cuadrado superior izquierdo del diagrama (1) es un pullback. Notar que dado un par de morfismos con dominio X y codominio A que hagan conmutar el cuadrado son necesariamente iguales, por un argumento análogo al de la observación anterior componiendo con la primera proyección del producto. De esta forma, exhibir un $\nu : X \rightarrow A$ que haga conmutar el cuadrado equivale a exhibir un morfismo que egalice a f y g ; y la factorización única por E equivale a factorizar un morfismo por el candidato a $\text{eg}(f, g)$. Esto muestra que la propiedad universal del pullback coincide con la propiedad universal del egalizador de f y g . Luego, dado un ν con esta propiedad, vale que:

- $\pi_1 \circ (F, G) \circ (1_A, f) \circ \nu = F \circ (1_A, f) \circ \nu = 0_{XC}$.
- $\pi_2 \circ (F, G) \circ (1_A, f) \circ \nu = G \circ (1_A, g) \circ \nu = 0_{XD}$.

Por la propiedad universal del producto, debe ser que $(F, G) \circ (1_A, f) \circ \nu$ es el morfismo nulo y por ende existe un único morfismo $\eta : X \rightarrow \mathbb{E}$ de manera tal que $(1_A, f) \circ \nu$ se factoriza por el $\ker(F, G)$. Es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

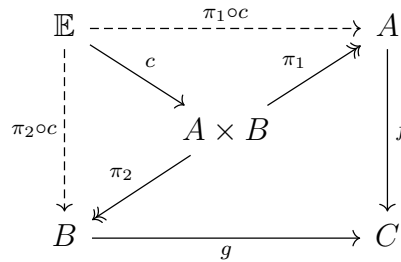


Luego, del hecho que $(1_A, f)$ es un monomorfismo, se deduce que $\text{eg}(f, g) \circ \eta = \nu$, y queda demostrado que el cuadrado en cuestión es un pullback. Por lo destacado anteriormente, resulta que $\text{eg}(f, g)$ es el egalizador de f y g . Además, como $\ker(F, G)$ es un monomorfismo, se sigue que el egalizador es necesariamente un monomorfismo. La noción dual se sigue de la validez de la proposición en la categoría opuesta.

□

Corolario 18. *Toda categoría abeliana admite pullbacks y pushouts.*

Demostración. Dadas $f : A \rightarrow C$ y $g : B \rightarrow C$, y dadas $\pi_1 : A \times B \rightarrow A$, $\pi_2 : A \times B \rightarrow B$ las proyecciones canónicas; entonces es directo verificar que el pullback de f y g está dado por el siguiente cuadrado conmutativo:



donde $c := \text{coeg}(f \circ \pi_1, g \circ \pi_2)$. Dualmente, se deduce la existencia de pushouts a partir de la existencia de coproductos binarios y coegalizadores.

□

Teorema 19. *Dada $f : A \rightarrow B$ en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Son equivalentes:*

- (1) f es un monomorfismo.
- (2) Para cualquier $\alpha : X \rightarrow A$, vale la implicación: $f \circ \alpha = 0_{XB} \Rightarrow \alpha = 0_{XA}$.
- (3) $\ker f = 0_{XA}$ para cualquier objeto X de $\mathcal{C}$.

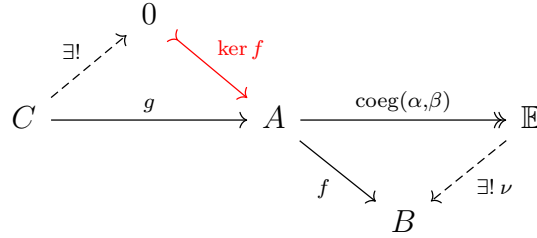
Análogamente, se obtiene la noción dual para los epimorfismos.

Demostración. Probemos cada una de las implicaciones:

- (1) $\Rightarrow$ (2): Sea $\alpha : X \rightarrow A$ de manera tal que $f \circ \alpha = 0_{XB} = f \circ 0_{XA}$. Luego, como f es monomorfismo, se sigue que $\alpha = 0_{XA}$.
- (2) $\Rightarrow$ (3): Notar que si $\ker f : X \rightarrow A$ es un kernel de f , entonces vale $f \circ \ker f = 0_{XB}$. Luego, se sigue que $\ker f = 0_{XA}$.
- (3) $\Rightarrow$ (1): Sean $\alpha, \beta : X \rightarrow A$ tales que $f \circ \alpha = f \circ \beta$. Luego, por el Teorema 17 existe el coegalizador $\text{coeg}(\alpha, \beta) : A \rightarrow \mathbb{E}$ y, como f también egaliza a α y β , existe una única factorización $\nu : \mathbb{E} \rightarrow B$ tal que $f = \nu \circ \text{coeg}(\alpha, \beta)$. Luego, como el coegalizador es un epimorfismo, existe $g : C \rightarrow A$ tal que $\text{coker } g = \text{coeg}(\alpha, \beta)$. Luego, vale que:

$$f \circ g = \nu \circ \text{coeg}(\alpha, \beta) \circ g = \nu \circ 0_{C\mathbb{E}} = 0_{CB}.$$

Por ende, existe una única factorización de g a través del kernel de f . Por hipótesis, $\ker f = 0_{0A}$ es un kernel de f y el siguiente diagrama conmuta:



De lo que se sigue inmediatamente que $g = 0$ y, por el Lema 12, $\text{coeg}(\alpha, \beta)$ es un isomorfismo. En particular, $\text{coeg}(\alpha, \beta)$ es un monomorfismo y $\alpha = \beta$. $\square$

2. EL ARGUMENTO DE ECKMANN-HILTON

Un aspecto de la definición de categorías abelianas que antes hemos mencionado y que vale la pena enfatizar es su carácter simétrico. A la hora de definir una operación aditiva en los HomSets, habrá dos posibles procedimientos, mutuamente duales. El teorema de Eckmann-Hilton es la herramienta clave que nos va a servir para unificarlos y, de paso, garantizar la estructura de grupo abeliano resultante.

Teorema 20. (Eckmann-Hilton) Sean $(X, \cdot)$, $(X, *)$ dos operaciones binarias definidas sobre un conjunto X , con elementos neutros biláteros e, e_* . Si se cumple la ley de intercambio

$$(f_1 \cdot f_2) * (g_1 \cdot g_2) = (f_1 * g_1) \cdot (f_2 * g_2)$$

para cualesquiera f_1, f_2, g_1, g_2 en X , entonces $(X, \cdot)$ y $(X, *)$ coinciden, y resultan una operación asociativa y conmutativa.

Demostración. De la ley de intercambio se puede deducir que los elementos neutros coinciden:

$$e. = e. \cdot e. = (e. * e_*) \cdot (e_* * e.) = (e. \cdot e_*) * (e_* \cdot e.) = e_* * e_* = e_*.$$

En adelante, e denotará el elemento neutro común de $(X, \cdot)$ y $(X, *)$. A partir de esta igualdad y la condición de intercambio, se tiene que

$$f \cdot g = (f * e) \cdot (e * g) = (f \cdot e) * (e \cdot g) = f * g$$

de modo que las operaciones coinciden. Esto, junto una vez más con la condición de intercambio, permite deducir conmutatividad y asociatividad:

$$f \cdot g = (e * f) \cdot (g * e) = (e \cdot g) * (f \cdot e) = g * f = g \cdot f$$

$$f \cdot (g \cdot h) = (f * e) \cdot (g * h) = (f \cdot g) * (e \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$$

□

El objetivo en adelante para esta sección será proponer una versión alternativa del argumento de Eckmann-Hilton que usaremos a lo largo del trabajo. La misma exhibe una ley de intercambio que garantiza, dada cierta estructura *sustractiva* sobre un conjunto X , una estructura de grupo abeliano para X .

Definición 21. Un magma⁴ $(X, -)$ se dice **sustractivo** si para cualesquiera f, g en X :

$$g - (g - f) = f.$$

Definición 22. Un **elemento neutro bilátero** para un magma sustractivo $(X, -)$ es un elemento 0 de X tal que para todo f en X :

$$f - f = 0.$$

Observación 23. Sea $(X, -)$ un magma sustractivo con elemento neutro bilátero 0 . Entonces, para toda f en X , tomando $g = f$ en la Definición 21, se verifica que:

$$f - 0 = f.$$

La siguiente observación juega un rol crucial en comprender por qué resulta equivalente trabajar con operaciones sustractivas con respecto a inversibles:

Observación 24. Definiendo $f + g := f - (0 - g)$ y $f - g := f + (-g)$, tenemos una correspondencia entre magmas sustractivos con neutro bilátero y magmas con neutro bilátero e inversas biláteras para todos sus elementos, que hace coincidir los elementos neutros.

De esta forma, se tiene la siguiente versión sustractiva para el argumento de Eckmann-Hilton:

Teorema 25. (Eckmann-Hilton sustractivo) Si $(X, -)$ y $(X, |)$ son magmas sustractivos con elementos neutros biláteros respectivos 0_1 y 0_2 que cumplen la condición de intercambio

$$(f_1 - f_2) | (g_1 - g_2) = (f_1 | g_1) - (f_2 | g_2)$$

sus magmas inversibles inducidos, $(X, +)$ y $(X, \#)$ respectivamente, coinciden, y dotan a X de estructura de grupo abeliano.

⁴En este trabajo, nos referimos con *magma* a un conjunto provisto de una operación binaria.

Demostración. Por la Observación 24, $(X, +)$ y $(X, \#)$ tienen a 0_1 y 0_2 como neutros respectivos. Veamos cómo la ley de intercambio sustractiva recupera la ley de intercambio del Teorema 20 para estos magmas inducidos:

$$\begin{aligned}
(f_1 + f_2) \# (g_1 + g_2) &= [f_1 - (0_1 - f_2)] \mid [0_2 \mid (g_1 - (0_1 - g_2))] \\
&= [f_1 - (0_1 - f_2)] \mid [(0_2 - 0_1) \mid (g_1 - (0_1 - g_2))] \\
&= [f_1 - (0_1 - f_2)] \mid [(0_2 \mid g_1) - (0_1 \mid (0_1 - g_2))] \\
&= [f_1 \mid (0_2 \mid g_1)] - [(0_1 - f_2) \mid (0_1 \mid (0_1 - g_2))] \\
&= (f_1 \# g_1) - [(0_1 - f_2) \mid ((0_2 - 0_2) \mid (0_1 - g_2))] \\
&= (f_1 \# g_1) - [(0_1 - f_2) \mid ((0_2 \mid 0_1) - (0_2 \mid g_2))] \\
&= (f_1 \# g_1) - [(0_1 \mid (0_2 \mid 0_1)) - (f_2 \mid (0_2 \mid g_2))] \\
&= (f_1 \# g_1) - [(0_1 \mid (0_2 \mid 0_1)) - (f_2 \# g_2)]
\end{aligned}$$

Por otra parte, notemos que:

$$0_2 \mid 0_1 = (0_2 - 0_1) \mid (0_2 - 0_2) = (0_2 \mid 0_2) - (0_1 \mid 0_2) = 0_2 - 0_1 = 0_2.$$

De esta forma, y por la expresión anterior, vale que:

$$\begin{aligned}
(f_1 + f_2) \# (g_1 + g_2) &= (f_1 \# g_1) - [(0_1 \mid (0_2 \mid 0_1)) - (f_2 \# g_2)] \\
&= (f_1 \# g_1) - [(0_1 \mid 0_2) - (f_2 \# g_2)] \\
&= (f_1 \# g_1) - [0_1 - (f_2 \# g_2)] = (f_1 \# g_1) + (f_2 \# g_2).
\end{aligned}$$

Luego, estamos en condiciones de aplicar el argumento de Eckmann-Hilton del Teorema 20 para concluir que $(X, +)$ y $(X, \#)$ coinciden, y dan lugar a una estructura de monoide conmutativo. Más aún, por la Observación 24, este monoide conmutativo es inversible y por ende un grupo abeliano. $\square$

3. CONSTRUCCIÓN DE LA RESTA DE MORFISMOS

Con el fin de dotar a una categoría abeliana arbitraria con estructura aditiva, tomaremos el camino de definir una estructura de magma sustractivo en los Hom-Sets, y verificar las hipótesis del Teorema 25. Para motivar la existencia de una operación sustractiva, comenzaremos con la construcción de la resta para una categoría abeliana concreta: ${}_A\text{Mod}$, la categoría de A -módulos, con A un anillo arbitrario.

Observación 26. *Dados $\alpha, \beta : M \rightarrow N$ morfismos de A -módulos; la resta $(\alpha - \beta) : M \rightarrow N$, viene dada por $(\alpha - \beta)(x) := \alpha(x) - \beta(x)$, para todo x en M . Equivalentemente, resulta que:*

$$(\alpha - \beta) = \sigma_N \circ (\alpha, \beta),$$

donde $\sigma_N : N \times N \rightarrow N$ es el morfismo de A -módulos que viene dado, para cada (x, y) en $N \times N$, por:

$$\sigma_N(x, y) = x - y.$$

Proposición 27. Para cada A -módulo M , $\sigma_M : M \times M \rightarrow M$, definido según la observación 26, es un cokernel de $\Delta_M : M \rightarrow M \times M$, el morfismo diagonal dado por $\Delta_M(x) = (x, x)$, para todo x en M .

Demostración. Es claro que $\sigma_M \circ \Delta_M = 0_{MM}$. Más aún, sea $f : M \times M \rightarrow N$ un morfismo de A -módulos tal que $f \circ \Delta_M = 0_{MN}$. Por la propiedad universal del coproducto en ${}_A\text{Mod}$, i.e. de la suma directa, debe ser que f es de la forma $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ para todo (x, y) en $M \times M$; con $f_1, f_2 : M \rightarrow N$, morfismos de A -módulos. En particular, f debe satisfacer que para cada x en M :

$$0 = f \circ \Delta_M(x) = f(x, x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Luego, resulta que $f_1 = -f_2$. Esto equivale a que f se descomponga a través de σ_M según el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\Delta_M} & M \times M & \xrightarrow{\sigma_M} & M \\ & & \searrow f & & \downarrow f_1 \\ & & & & N \end{array}$$

0_{MN}

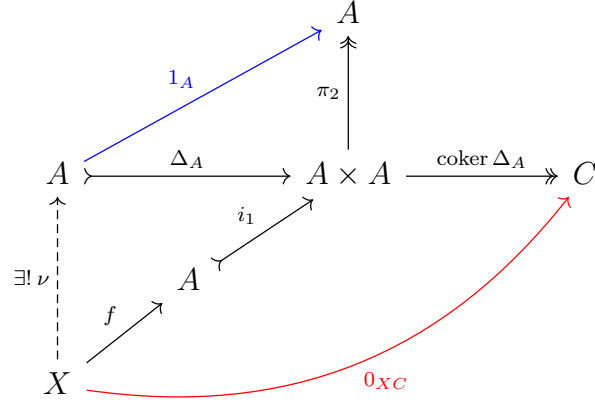
La unicidad de la descomposición se sigue evaluando en el elemento $(x, 0)$ de $M \times M$ y usando la conmutatividad del triángulo. Luego, verificamos la propiedad universal del cokernel, por lo que $\text{coker } \Delta_M = \sigma_M$. $\square$

La Proposición 27 describe el morfismo resta en ${}_A\text{Mod}$ a partir de la diagonal y un cokernel de codominio específico. Para generalizar esta definición a una categoría abeliana genérica, nos basta con definir la diagonal de un objeto A , y demostrar que tiene un cokernel que cae en A que, además, cumple ciertas propiedades deseables. Este cokernel inducirá la resta en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, A)$ de la misma forma que el morfismo de la resta en A -módulos, por poscomposición.

Definición 28. Dado A un objeto de una categoría con productos, definimos el morfismo diagonal, y lo notamos $\Delta_A : A \rightarrow A \times A$, al inducido por la propiedad universal del producto según $\Delta_A := (1_A, 1_A)$. Dualmente, para una categoría con coproductos, definimos el morfismo codiagonal, y lo notamos $\nabla_A : A \amalg A \rightarrow A$ al inducido por la propiedad universal del coproducto según $\nabla_A := \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix}$.

Lema 29. Sean A un objeto en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, y $\text{coker } \Delta_A : A \times A \rightarrow C$ un cokernel del morfismo diagonal. Luego, vale que $\text{coker } \Delta_A \circ i_1 : A \rightarrow C$ es un isomorfismo; donde $i_1 : A \rightarrow A \times A$ es el morfismo definido según la Observación 15.

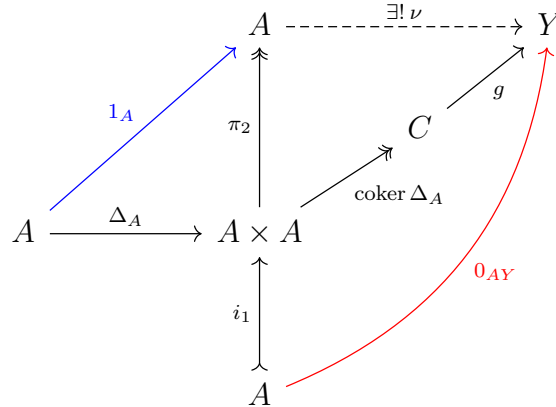
Demostración. Por el Teorema 13, basta probar que $\text{coker } \Delta_A \circ i_1$ es un monomorfismo y un epimorfismo. Para ver que es un monomorfismo, por el Teorema 19 basta ver que si existe $f : X \rightarrow A$ tal que $(\text{coker } \Delta_A \circ i_1) \circ f = 0_{XC}$, entonces $f = 0_{XA}$. Por la Proposición 11, y como Δ_A es un monomorfismo, el morfismo diagonal es el kernel de su cokernel y por ende existe una única factorización a través del mismo tal que el siguiente diagrama conmuta:



Luego, se verifica que:

$$\nu = \pi_2 \circ \Delta_A \circ \nu = \pi_2 \circ i_1 \circ f = 0_{XA}.$$

De esta forma, $i_1 \circ f$ es el morfismo nulo y como i_1 es un monomorfismo, $f = 0_{XA}$. Esto concluye que $\text{coker } \Delta_A \circ i_1$ es un monomorfismo. Para probar que es, además, un epimorfismo, usemos la versión dual del Teorema 19. Consideremos $g : C \rightarrow Y$ tal que $g \circ \text{coker } \Delta_A \circ i_1 = 0_{AY}$. Luego, en particular debe existir una factorización única a través de π_2 , por ser el mismo el cokernel de i_1 , tal que el siguiente diagrama conmuta:



Luego, se verifica que:

$$\nu = \nu \circ \pi_2 \circ \Delta_A = g \circ \text{coker } \Delta_A \circ \Delta_A = 0_{AY}.$$

De esta forma, $g \circ \text{coker } \Delta_A$ es el morfismo nulo y como $\text{coker } \Delta_A$ es un epimorfismo, g es el morfismo nulo. Esto concluye que $\text{coker } \Delta \circ i_1$ es un epimorfismo y por ende, junto al hecho de que también es un monomorfismo, un isomorfismo. $\square$

Corolario 30. Dado A un objeto de una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y dado un cokernel del morfismo diagonal, entonces $\sigma_A : A \times A \rightarrow A$ dado por:

$$\sigma_A := (\text{coker } \Delta_A \circ i_1)^{-1} \circ \text{coker } \Delta_A$$

es también un cokernel del morfismo diagonal.

Observación 31. La definición de σ_A del Corolario 30 garantiza que:

$$\sigma_A \circ i_1 = 1_A.$$

El siguiente lema muestra la naturalidad del cokernel elegido:

Lema 32. Sean A, B objetos de una categoría abeliana $\mathcal{C}$, y sea $\alpha : A \rightarrow B$ un morfismo. Entonces, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \xrightarrow{\alpha \times \alpha} & B \times B \\ \sigma_A \downarrow & & \downarrow \sigma_B \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

Donde $\alpha \times \alpha := (\alpha \circ \pi_1, \alpha \circ \pi_2)$ es la inducida por la propiedad universal del producto y σ_A es la definida en el Corolario 30.

Demostración. Es directo verificar, componiendo con las proyecciones canónicas y usando la propiedad universal del producto, la conmutatividad de los siguientes diagramas:

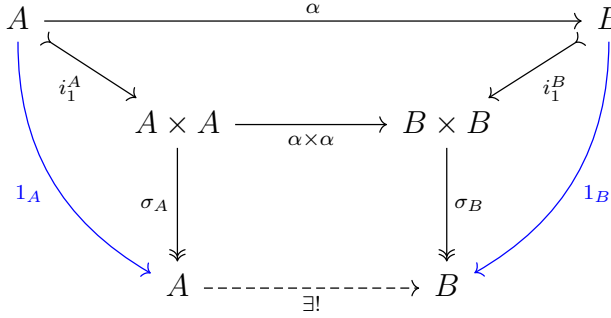
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \Delta_A \downarrow & & \downarrow \Delta_B \\ A \times A & \xrightarrow{\alpha \times \alpha} & B \times B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ i_1^A \downarrow & & \downarrow i_1^B \\ A \times A & \xrightarrow{\alpha \times \alpha} & B \times B \end{array}$$

La conmutatividad del primero garantiza que:

$$\sigma_B \circ \alpha \times \alpha \circ \Delta_A = \sigma_B \circ \Delta_B \circ \alpha = 0_{AB}.$$

En particular, existe una única factorización a través de σ_A , el cokernel de Δ_A , que hace conmutar al cuadrado del lema. Basta verificar que esa factorización coincide

con α . Para eso, recurrimos al siguiente diagrama conmutativo:



De lo cual se ve claramente que la flecha punteada debe ser α . $\square$

Definición 33. (*Resta de morfismos*) Dados $\alpha, \beta : A \rightarrow B$ morfismos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, definimos su **resta** $(\alpha - \beta) : A \rightarrow B$ como el morfismo dado por:

$$(\alpha - \beta) = \sigma_B \circ (\alpha, \beta)$$

donde σ_B es el definido por el Corolario 30 y (α, β) es la inducida por la propiedad universal del producto.

Verifiquemos que esta resta definida verifica una propiedad fundamental a la hora de definir la estructura aditiva:

Proposición 34. (*Asociatividad de la resta*). Dadas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 : A \rightarrow B$ morfismos de una categoría abeliana $\mathcal{C}$, vale la siguiente propiedad asociativa para la resta introducida en la Definición 33:

$$(\alpha_1 - \alpha_2) - (\alpha_3 - \alpha_4) = (\alpha_1 - \alpha_3) - (\alpha_2 - \alpha_4).$$

Demostración. Por la naturalidad obtenida en el Lema 32, se tienen los siguientes cuadrados conmutativos para $i = 1, 2$:

$$\begin{array}{ccc} (B \times B) \times (B \times B) & \xrightarrow{\pi_i \times \pi_i} & B \times B \\ \sigma_{B \times B} \downarrow & & \downarrow \sigma_B \\ B \times B & \xrightarrow{\pi_i} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (B \times B) \times (B \times B) & \xrightarrow{\sigma_B \times \sigma_B} & B \times B \\ \sigma_{B \times B} \downarrow & & \downarrow \sigma_B \\ B \times B & \xrightarrow{\sigma_B} & B \end{array}$$

En particular, por el diagrama de la izquierda se sigue de la propiedad universal del producto que vale la siguiente identidad:

$$\sigma_{B \times B} \circ ((\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_3, \alpha_4)) = (\sigma_B \circ (\alpha_1, \alpha_3), \sigma_B \circ (\alpha_2, \alpha_4)).$$

De esta forma, la igualdad puede reescribirse en términos de la resta como:

$$(\alpha_1, \alpha_2) - (\alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_4).$$

Más aún, por la identidad anterior se tiene que:

$$\sigma_B \circ (\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_4) = \sigma_B \circ \sigma_{B \times B} \circ ((\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_3, \alpha_4)),$$

y por la conmutatividad del cuadrado de la derecha obtenemos:

$$\sigma_B \circ \sigma_{B \times B} \circ ((\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_3, \alpha_4)) = \sigma_B \circ (\sigma_B \times \sigma_B) \circ ((\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_3, \alpha_4)).$$

Recurriendo a ambos resultados, y junto al hecho de que:

$$\sigma_B \circ (\sigma_B \times \sigma_B) \circ ((\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_3, \alpha_4)) = \sigma_B \circ (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_3 - \alpha_4),$$

concluimos que:

$$\sigma_B \circ (\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_4) = \sigma_B \circ (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_3 - \alpha_4).$$

Reemplazando en la definición de la suma, se desprende la asociatividad buscada:

$$(\alpha_1 - \alpha_2) - (\alpha_3 - \alpha_4) = (\alpha_1 - \alpha_3) - (\alpha_2 - \alpha_4).$$

□

Proposición 35. Sea $\alpha : A \rightarrow B$ un morfismo en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Entonces, para la resta introducida en la Definición 33, valen las siguientes identidades:

- $\alpha - \alpha = 0_{AB}$,
- $\alpha - 0_{AB} = \alpha$,
- $0_{AB} - (0_{AB} - \alpha) = \alpha$.

Demostración. En primer lugar, como σ_B es cokernel de la diagonal, vale que:

$$\alpha - \alpha = \sigma_B \circ (\alpha, \alpha) = \sigma_B \circ \Delta_B \circ \alpha = 0_{AB}.$$

La segunda identidad se deduce del hecho de que:

$$\alpha - 0_{AB} = \sigma_B \circ (\alpha, 0_{AB}) = \sigma_B \circ i_1 \circ \alpha = \alpha.$$

Por último, por la propiedad asociativa de la Proposición 34, se tiene que:

$$0_{AB} - (0_{AB} - \alpha) = (\alpha - \alpha) - (0_{AB} - \alpha) = (\alpha - 0_{AB}) - (\alpha - \alpha) = \alpha - 0_{AB} = \alpha.$$

□

Teorema 36. Para cada par de objetos A, B de una categoría abeliana $\mathcal{C}$, la resta de la Definición 33 induce una estructura de magma sustractivo con 0_{AB} como elemento neutro bilátero en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Demostración. En primer lugar, usando la Proposición 34 y la Proposición 35, se deduce que para cualesquiera $\alpha, \beta : A \rightarrow B$:

$$\beta - (\beta - \alpha) = (\beta - 0_{AB}) - (\beta - \alpha) = (\beta - \beta) - (0_{AB} - \alpha) = 0_{AB} - (0_{AB} - \alpha) = \alpha.$$

Y, nuevamente recurriendo a la Proposición 35,

$$\alpha - \alpha = 0_{AB}.$$

Acorde a las Definiciones 21 y 22, la resta hace de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ un magma sustractivo con neutro bilátero 0_{AB} .

□

Definición 37. (*Suma de morfismos*) Dados $\alpha, \beta : A \rightarrow B$ morfismos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, definimos la **suma** $(\alpha + \beta) : A \rightarrow B$ dada por:

$$(\alpha + \beta) := \alpha - (0_{AB} - \beta)$$

con la resta dada en la Definición 33.

Observación 38. Para cada A, B objetos de una categoría abeliana $\mathcal{C}$, la Observación 24 garantiza que la suma dada por la Definición 37 induce una estructura de magma con neutro bilátero e inversa bilátera para todos sus elementos en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Con el objetivo de aplicar el argumento de Eckmann-Hilton presentado anteriormente, introduciremos la operación dual a la resta. Veremos que ambas operaciones son compatibles en el sentido del Teorema 25 (Eckmann-Hilton sustractivo). Esto demostrará que las sumas inducidas son la misma, adicionalmente garantizando completa estructura de grupo abeliano sobre $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Las demostraciones de los siguientes enunciados se siguen del Principio de Dualidad, y prescindimos de escribirlas:

Lema 39. (*Dual del Lema 29*) Sean A un objeto en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y $\ker \nabla_A : K \rightarrow A \amalg A$ un kernel del morfismo codiagonal. Luego, vale que $\pi_1 \circ \ker \nabla_A : K \rightarrow A$ es un isomorfismo; donde $\pi_1 : A \amalg A \rightarrow A$ es el inducido por la propiedad universal del coproducto por $\pi_1 := \begin{pmatrix} 1_A \\ 0_{AA} \end{pmatrix}$.

Corolario 40. (*Dual del Corolario 30*) Dado A un objeto de una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y dado un kernel del morfismo del codiagonal, entonces $\gamma_A : A \rightarrow A \amalg A$ dado por:

$$\gamma_A := \ker \nabla_A \circ (\pi_1 \circ \ker \nabla_A)^{-1}$$

es también un kernel del morfismo codiagonal.

Observación 41. (*Dual de la Observación 31*) La definición de γ_A del Corolario 40 garantiza que:

$$\pi_1 \circ \gamma_A = 1_A.$$

El siguiente lema muestra la naturalidad en su versión dual:

Lema 42. (*Dual del Lema 32*) Sean A, B objetos de una categoría abeliana $\mathcal{C}$, y sea $\alpha : A \rightarrow B$ un morfismo. Entonces, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \gamma_A \downarrow & & \downarrow \gamma_B \\ A \amalg A & \xrightarrow{\alpha \amalg \alpha} & B \amalg B \end{array}$$

Donde $\alpha \amalg \alpha := \begin{pmatrix} i_1 \circ \alpha \\ i_2 \circ \alpha \end{pmatrix}$ es la inducida por la propiedad universal del coproducto y γ_A es la definida en el Corolario 40.

Definición 43. (Co-resta de morfismos) Dados $\alpha, \beta : A \rightarrow B$ morfismos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, definimos su **co-resta** $(\alpha \mid \beta) : A \rightarrow B$ como el morfismo dado por:

$$(\alpha \mid \beta) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \circ \gamma_A.$$

donde γ_A es el definido por el Corolario 40 y $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \circ \gamma_A$ es la inducida por la propiedad universal del coproducto.

Proposición 44. (Dual de la Proposición 34) Dadas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 : A \rightarrow B$ morfismos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, vale la siguiente propiedad asociativa para la co-resta introducida en la definición 43:

$$(\alpha_1 \mid \alpha_2) \mid (\alpha_3 \mid \alpha_4) = (\alpha_1 \mid \alpha_3) \mid (\alpha_2 \mid \alpha_4)$$

.

Proposición 45. (Dual de la Proposición 35) Sea $\alpha : A \rightarrow B$ un morfismo en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Entonces, para la co-resta introducida en la Definición 43, valen las siguientes identidades:

- $\alpha \mid \alpha = 0_{AB}$,
- $\alpha \mid 0_{AB} = \alpha$,
- $0_{AB} \mid (0_{AB} \mid \alpha) = \alpha$.

Teorema 46. (Dual del Teorema 36) Para cada par de objetos A, B de una categoría abeliana $\mathcal{C}$, la co-resta de la Definición 43 induce una estructura de magma sustractivo con 0_{AB} como elemento neutro bilátero en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Definición 47. (Co-suma de morfismos) Dados $\alpha, \beta : A \rightarrow B$ morfismos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, definimos la **co-suma** $(\alpha \# \beta) : A \rightarrow B$ dada por:

$$(\alpha \# \beta) := \alpha \mid (0_{AB} \mid \beta)$$

con la co-resta dada en la Definición 43.

Observación 48. Para cada A, B objetos de una categoría abeliana $\mathcal{C}$, la Observación 24 garantiza que la co-suma dada por la Definición 47 induce una estructura de magma con neutro bilátero e inversa bilátera para todos sus elementos en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

4. ESTRUCTURA ADITIVA PARA UNA CATEGORÍA ABELIANA

Para concluir que la suma y co-suma coinciden para dar una estructura de grupo abeliano, verifiquemos que la resta y co-resta que las inducen satisfacen la ley de intercambio del Teorema 25. Primero probaremos una serie de lemas que describen cómo se relacionan las dos operaciones sustractivas:

Lema 49. Sean $\alpha, \beta : A \rightarrow B$ y $f : X \rightarrow A, g : B \rightarrow Y$ morfismos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Entonces, se verifica la siguiente identidad distributiva para la resta de la Definición 33:

$$(\alpha - \beta) \circ f = \alpha \circ f - \beta \circ f.$$

Dualmente, para la co-resta de la Definición 43 se tiene que:

$$g \circ (\alpha \mid \beta) = (g \circ \alpha) \mid (g \circ \beta).$$

Demostración. De la definición de la resta se desprende que:

$$(\alpha - \beta) \circ f = \sigma_B \circ (\alpha, \beta) \circ f = \sigma_B \circ (\alpha \circ f, \beta \circ f) = \alpha \circ f - \beta \circ f.$$

Análogamente, de la definición de co-resta se desprende que:

$$g \circ (\alpha \mid \beta) = g \circ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \circ \gamma_A = \begin{pmatrix} g \circ \alpha \\ g \circ \beta \end{pmatrix} \circ \gamma_A = (g \circ \alpha) \mid (g \circ \beta).$$

□

Observación 50. Dados $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 : A \rightarrow B$ en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, se verifica componiendo por las proyecciones e inclusiones correspondientes que:

$$\begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_2) \\ (\alpha_3, \alpha_4) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \right) : A \amalg A \rightarrow B \times B.$$

Teorema 51. (Ley de intercambio de la resta y co-resta) Dados $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 : A \rightarrow B$ morfismos de una categoría abeliana $\mathcal{C}$, se verifica la ley de intercambio del Teorema 25 para la resta de la Definición 33 y la co-resta de la Definición 43:

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \mid (\alpha_3 - \alpha_4) = (\alpha_1 \mid \alpha_3) - (\alpha_2 \mid \alpha_4).$$

Demostración. Verifiquemos primero que:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_3 - \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Por la Observación 50 resulta que:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_3 - \alpha_4 \end{pmatrix} = \sigma_B \circ \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_2) \\ (\alpha_3, \alpha_4) \end{pmatrix} = \sigma_B \circ \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, usando el Lema 49, deducimos que:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_3 - \alpha_4 \end{pmatrix} \circ \gamma_A = \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \right) \circ \gamma_A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \circ \gamma_A - \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \circ \gamma_A.$$

Luego, reemplazando con la definición de co-resta obtenemos:

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \mid (\alpha_3 - \alpha_4) = (\alpha_1 \mid \alpha_3) - (\alpha_2 \mid \alpha_4).$$

□

Corolario 52. Las operaciones suma y co-suma inducidas por la resta y co-resta coinciden y resultan dar una estructura de grupo abeliano en cada HomSet .

Demostración. Por el Teorema 51, la resta y co-resta verifican la ley de intercambio del Teorema 25 y por ende, por el argumento de Eckmann-Hilton sustractivo, resulta que la suma y co-suma coinciden e inducen una estructura de grupo abeliano para cada HomSet . □

Definición 53. Una estructura **preaditiva** para una categoría $\mathcal{C}$ localmente pequeña es, para todo par de objetos X, Y , una estructura de grupo abeliano $(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), +)$ sobre sus HomSets, de modo que las composiciones y precomposiciones sean morfismos de grupos. Es decir, que para todas $g : X \rightarrow A$, $\alpha, \beta : A \rightarrow B$ y $f : B \rightarrow Y$:

$$f \circ (\alpha + \beta) = (f \circ \alpha) + (f \circ \beta) \quad \text{y} \quad (\alpha + \beta) \circ g = (\alpha \circ g) + (\beta \circ g).$$

Adicionalmente, una categoría con estructura preaditiva se dice **aditiva** si admite productos y coproductos finitos.

Teorema 54. (Existencia y unicidad de la estructura aditiva) Toda categoría abeliana $\mathcal{C}$ admite una única estructura de categoría aditiva con la suma dada por la Definición 37.

Demostración. Consideremos A y B dos objetos de una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y verifiquemos que $(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), +)$ es un grupo abeliano, donde las composiciones y precomposiciones son morfismos de grupos. La estructura de grupo abeliano se deduce directamente del Corolario 52.

Por otra parte, por la propiedad distributiva del Lema 49, vale que si $\alpha, \beta : A \rightarrow B$ y $g : X \rightarrow A$ son morfismos de $\mathcal{C}$, entonces:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \circ g &= (\alpha - (0_{AB} - \beta)) \circ g \\ &= (\alpha \circ g) - ((0_{AB} - \beta) \circ g) \\ &= (\alpha \circ g) - (0_{XB} - (\beta \circ g)) \\ &= (\alpha \circ g) + (\beta \circ g) \end{aligned}$$

Además, si $f : B \rightarrow Y$ es un morfismo de $\mathcal{C}$, utilizando la co-suma (que por el Corolario 52 coincide con la suma) se verifica que:

$$\begin{aligned} f \circ (\alpha \# \beta) &= f \circ (\alpha \mid (0_{AB} \mid \beta)) \\ &= (f \circ \alpha) \mid (f \circ (0_{AB} \mid \beta)) \\ &= (f \circ \alpha) \mid (0_{AY} \mid f \circ \beta) \\ &= (f \circ \alpha) \# (f \circ \beta). \end{aligned}$$

Lo cual concluye que las composiciones y precomposiciones son morfismos de grupos abelianos; dotando a $\mathcal{C}$ de una estructura de categoría preaditiva. Más aún, como $\mathcal{C}$ es abeliana tiene productos y coproductos finitos y por ende resulta aditiva.

Para la unicidad, consideremos una estructura aditiva donde $(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), @)$ sea la estructura de grupo abeliano para A y B genéricos sobre su HomSet. Veamos que esta estructura coincide con la antes exhibida. Puntualmente, veamos que la resta dada por, para cada $\alpha, \beta : A \rightarrow B$,

$$\alpha \parallel \beta := \alpha @ (\parallel \beta),$$

donde $(\parallel \beta)$ es el inverso aditivo de β , satisface la ley de intercambio sustractiva del Teorema 25 con la resta de la Definición 33. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 : A \rightarrow B$ morfismos de la categoría $\mathcal{C}$. Componiendo con las proyecciones y usando que la

composición es morfismo de grupos, se verifica que:

$$(\alpha_1, \alpha_2) \parallel (\alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1 \parallel \alpha_3, \alpha_2 \parallel \alpha_4).$$

De esta forma, vale que:

$$(\sigma_B \circ (\alpha_1, \alpha_2)) \parallel (\sigma_B \circ (\alpha_3, \alpha_4)) = \sigma_B \circ ((\alpha_1, \alpha_2) \parallel (\alpha_3, \alpha_4)) = \sigma_B \circ (\alpha_1 \parallel \alpha_3, \alpha_2 \parallel \alpha_4).$$

De lo cual, reemplazando en la resta de la Definición 33, se sigue la ley de intercambio sustractiva:

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \parallel (\alpha_3 - \alpha_4) = (\alpha_1 \parallel \alpha_3) - (\alpha_2 \parallel \alpha_4).$$

Por el Teorema 25, se deduce que las operaciones de suma coinciden y, por consiguiente, también lo hacen las estructuras aditivas. $\square$

5. CONSECUENCIAS DE LA ESTRUCTURA ADITIVA

En la categoría ${}_A\text{Mod}$ los productos y coproductos finitos coinciden, y conforman la llamada suma directa. En esta sección, veremos cómo esa construcción es un caso particular de la existencia de un objeto más general: el biproducto.

Definición 55. *Dados A, B objetos de una categoría preaditiva $\mathcal{C}$, se dice que $A \oplus B$ es un **biproducto** si satisface que existen $\pi_1 : A \oplus B \rightarrow A$ y $\pi_2 : A \oplus B \rightarrow B$ junto con $i_1 : A \rightarrow A \oplus B$ e $i_2 : B \rightarrow A \oplus B$ que verifiquen las siguientes igualdades:*

- $\pi_1 \circ i_1 = 1_A$.
- $\pi_2 \circ i_2 = 1_B$.
- $i_1 \circ \pi_1 + i_2 \circ \pi_2 = 1_{A \oplus B}$.

Observación 56. *La tercera condición de la definición de biproducto garantiza que las composiciones cruzadas se anulan:*

- $\pi_1 \circ i_2 = \pi_1 \circ 1_{A \oplus B} \circ i_2 = \pi_1 \circ i_2 + \pi_1 \circ i_2$. Luego $\pi_1 \circ i_2 = 0$,
- $\pi_2 \circ i_1 = \pi_2 \circ 1_{A \oplus B} \circ i_1 = \pi_2 \circ i_1 + \pi_2 \circ i_1$. Luego $\pi_2 \circ i_1 = 0$,

donde 0 denota a los elementos neutros de los grupos abelianos $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.

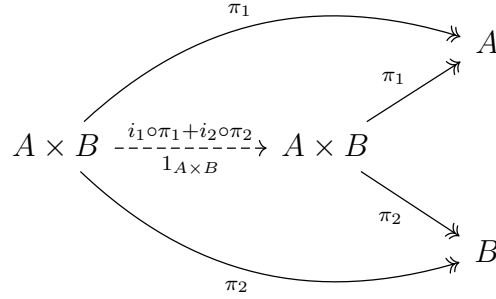
Teorema 57. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva. Son equivalentes:*

- (1) $\mathcal{C}$ es aditiva. Es decir, admite productos y coproductos finitos.
- (2) $\mathcal{C}$ admite biproductos.

Más aún, si este es caso, dados dos objetos A, B en $\mathcal{C}$, su biproducto satiface la propiedad universal del producto y del coproducto de A y B .

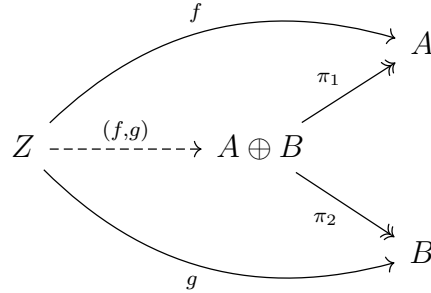
Demostración. Veamos cada una de las implicaciones:

- (1) $\Rightarrow$ (2): Probemos que el producto binario $A \times B$ es un biproducto. Llamamos $i_1 : A \rightarrow A \times B$ e $i_2 : B \rightarrow A \times B$ a los morfismos inducidos por propiedad universal según $i_1 = (1_A, 0)$ y $i_2 = (0, 1_B)$, donde 0 denota al elemento neutro del grupo abeliano $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ respectivamente. Es claro que i_1 e i_2 satisfacen las dos primeras condiciones de la definición de biproducto. Además, por propiedad univesal del producto, existe un único morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta:



Luego, de la unicidad se sigue que $i_1 \circ \pi_1 + i_2 \circ \pi_2 = 1_{A \times B}$. Por dualidad, se sigue que el coproducto también satisface la condición de biproducto.

- (2) $\Rightarrow$ (1): Probemos la existencia de productos y por dualidad se deduce la existencia de coproductos finitos. Más aún, veamos que, dados dos objetos A, B , su producto binario existe y la proposición se sigue inductivamente. Proponemos como producto binario el biproducto $A \oplus B$. Dadas $f : Z \rightarrow A$ y $g : Z \rightarrow B$, defino $(f, g) = i_1 \circ f + i_2 \circ g$ para verificar la parte de existencia en la propiedad universal del producto. Es claro, por la condición de biproducto, que el siguiente diagrama conmuta:



Para ver la unicidad, simplemente notar que cualquier morfismo $\varphi : Z \rightarrow A \oplus B$ que haga conmutar el diagrama anterior verifica que:

$$\varphi = 1_{A \oplus B} \circ \varphi = (i_1 \circ \pi_1 + i_2 \circ \pi_2) \circ \varphi = i_1 \circ f + i_2 \circ g.$$

□

Corolario 58. *En las condiciones del Teorema 57, los productos y coproductos binarios son biproductos. En particular, los productos y coproductos binarios son isomorfos. Inductivamente, los productos y coproductos finitos son isomorfos.*

Antes de finalizar el trabajo con la equivalencia entre las distintas axiomatizaciones de categorías abelianas, nos permitiremos una última observación sobre la relación entre la estructura preaditiva de una categoría aditiva punteada⁵ y sus biproductos. Como hemos demostrado en el Teorema 57, en una categoría aditiva el biproducto entre dos objetos resulta de vincular al producto y el coproducto de

⁵Esta hipótesis la requeriremos para poder recuperar unívocamente al elemento neutro.

una manera intrínsecamente dependiente de la suma de morfismos. Del Teorema 61 deduciremos cierta reciprocidad: la estructura preaditiva de una categoría aditiva punteada se recupera a través de los biproductos.

En primer lugar, observemos que el elemento neutro de una categoría preaditiva punteada es independiente de su estructura preaditiva:

Lema 59. *Dada $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva punteada, vale que para todo par de objetos A, B el elemento neutro de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ coincide con 0_{AB} .*

Demostración. Notar que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, 0)$ es un singleton y por ende el cero de la estructura preaditiva coincide con 0_{A0} . Además, se tiene que la siguiente aplicación es un morfismo de grupos:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, 0) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \\ \alpha &\mapsto 0_{0B} \circ \alpha. \end{aligned}$$

De esta manera, necesariamente la imagen del elemento neutro del singleton es el elemento neutro de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Es decir, $0_{0B} \circ 0_{A0} = 0_{AB}$ es el elemento neutro de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. $\square$

Observación 60. *Sean $f, g : A \rightarrow B$ morfismos en una categoría aditiva $\mathcal{C}$ punteada. Entonces, la propiedad universal del producto y del coproducto sobre los biproductos $A \oplus A$ y $B \oplus B$, que las verifican por el Corolario 58, inducen un único morfismo $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} : A \oplus A \rightarrow B \oplus B$ de manera tal que:*

- $\pi_1 \circ \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \circ i_1 = f,$
- $\pi_1 \circ \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \circ i_2 = 0_{AB},$
- $\pi_2 \circ \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \circ i_1 = 0_{AB},$
- $\pi_2 \circ \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \circ i_2 = g.$

Teorema 61. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva punteada. Luego, para todo par de morfismos $f, g : A \rightarrow B$ necesariamente debe ser que:*

$$f + g = \nabla_B \circ \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \circ \Delta_A.$$

Demostración. Primero verifiquemos que, cualquiera sea la estructura aditiva y para cualquier objeto A debe ser que $\pi_1 + \pi_2 = \nabla_A$ y $i_1 + i_2 = \Delta_A$; con π_1, π_2 las proyecciones canónicas y i_1, i_2 las inclusiones canónicas al biproducto $A \oplus A$ que por el Corolario 58 satisface las propiedades universales del producto y coproducto. En particular, como la composición y precomposición es un morfismo de grupos abelianos y por el Lema 59 debe ser que:

- $\pi_1 \circ (i_1 + i_2) = 1_A + 0_{AA} = 1_A.$

- $\pi_2 \circ (i_1 + i_2) = 0_{AA} + 1_A = 1_A.$

Y además que:

- $(\pi_1 + \pi_2) \circ i_1 = 1_A + 0_{AA} = 1_A.$
- $(\pi_1 + \pi_2) \circ i_2 = 0_{AA} + 1_A = 1_A.$

Luego, por la unicidad de la propiedad universal del producto y coproducto, respectivamente, verificamos lo deseado. De esta forma, dadas $f, g : A \rightarrow B$ arbitrarias, vale que:

$$\nabla_B \circ \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \circ \Delta_A = (\pi_1 + \pi_2) \circ \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \circ (i_1 + i_2)$$

Notar, además, que por la Observación 60, por la bilinealidad de la composición y por el Lema 59 vale que:

$$\nabla_B \circ \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \circ \Delta_A = f + 0_{AB} + 0_{AB} + g = f + g.$$

Lo cual concluye que la suma ya existente sobre los HomSets en $\mathcal{C}$ debe coincidir con la aquí definida. $\square$

El Teorema 61, en particular, permite describir de manera más conveniente la suma para una categoría abeliana:

Corolario 62. *En una categoría abeliana $\mathcal{C}$, la operación suma de la única estructura aditiva existente por el Teorema 54 viene dada por aquella del Teorema 61.*

A modo de conclusión, el siguiente teorema unifica las definiciones usuales de categoría abeliana.

Teorema 63. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (1) $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana.
- (2) $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva para la cual se satisfacen las condiciones (1), (2) y (3) de la definición de categoría abeliana.
- (3) $\mathcal{C}$ es una categoría preaditiva para la cual se satisfacen las condiciones (1), (2) y (3) de la definición de categoría abeliana y además admite biproductos.

Demostración. Los enunciados (2) y (3) son equivalentes por el Teorema 57. Más aún, una categoría que satisface las hipótesis del enunciado (2) es, en particular, abeliana. Recíprocamente, el Teorema 54 prueba que toda categoría abeliana es aditiva, lo que concluye la equivalencia de los enunciados (1) y (2). $\square$