2º ENCUENTRO INTERNACIONAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES NO LINEALES

EIED2005

Buenos Aires, Argentina -25 al 29 de Julio de 2005

# Explosiones en Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

**Julián Fernández Bonder**

**Pablo Groisman**

Dpto. de Matemática, FCEyN, UBA

# Prefacio

Estas notas fueron elaboradas con motivo del Segundo Encuentro Internacional de Ecuaciones Diferenciales Parciales No Lineales desarrollado en Buenos Aires en Julio de 2005. Las mismas tienen por objeto dar una breve introducción al cálculo estocástico y alas ecuaciones diferenciales estocásticas.

El único prerequisito necesario es un curso básico de Probabilidades y un curso de Teoría de la Medida. Si bien no es necesario, conocimientos sobre la teoría básica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y/o en Derivadas Parciales ayudarán a la comprensión general del texto.

Las notas están pensadas para un curso de cuatro clases de dos horas de duración cada una. Es por eso que varios temas son tratados sin la debida profundidad que requieren, haciendo énfasis más en las ideas que en la rigurosidad de las demostraciones. Cada vez que esto ocurre, se dan citas precisas con las demostraciones rigurosas.

El curso está orientado a estudiar el fenómeno de explosión en las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, por lo tanto, el desarrollo del cálculo estocástico y de la integral de Itô no están tratados con toda la profundidad y rigurosidad con que pueden encontrarse en otros textos que tratan este tema.

Finalmente, queremos agradecer a Mariela Sued por sus valiosos comentarios y su lectura crítica y cuidadosa de las notas.

Buenos Aires, Julio 2005.

J.F.B P.G.

# Índice general

# Introducción

*Gott wurfelt nicht! (¡Dios no juega a los dados!)*
Albert Einstein

*Si Dios ha hecho del mundo un mecanismo perfecto, al menos le concedió a nuestro imperfecto intelecto tanto como para que para predecir pequeñas partes de él, necesitamos resolver innumerables ecuaciones diferenciales, pero podemos usar dados con éxito.*
Max Born

*God not only plays dice. He also sometimes throws the dice where they cannot be seen.*
Stephen Hawking

*God plays dice with the universe. But they're loaded dice. And the main objective of physics now is to find out by what rules were they loaded and how we can use them for our own ends.*
Joseph Ford

Muchos fenómenos naturales pueden ser modelados por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de la forma

$$\dot{x}(t) = b(x(t)), \quad x(0) = x_0. \tag{0.1}$$

Interacción de planetas, flujos de fluidos, reacciones químicas, dinámicas poblacionales y económicas, constituyen algunos de los innumerables ejemplos.

Las soluciones de estas ecuaciones son curvas regulares $x(t)$ que representan el estado del sistema en cada instante, ver Figura 1.

Sin embargo, en muchas aplicaciones, las trayectorias –medidas experimentalmente– de sistemas modelados con EDOs muestran comportamientos como el de la Figura 2.

Algunas observaciones surgen de comparar estas trayectorias:

- No parece adecuado modelar este fenómeno con curvas regulares.
- Si bien en el gráfico se observa una componente aleatoria también puede observarse cierta estructura determinística.
- Parece razonable modificar el modelo dado por la ecuación diferencial ordinaria de forma tal de poder incluir efectos aleatorios (ruido) que perturben el sistema en cada instante.

Si para una solución de (0.1) se tiene que

$$x(t + \Delta t) - x(t) = b(x(t)) + o(\Delta t),$$

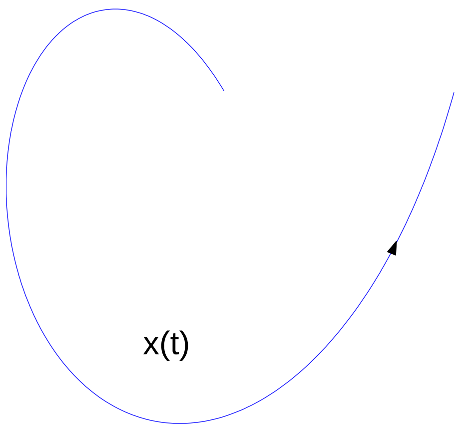


FIGURA 1. Trayectoria de una solución de una EDO

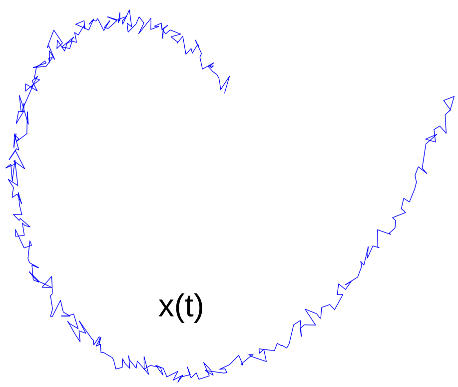


FIGURA 2. Una realización de la solución de una Ecuación Diferencial Estocástica.

entonces una forma perturbar el modelo dado por la EDO es considerar

$$x(t+\Delta t) - x(t) = b(x(t))\Delta t + \text{“ruido”} + o(\Delta t),$$

más precisamente,

$$\dot{x}(t) = b(x(t)) + \sigma(x(t))\xi(t).$$

Es decir que el vector tangente a la curva en $x(t)$, si existiese, estaría determinado fundamentalmente por $b(x(t))$, pero también por una componente aleatoria que debemos determinar.

Las ecuaciones diferenciales estocásticas han sido consideradas en diversas campos de aplicaciones que van desde aplicaciones a finanzas hasta el estudio de fallas en materiales sólidos por causa de fatiga. En este último caso, las funciones $b$ y $\sigma$ se comportan como potencias y por ende las soluciones pueden explotar en tiempo finito (cf. Capítulo 4). Este tiempo de explosión es generalmente aleatorio, depende de la realización particular de la trayectoria y corresponde al tiempo de daño final o falla por fatiga en el material.

En el primer capítulo de este apunte haremos una breve introducción a la teoría de probabilidades de manera tal de construir las herramientas necesarias para luego definir el “ruido”, $\xi$, que utilizaremos para construir el modelo que estamos buscando, que resultará ser el denominado *ruido blanco*, construido a partir del *Movimiento Browniano.*

En el Capítulo 2 construiremos la integral estocástica y daremos sus propiedades. Deduciremos la Fórmula de Itô.

Con todo este material, en el Capítulo 3 definiremos el concepto de solución de una ecuación diferencial estocástica y probaremos teoremas de existencia y unicidad.

Por último, en el Capítulo 4 nos dedicaremos al caso en que las soluciones desarrollan singularidades en tiempo finito (aleatorio).

Este apunte está basado en:

- En el Capítulo 1 seguimos la presentación de *An introduction to stochastic differential equations.* Version 1.2, escritas por Lawrence C. Evans, Department of Mathematics, UC Berkeley,
  http://math.berkeley.edu/∼evans/SDE.course.pdf, [**5**]
- Para los capítulos 2 y 3 usamos *Stochastic Differential Equations*, escritas por Markus Reiß, Institute of Mathematics, Humboldt University, Berlin.
  http://www.mathematik.hu-berlin.de/∼reiss, [**11**]
- Para el Capítulo 4 nos basamos en [**6**]

Cualquier error, crítica o comentario que tengan sobre las notas, enviarlo a

Julián Fernández Bonder
Departamento de Matemática, FCEyN,
Universidad de Buenos Aires,
Pabellón I, Ciudad Universitaria (1428),
Buenos Aires, Argentina.
`jfbonder@dm.uba.ar`
`http://mate.dm.uba.ar/∼jfbonder`

Pablo Groisman
Instituto de Cálculo, FCEyN,
Universidad de Buenos Aires,
Pabellón II, Ciudad Universitaria (1428),
Buenos Aires, Argentina.
`pgroisma@dm.uba.ar`
`http://mate.dm.uba.ar/∼pgroisma`

CAPíTULO 1

# Breve introducción a la Teoría de Probabilidades

## 1. Definiciones y Propiedades básicas

La estructura matemática sobre la que se construye la Teoría de Probabilidades son los espacios de probabilidad, por lo tanto comenzaremos por ellos.

Definición 1.1. *Un espacio de medida* $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ *se llama un espacio de probabilidad si* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Notación:

- A los conjuntos $A \in \mathcal{U}$ se los llama *eventos*; y a los puntos $\omega \in \Omega$ *eventos elementales*
- $\mathbb{P}(A)$ es la *probabilidad* del evento $A$.
- Una propiedad que es cierta excepto para un conjunto de probabilidad cero se dice que vale *casi seguramente*; por lo general, lo abreviaremos "c.s.".

### 1.1. Variables Aleatorias.

Podemos pensar al espacio de probabilidad como un objeto matemático que no es "directamente observable". Estamos interesados entonces en definir funciones $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, los valores que podemos observar.

Definición 1.2. *Una variable aleatoria es una función* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *medible, es decir que para cada* $B \in \mathcal{B}$ *(la* $\sigma-$*álgebra de Borel en* $\mathbb{R}^n$*), se tiene*

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{U}.$$

De aquí en adelante, en $\mathbb{R}^n$ siempre consideraremos la $\sigma-$álgebra de Borel. También usaremos la expresión "$X$ es $\mathcal{U}-$medible" cuando sea necesario.

En general, escribiremos $X$ y no $X(\omega)$ siguiendo la costumbre en la teoría de probabilidades de - mayoritariamente - no mostrar la dependencia de las variables aleatorias en los eventos elementales $\omega \in \Omega$. También usaremos $\mathbb{P}(X \in B)$ en lugar de $\mathbb{P}(X^{-1}(B))$ para la probabilidad de que $X$ pertenezca a $B$.

**Ejemplo.** Sea $A \in \mathcal{U}$. La función indicadora de $A$,

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ \\ 0 & \text{si } \omega \notin A, \end{cases}$$

es una variable aleatoria. En general, si $A_1, \ldots, A_m$ es una partición de $\Omega$ y $a_1, \ldots, a_m$ son números reales, entonces

$$X = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{1}_{A_i}$$

es una variable aleatoria llamada *función simple*. Cuando utilicemos el nombre de *función simple* supondremos además que los números $a_1, \ldots, a_n$ son todos distintos.

A continuación un lema bien conocido de teoría de la medida.

LEMA 1.3. *Sea $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$. La familia*

$$\mathcal{U}(X) := \{X^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}\}$$

*es una $\sigma-$álgebra, denominada $\sigma-$álgebra generada por la variable $X$. Esta es la menor sub-$\sigma-$álgebra de $\mathcal{U}$ respecto de la cual $X$ es medible.*

Es esencial entender que, en términos probabilísticos, la $\sigma-$álgebra $\mathcal{U}(X)$ puede ser interpretada como que contiene toda la información relevante sobre la variable $X$, como lo ilustran los siguiente ejemplos

**Ejemplo 1.** Si una variable aleatoria $Y$ es una función de $X$, i.e. $Y = \Phi(X)$ y $\Phi$ es medible Borel, entonces $Y$ es $\mathcal{U}(X)-$medible.

Recíprocamente, supongamos que $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ es $\mathcal{U}(X)-$medible, entonces se puede ver que existe una función $\Phi$ tal que

$$Y = \Phi(X).$$

Por lo tanto, si $Y$ es $\mathcal{U}(X)-$medible y conocemos el valor de $X(\omega)$ conocemos también, en principio, el valor de $Y(\omega)$.

**Ejemplo 2.** Si $X$ es una variable aleatoria simple, $X = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{1}_{A_i}$. Entonces $\mathcal{U}(X)$ es la $\sigma-$álgebra generada por $A_1, \ldots, A_m$.

## 1.2. Valores Esperados.

DEFINICIÓN 1.4. *Sea $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ una variable aleatoria, definimos entonces*

$$\mathbb{E}(X) := \int_\Omega X \,\mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad \mathbb{V}(X) := \int_\Omega |X - \mathbb{E}(X)| \,\mathrm{d}\mathbb{P},$$

*la esperanza y la varianza de $X$ respectivamente, si es que existen.*

OBSERVACIÓN 1.5. $\mathbb{E}(X)$ *es la mejor aproximación (estimación) constante de $X$, en el sentido que*

$$\int_\Omega |X - a|^2 \mathrm{d}\mathbb{P}$$

*se minimiza cuando $a = \mathbb{E}(X)$, de hecho, si $X \in L^2(\Omega)$, $\mathbb{E}(X)$ es la proyección ortogonal de $X$ sobre el espacio de las funciones contantes.*

OBSERVACIÓN 1.6.

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X).$$

La Desigualdad de Chebyshev es una herramienta fundamental en la teoría de probabilidades, su demostración es directa.

LEMA 1.7 (Desigualdad de Chebyshev). . *Sea $X$ una variable aleatoria y $1 \le p < \infty$, entonces*

$$\mathbb{P}(|X| \ge \lambda) \le \frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}(|X|^p) \qquad \textit{para todo } \lambda > 0.$$

## 1.3. Funciones de distribución.

Una variable aleatoria $X$ induce una probabilidad $P_X$ sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$, definida por

$$P_X(B) = \mathbb{P}(X \in B).$$

Esta última medida $P_X$ se denomina *distribución de $X$*. Su importancia radica en que es una probabilidad definida sobre $\mathbb{R}^n$ que, por lo general, es un espacio mucho mas concreto que $\Omega$.

También suele denominarse *función de distribución de $X$* a $F_X\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ dada por

$$F_X(x) := P_X((-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \le x) \qquad .$$

La expresión $x \le y$ debe interpretarse coordenada a coordenada.

Si $X_1, \dots, X_m \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ son variables aleatorias, se define su *función de distribución conjunta* como

$$F_{X_1,\dots,X_m}(x_1, \dots, x_m) := \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_m \leq x_m), \qquad (x_1, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^n)^m.$$

DEFINICIÓN 1.8. *Sea $X$ una variable aleatoria. Diremos que $X$ es una variable aleatoria continua si $P_X$ es absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.*

En ese caso, por el Teorema de Radon-Nikodym, existe $f = f_X \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_{\geq 0})$, denominada *función de densidad de $X$*, tal que para todo $B \in \mathcal{B}$

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B dP_X = \int_B f(x)\, dx.$$

Esta fórmula es muy importante porque la última expresión es una integral ordinaria en $\mathbb{R}^n$ que, en muchos casos, puede ser calculada en forma explícita. Nuevamente puede verse en esta situación la importancia de introducir las variables aleatorias en lugar de trabajar en el espacio original de probabilidades $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$, al igual que en la siguiente observación.

Si $X$ tiene densidad $f_X$ y $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es medible Borel, entonces

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_\Omega g(X)\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dP_X = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_X(x)\, dx.$$

**Ejemplo.** Si $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ tiene densidad

$$f(x) = \frac{1}{((2\pi)^n \det C)^{1/2}}\; e^{-\frac{1}{2}\,(x-m)\cdot C^{-1}\cdot(x-m)} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

para algún $m \in \mathbb{R}^n$ y alguna matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida positiva, decimos que $X$ tiene distribución *normal* con media $m$ y matriz de covarianza $C$ y escribimos $X \sim N(m, C)$.

Si $n = 1$, al escalar $C$ se lo suele denotar $\sigma^2$, en ese caso, se tiene

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = m$$

y

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2.$$

Es decir que los parámetros $m$, $\sigma^2$ representan efectivamente la media (ó esperanza) y la varianza respectivamente.

**1.4. Independencia.** Sea $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, y sean $A$, $B \in \mathcal{U}$ dos eventos con $\mathbb{P}(B) > 0$. Buscamos una definición razonable de

$$\mathbb{P}(A|B), \text{ la prbobabilidad de que ocurra } A \text{ dado que ocurrió } B.$$

Supongamos que un punto $\omega \in \Omega$ fue elegido al azar y sólo contamos con la información de que $\omega \in B$. ¿Cuál es la probabilidad de que $\omega$ también pertenezca a $A$? Como sabemos que $\omega \in B$, podemos pensar a $B$ como un nuevo espacio de probabilidad, para eso definimos $\tilde{\Omega} := B$, $\tilde{\mathcal{U}} := \{C \cap B | C \in \mathcal{U}\}$ y $\tilde{\mathbb{P}} := \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}(B)}$ como para que $\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{\Omega}) = 1$. Entonces la probabilidad de que $\omega \in A$ resulta ser $\tilde{\mathbb{P}}(A \cap B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

DEFINICIÓN 1.9. *Sea $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, y $B \in \mathcal{U}$ con $\mathbb{P}(B) > 0$. Para todo $A \in \mathcal{U}$ definimos*

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

En este contexto queremos determinar qué significa que dos eventos $A$ y $B$ son independientes. Este hecho debería implicar que $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ ya que la información de que ocurrió el evento $B$ es irrelevante para determinar lo ocurrencia (o no ocurrencia) de $A$. Esto es equivalente a

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Tomaremos esta última expresión para definir la noción de independencia que, además, no requiere $P(B) > 0$.

Definición 1.10 (Independencia). *Sea $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad*

1. *Dos conjuntos $A, B \in \mathcal{U}$ se dicen independientes si*
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\;.$$
2. *Una colección de eventos $\{A_i,\; i \in I\}$ se dice independiente si para cualquier elección $1 \leq k_1 < \ldots < k_m$,*
$$\mathbb{P}(A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_m}) = \mathbb{P}(A_{k_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{k_m}),$$
3. *Una colección $\{\mathcal{U}_i,\; i \in I,\; \mathcal{U}_i \subset \mathcal{U}\}$ de $\sigma-$álgebras se dice independiente si*
$$\mathbb{P}(A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_m}) = \mathbb{P}(A_{k_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{k_m}),$$
*para todas las posibles elecciones de $1 \leq k_1 < \cdots < k_m$ y de eventos $A_{k_i} \in \mathcal{U}_{k_i}$*
4. *Una colección de variables aleatorias $\{X_i; i \in I\}$ se dice independiente si la colección de $\sigma-$álgebras $\{\mathcal{U}(X_i)\}$ es independiente.*
5. *La variable aleatoria $X$ se dice independiente de la $\sigma-$álgebra $\mathcal{U}$ si $\mathcal{U}(X)$ es independiente de $\mathcal{U}$.*

Existen muchas equivalencias para las definiciones dadas arriba (ver, por ejemplo **[3]**, a continuación solo mencionamos una definición equivalente a 4 para lograr un poco de intuición.

Lema 1.11. *Una colección de variables aleatorias $\{X_i; i \in I\}$ es independiente si para todo entero $k \geq 2$ y cualquier elección de conjuntos borelianos $B_1, \ldots, B_k \subset \mathbb{R}^n$*

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \ldots, X_k \in B_k) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdots \mathbb{P}(X_k \in B_k).$$

Esta última definición refleja un poco más el concepto de independencia en el sentido de que dos variables $X$ e $Y$ son independientes si tener información sobre $X$ (i.e. que pertenece a cierto conjunto) no cambia la distribución de $Y$.

**Ejemplo.** (Funciones de Rademacher)

Consideremos $\Omega = [0, 1)$, $\mathcal{U}$ la $\sigma-$álgebra de Borel de $[0, 1)$ y $\mathbb{P}$ la medida de Lebesgue. Para $n = 1, 2, \ldots$:

$$X_n(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{k}{2^n} \leq \omega < \frac{k+1}{2^n},\; k \text{ impar} \\ \\ -1 & \text{si } \frac{k}{2^n} \leq \omega < \frac{k+1}{2^n},\; k \text{ par} \end{cases}$$

Estas variables aleatorias son independientes. Para probarlo, basta verificar que

$$\mathbb{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_k = a_k) = \mathbb{P}(X_1 = a_1) \cdots \mathbb{P}(X_k = a_k),$$

para cualquier elección de $a_1, \ldots, a_k \in \{-1, 1\}$. Esto puede hacerse mostrando que ambos lados valen $2^{-k}$.

Lema 1.12. *Sean $X_1, \ldots, X_{k+m} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ variables aleatorias independientes y sean $f : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$, $g : (\mathbb{R}^n)^m \to \mathbb{R}$ medibles Borel. Entonces*

$$Y := f(X_1, \ldots, X_k) \text{ y } Z := g(X_{k+1}, \ldots, X_{k+m})$$

*son independientes.*

Demostración. Ver, por ejemplo, [**2**]. $\square$

Una de las propiedades más importantes de las variables aleatorias independientes es la siguiente:

Teorema 1.13. *Sean $X, Y \in L^1(\Omega)$ variables aleatorias independientes, entonces $XY \in L^1(\Omega)$ y*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Demostración. Consideraremos solo el caso $X = \mathbf{1}_A, Y = \mathbf{1}_B$, $A, B \in \mathcal{U}$. La primera observación es que la independencia de las variables $X$ e $Y$ es equivalente a la independencia de los conjuntos $A$ y $B$, luego

$$\mathbb{E}(XY) = \int_\Omega \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \, d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Para variables aleatorias simples se prueba el mismo resultado usando la linealidad de la esperanza, luego para variables positivas mediante el teorema de convergencia monótona y finalmente para $X$ e $Y$ cualesquiera. $\square$

Corolario 1.14. *Sean $X_1, \dots, X_m \in L^1(\Omega)$ variables aleatorias independientes, entonces $\mathbb{E}(|X_1 \cdots X_m|) < \infty$ y*

$$\mathbb{E}(X_1 \cdots X_m) = \mathbb{E}(X_1) \cdots \mathbb{E}(X_m).$$

Corolario 1.15. *Sean $X_1, \dots, X_m$ variables aleatorias independientes con*

$$\mathbb{V}(X_i) < \infty, \qquad i = 1, \dots, m,$$

*entonces*

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_m) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_m).$$

Demostración. Probaremos el caso $m = 2$, para $m \geq 2$ se prueba por inducción. Sean $m_1 = \mathbb{E}(X_1)$, $m_2 = \mathbb{E}(X_2)$. Entonces $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = m_1 + m_2$ y

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_1 + X_2) &= \int_\Omega (X_1 + X_2 - (m_1 + m_2))^2 d\mathbb{P} \\ &= \int_\Omega (X_1 - m_1)^2 d\mathbb{P} + \int_\Omega (X_2 - m_2)^2 d\mathbb{P} + 2\int_\Omega (X_1 - m_1)(X_2 - m_2) d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) + 2\mathbb{E}[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)]. \end{aligned}$$

Por la independencia de $(X_1 - m_1)$ y $(X_2 - m_2)$, el último término resulta ser cero, quedando demostrado el teorema. $\square$

**1.5. El Lema de Borel – Cantelli.** Sean $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eventos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$, al evento

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ pertenece a infinitos } A_n\},$$

se lo llama *"$A_n$ ocurre infinitas veces"* o simplemente *"$A_n$ infinitas veces"*.

Lo llamativo de este tipo de eventos es que, si los eventos $A_n$ son independientes, ocurre o bien con probabilidad 0 o bien con probabilidad 1.

Lema 1.16. *Sean $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eventos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$, entonces*

1. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, *entonces* $\mathbb{P}(A_n$ *infinitas veces* $) = 0$.
2. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, *y los eventos* $A_n$ *son independientes, entonces* $\mathbb{P}(A_n$ *infinitas veces* $) = 1$.

Demostración.

1. $\mathbb{P}(A_n \text{ infinitas veces }) \leq \mathbb{P}(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) \leq \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_m) \to 0 \quad (m \to \infty)$.

2. Consideremos los eventos
$$B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$
Basta ver que $\mathbb{P}(B_n) = 1$ para todo $n$, pues la intersección numerable de eventos de probabilidad 1 tiene probabilidad 1. Para ello, observemos que los eventos $\{A_n^c\}$ son independientes y entonces
$$1 - \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) = \prod_{k=n}^{\infty}(1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq \prod_{k=n}^{\infty} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)} = 0.$$
□

**Ejemplo.** Un ejemplo clásico de aplicación del Lema de Borel – Cantelli es el siguiente: supongamos que colocamos un mono delante de una máquina de escribir (obsérvese que el ejemplo es si no clásico, al menos, viejo). Existe una probabilidad positiva, aunque ínfima, de que el mono escriba las obras completas de Shakespeare. Llamemos $A_1$ al evento de que el mono realice semejante proeza. Repitamos ahora este experimento en forma independiente (dejando descansar al mono, por ejemplo) en forma sucesiva infinitas veces y llamemos $A_n$ al evento en que el mono logra escribir las obras completas en el $n-$ésimo intento.

Como $\mathbb{P}(A_n) = p > 0$, resulta $\sum \mathbb{P}(A_n) = \infty$ y por lo tanto $\mathbb{P}(A_n$ infinitas veces $) = 1$. Es decir que con probabilidad 1, el mono escribirá infinitas veces las obras completas de Shakespeare.

## 2. Esperanza Condicional

En la sección 1.4 definimos $\mathbb{P}(A|B)$, la probabilidad de que ocurra $A$ "dado que" o "teniendo el conocimiento de que" ocurrió $B$. Comenzaremos esta sección intentando dar una definición de $\mathbb{E}(X|B)$. Recordemos que si $\mathbb{P}(B) > 0$, entonces $B$ induce una nueva probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ dada por $\tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(\cdot|B) = \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}(B)}$. Es natural entonces definir $\mathbb{E}(X|B)$ como la esperanza de $X$ dada por esta nueva probabilidad, es decir
$$\mathbb{E}(X|B) := \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X d\mathbb{P}.$$
En otras palabras, $\mathbb{E}(X|B)$ es el promedio de $X$ sobre $B$.

Queremos ahora definir la esperanza de $X$ condicional a una variable aleatoria $Y$: si el azar eligió un punto $\omega \in \Omega$ y toda la información con la que contamos es el valor de $Y(\omega)$ ¿cuál es nuestra mejor estimación para el valor $X(\omega)$? Supongamos, en principio, que $Y$ es una variable aleatoria simple, $Y = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{1}_{A_i}$. Si conocemos el valor de $Y(\omega)$ podemos decir a cuál de los conjuntos $A_1 \ldots A_m$ pertenece $\omega$ y entonces podemos definir
$$\mathbb{E}(X|Y) := \mathbb{E}(X|A_i), \qquad \text{si } Y = a_i,$$

en otras palabras,

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) := \sum_{i=1}^{m} \left[ \frac{1}{\mathbb{P}(A_i)} \int_{A_i} X \mathrm{d}\mathbb{P} \right] \mathbf{1}_{A_i}.$$

Algunas observaciones:

- $\mathbb{E}(X|Y)$ es una variable aleatoria y no una constante.
- $\mathbb{E}(X|Y)$ es $\mathcal{U}(Y)-$medible.
- Parar todo $A \in \mathcal{U}(Y)$ se tiene

$$\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|Y) \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Estas propiedades son las que caracterizan a la esperanza condicional, lo que nos lleva a dar la siguiente definición

Definición 1.17. *Sea* $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y* $X$ *e* $Y$ *variables aleatorias definidas en él. Llamaremos* $\mathbb{E}(X|Y)$ *a cualquier variable aleatoria* $\mathcal{U}(Y)-$*medible que cumpla*

$$\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|Y) \mathrm{d}\mathbb{P} \quad \textit{para todo } A \in \mathcal{U}(Y).$$

Por último, observemos que los valores que toma $Y$ no influyen en esta definición, sólo importa la $\sigma-$álgebra que genera, lo cual hace que sea mas natural dar la siguiente definición

Definición 1.18. *Sea* $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y sea* $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ *una* $\sigma-$*álgebra. Entonces* $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ *es cualquier variable aleatoria* $\mathcal{F}-$*medible que cumpla*

$$\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \mathrm{d}\mathbb{P} \quad \textit{para todo } A \in \mathcal{F}.$$

Observación 1.19. *La existencia y unicidad de* $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ *es una simple consecuencia del Teorema de Radon-Nikodym: Sea* $\mu$ *la medida en* $\mathcal{F}$ *definida por*

$$\mu(A) = \int_A X \,\mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad \textit{para } A \textit{ en } \mathcal{F}\ .$$

*Tenemos entonces que* $\mu$ *es absolutamente continua con respecto a* $\mathbb{P}$*, restringida a* $\mathcal{F}$*, por lo tanto existe una única función* $F$*,* $\mathcal{F}$*-medible tal que*

$$\mu(A) = \int_A F \,\mathrm{d}\mathbb{P}\ .$$

*La función* $F$ *es la variable aleatoria que estamos buscando,* $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] := F$ *verifica lo pedido.*

Enunciamos a continuación las principales propiedades de la esperanza condicional, varias de ellas ayudan a desarrollar intuición sobre este objeto.

Teorema 1.20 (Propiedades de la Esperanza Condicional). *Sea* $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *variables aleatorias integrables,* $a, b \in \mathbb{R}$*. Tenemos entonces que*

1. $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{F}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$.
2. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]] = \mathbb{E}[X]$.
3. $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = X$ *si* $X$ *es* $\mathcal{F}$*-medible.*
4. $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$ *si* $X$ *es independiente de* $\mathcal{F}$ *(en particular, si* $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$*).*
5. $\mathbb{E}[YX|\mathcal{F}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ *si* $Y$ *es* $\mathcal{F}$*-medible y* $XY \in L^1(\Omega)$*.*
6. *Dadas dos* $\sigma$*-álgebras* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$*, vale que*

$$\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\Big|\mathcal{G}\Big] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\ .$$

7. *Si* $X_1 \le X_2$ *entonces* $\mathbb{E}[X_1|\mathcal{F}] \le \mathbb{E}[X_2|\mathcal{F}]$.

8. *(Desigualdad de Jensen) Si $\phi$ es una función convexa, entonces*

$$\phi\left(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\right) \leq \mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{F}].$$

DEMOSTRACIÓN. Los ítems 1 a 4, 6 y 7 son inmediatos usando la unicidad de la esperanza condicional. Para 5, suponer primero que $X$ es simple y el caso general sigue por aproximación. Para 8 supondremos que $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y entonces para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\phi(x) \geq \phi(y) + \phi'(y)(x-y),$$

en particular

$$\phi(X) \geq \phi(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) + \phi'(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}))(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})),$$

tomando esperanza condicional $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{F})$ de ambos lados tenemos

$$\mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{F}] \geq \mathbb{E}[\phi(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}))|\mathcal{F}] + \mathbb{E}[\phi'(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))|\mathcal{F}],$$

o bien

$$\mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{F}] \geq \phi(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]) + \phi'(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}))\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))|\mathcal{F}] = \phi(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]).$$

En este último paso usamos que $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}), \phi(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}))$ y $\phi'(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}))$ son $\mathcal{F}-$medibles.

La demostración de todos los ítems puede encontrarse en **[3]**. □

**2.1. La Esperanza Condicional como predictor óptimo.** Consideremos $L^2(\mathbb{P})$, el espacio de funciones $\mathcal{U}$-medibles de cuadrado integrable. Dada la $\sigma$-álgebra $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, sea $V = L^2(\Omega, \mathcal{F})$ el espacio de funciones $\mathcal{F}$-medibles de cuadrado integrable. Resulta ser un subespacio vectorial cerrado de $L^2(\mathbb{P})$ y por lo tanto, si $X \in L^2(\Omega)$ podemos definir su proyección ortogonal sobre $V$

$$Z := \pi_V(X).$$

Observemos que $Z$ es $\mathcal{F}-$medible y para todo $A \in \mathcal{F}$, $\mathbf{1}_A \in V$, con lo cual

$$\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega X\mathbf{1}_A \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega Z\mathbf{1}_A \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A Z \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Es decir que $Z$ es la esperanza condicional. Tenemos entonces que para $X$ en $L^2(P)$, $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = \pi_V(X)$.

Una consecuencia muy importante que se desprende es que $\mathbb{E}(X|F)$ resulta ser la mejor aproximación (estimación) de $X$ por funciones $\mathcal{F}-$ medibles en el sentido de cuadrados mínimos

$$\int_\Omega |\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] - X|^2 \mathrm{d}\mathbb{P} = \min_{Y \in V} \int_\Omega |Y - X|^2 \mathrm{d}\mathbb{P}$$

Este hecho es, entre otras cosas, la base de gran parte de la estadística ya que resuelve el problema de encontrar la mejor estimación de $X$ basada en la información disponible $\mathcal{F}$ (ver **[13]**).

## 3. Procesos Estocásticos

En este curso estudiaremos procesos (aleatorios) que evolucionan en el tiempo, a estos procesos se los denomina *Procesos estocásticos*, a continuación daremos algunas definiciones y propiedades básicas sobre estos objetos.

FIGURA 1. Una trayectoria $X(\cdot,\omega)$ del proceso estocástico

DEFINICIÓN 1.21. *Un proceso estocástico es una colección parametrizada de variables aleatorias*
$$\{X(t)\colon t \in I\ \},$$
*definidas en un mismo espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$*, tomando valores en* $\mathbb{R}^n$*.*

DEFINICIÓN 1.22. *Una filtración es una familia creciente de* $\sigma$*-álgebras* $(\mathcal{F}_s : s \in I)$ *con* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ *para* $s \leq t$*.*

DEFINICIÓN 1.23. *Un proceso* $\{X(t)\colon t \geq 0\ \}$*, se dice* adaptado *a la filtración* $\mathcal{F}_t$ *si* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}_t-$*medible para todo* $t \geq 0$*. Equivalentemente diremos que* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}_t-$*adaptado, o simplemente adaptado si no es necesario explicitar* $\mathcal{F}_t$*.*

Si $X(\cdot)$ es un proceso estocástico, entonces para cada $t$ fijo, tenemos una variable aleatoria
$$\omega \mapsto X(t,w),\ \omega \in \Omega\ .$$
Por otro lado, para cada $\omega \in \Omega$ fijo, tenemos una trayectoria
$$t \mapsto X(t,\omega),\ t \in I\ .$$

Dado un proceso $X$, muchas veces (cf. Capítulo 3) estaremos interesados en estudiar la evolución del mismo hasta un cierto tiempo aleatorio (*tiempo de parada*). Un punto de fundamental importancia es que la decisión de parar, debe depender sólo de la información disponible hasta ese momento y no del futuro. Equivalentemente, si $\tau\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ es el tiempo de parada, el proceso $Y(t) := X(t \wedge \tau)$ debe ser un nuevo proceso $\mathcal{F}_t-$adaptado. Eso motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.24. *Una variable aleatoria* $\tau\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *se dice un* tiempo de parada *si* $\{\tau \leq t\}$ *es* $\mathcal{F}_t-$*medible, para todo* $t \geq 0$*.*

**Ejemplos.**

1. Obviamente, $\tau = t_0$ (constante) es un tiempo de parada.
2. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Entonces el *primer tiempo de escape*
$$\tau_U := \text{ínf}\{t > 0\ :\ X(t) \notin U\}$$
es un tiempo de parada, dado que
$$\{t_U \leq t\} = \bigcap_m \bigcup_{r \in \mathbb{Q},\ r<t} \{X(t) \notin K_m\} \in \mathcal{F}_t,$$
donde $\{K_m\}$ es una sucesión creciente de conjuntos cerrados tales que $U = \bigcup_m K_m$.

DEFINICIÓN 1.25. *Dados dos procesos* $X$ *e* $Y$ *decimos que* $X$ *es una versión de* $Y$ *si para todo* $t \geq 0$*,* $P(X(t) = Y(t)) = 1$*.*

Es muy importante distinguir entre las siguientes afirmaciones

(A) Para todo $t \geq 0$, $P(X(t) = Y(t)) = 1$.
(B) $P(X(t) = Y(t),\ \text{para todo } t \geq 0) = 1$.

La propiedad (B) es más fuerte que la (A), pero dos procesos pueden satisfacer (A) tener trayectorias distintas para casi todo $\omega$, como lo muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo.** Sea $T$ una variable aleatoria continua con valores en $\mathbb{R}_+$ y $X(t) \equiv 0$. Consideremos el proceso

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & t \neq T \\ 1 & t = T. \end{cases}$$

Estos dos procesos cumplen (A) ya que $P(X(t) = Y(t)) = P(T \neq t) = 1$. Pero por otro lado, $P(X(t) = Y(t),\ \text{para todo } t \geq 0) = P(T \notin \mathbb{R}_+) = 0$.

A los procesos que satisfacen (B) se los denomina indistinguibles. Si los procesos $X$ e $Y$ son continuos, entonces (A) y (B) son equivalentes.

## 4. Movimiento Browniano – Ruido Blanco

DEFINICIÓN 1.26. *Dado un espacio de probabilidades* $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$*, diremos que el proceso* $(B(t))_{t\geq 0}$ *a valores en* $\mathbb{R}^n$ *es un Movimiento Browniano estándar respecto de la filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *sobre el espacio* $\Omega$ *si es* $\mathcal{F}_t-$*adaptado y satisface:*

1. *Casi todas la trayectorias son continuas. Es decir, existe* $\Omega_0 \subset \Omega$ *con* $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ *tal que para todo* $\omega \in \Omega_0$
$$t \to B(t, \omega), \quad t \geq 0$$
*es continua.*
2. $(B(t))_{t\geq 0}$ *tiene incrementos con distribución normal: para* $n \in \mathbb{N}$ *y* $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ *las variables aleatorias* $B(t_1) - B(t_0), \cdots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ *son independientes con*
$$B(t_{i+1}) - B(t_i) \sim N(0, (t_{i+1} - t_i)Id)\ .$$
3. $B(0) = 0$ $\mathbb{P}-$*c.s.*

Salvo que indiquemos lo contrario, supondremos $\mathcal{F}_t := \mathcal{U}(B(s),\ s \leq t)$.

El Movimiento Browniano es uno de los objetos más estudiados por la teoría de probabilidades. Sus orígenes se remontan al año 1828, cuando el botánico Robert Brown observó que las partículas de polen suspendidas en líquido desarrollan un movimiento errático. En 1905 Albert Einstein (entre otros) se ocupó de este fenómeno y dio una explicación basada en las colisiones aleatorias de las partículas de polen con las moléculas del líquido. El trabajo de Einstein le sirvió a Jean-Baptiste Perrin para calcular el número de Avogadro ($\approx 6 \times 10^{23} =$ número de moléculas en un mol). En 1920 y los años sucesivos, Norbert Wiener dio una formulación matemáticamente rigurosa de este fenómeno, por eso a este proceso se lo conoce también como *Proceso de Wiener*.

Un hecho que se deduce de la definición del Movimiento Browniano es que la variable aleatoria $B(t) - B(s)$ es independiente de la $\sigma$-álgebra $\mathcal{F}_s$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B(t)|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B(t) - B(s)) + B(s)|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[B(t) - B(s)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B(s)|\mathcal{F}_s] \qquad (1.1) \\ &= \mathbb{E}[B(t) - B(s)] + B(s) = B(s), \end{aligned}$$

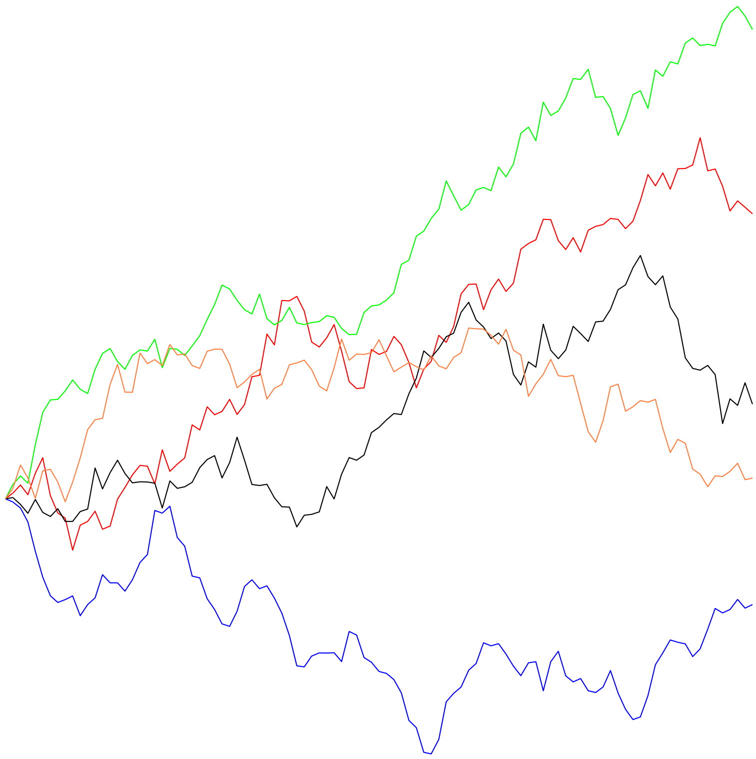

FIGURA 2. Cinco simulaciones de un Movimiento Browniano unidimensional

en la última igualdad usamos que $B(s)$ es $\mathcal{F}_s$ medible y que $B(t)-B(s)$ es independiente de $\mathcal{F}_s$.

Teniendo en cuenta la condición de predictor óptimo de la esperanza condicional, la ecuación (1.1) implica que la mejor estimación para el futuro $B(t)$ basada en toda la información disponible hasta el presente $s$ es el valor del proceso en el presente. A los procesos que satisfacen esta propiedad se los denomina *Martingalas.*

DEFINICIÓN 1.27 (Martingalas). *Un proceso estocástico $(M(t))_{t\geq 0}$ en $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ se dice Martingala a tiempo continuo con respecto a la familia creciente de $\sigma-$álgebras $\mathcal{F}_t$ si satisface*

1. *$M(t)$ es $\mathcal{F}_t$ medible para todo $t$ (proceso adaptado),*
2. *$\mathbb{E}[|M(t)|] < \infty$ para todo $t$,*
3. *$M(s) = \mathbb{E}[M(t)|\mathcal{F}_s]$ para todo $s \leq t$ .*

*Si en lugar de (iii) se tiene*

$$M(s) \leq (\geq) E[M(t)|\mathcal{F}_s],$$

*se dice que $M(\cdot)$ es una submartingala (supermartingala).*

**Ejemplo.** Sea $B(\cdot)$ un Proceso de Wiener y consideremos el proceso $M(t) := B^2(t) - t$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B^2(t)-t|\mathcal{F}_s] =&\mathbb{E}[[(B(t)-B(s))+B(s)]^2-t|\mathcal{F}_s]\\ =&\mathbb{E}[(B(t)-B(s))^2|\mathcal{F}_s]+2\mathbb{E}[(B(t)-B(s))B(s)|\mathcal{F}_s]\\ &+\mathbb{E}[B(s)^2|\mathcal{F}_s]-t\\ =&t-s+2B(s)\mathbb{E}[(B(t)-B(s))|\mathcal{F}_s]+B(s)^2-t\\ =&B(s)^2-s.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Es decir, $M(t)$ es martingala.

**Ejemplo.** Sea $Z$ una variable aleatoria definida en el espacio $\Omega$ con $E[|Z|] < \infty$. Sea $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una familia creciente de $\sigma-$álgebras. Consideremos el proceso estocástico $M(t)$ definido por

$$M(t) = E[Z|\mathcal{F}_t] \qquad \text{para } t \geq 0\ .$$

Haciendo uso de las propiedades de la esperanza condicional tenemos que $(M(t))_{t\geq 0}$ es una $\mathcal{F}_t-$martingala.

Veamos ahora algunas propiedades importantes de las martingalas. La primera de ellas es que tienen esperanza constante.

LEMA 1.28. *Sea $M(\cdot)$ una martingala, entonces*

$$\mathbb{E}[M(t)] = \mathbb{E}[M(0)] \qquad \textit{para todo } t \geq 0$$

*(las martingalas tienen esperanza constante).*

DEMOSTRACIÓN.

$$\mathbb{E}[M(t)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M(t)|\mathcal{F}_0]] = \mathbb{E}[M(0)].$$

□

LEMA 1.29. *Sea $M(\cdot)$ una martingala y $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa. Si $\mathbb{E}(|\Phi(M(t))|)\infty$ para todo $t \geq 0$ entonces*

$$\Phi(M(\cdot)) \textit{ es una submartingala.}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la Desigualdad de Jensen (Propiedad 8 del Teorema 1.20) tenemos que para $t \geq s$

$$\mathbb{E}(\Phi(M(t))|\mathcal{F}_s) \geq \Phi(\mathbb{E}(M(t)|\mathcal{F}_s) = \Phi(M(s)).$$

□

Las martingalas son muy importantes en la teoría de probabilidades, entre otras cosas, porque admiten la siguiente estimación que, como veremos, es muy poderosa.

TEOREMA 1.30. *[Desigualdad de Doob] Sea $(X(t), \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una submartingala con trayectorias continuas c.s., entonces*

1. $\mathbb{P}\left(\max_{0\leq s\leq t} X(s) \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[X(t)^+] \qquad \textit{para todo } \lambda > 0, \quad t \geq 0.$
2. *Si* $X(t) \geq 0, \quad \mathbb{E}\left[\max_{0\leq s\leq t} |X(s)|\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|X(t)|^p], \qquad 1 < p < \infty$

DEMOSTRACIÓN. Ver [**6**] o [**12**]. □

Además de ser una martingala, el Movimiento Browniano goza de infinidad de propiedades interesantes que hacen de él un objeto matemático muy rico, a continuación mencionamos solo algunas, pueden encontrar muchas mas en [**6**]

TEOREMA 1.31. *Sea $B(\cdot)$ un Movimiento Browniano unidimesional definido en $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ entonces*

1. ***Regularidad****. Para todo $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ existe un conjunto $\Omega_0$, $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ tal que para todo $\omega \in \Omega_0$ y para todo $T > 0$ la función $B(\cdot, \omega)$ es uniformemente Hölder $\gamma$ en $[0, T]$.*
2. ***No diferenciabilidad.*** *Para todo $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$ para casi todo $\omega \in \Omega$ la función $B(\cdot, \omega)$* ***no*** *es Hölder $\gamma$ en ningún punto. En particular, para casi todo $\omega \in \Omega$ la función $B(\cdot, \omega)$* ***no*** *es derivable en ningún punto y* ***no*** *es de variación acotada en ningún intervalo.*

3. ***Variación cuadrática.*** *Sean* $0 \le a < b$ *y supongamos que*
$$P^n := \{a = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{m_n}^n = b\}$$
*son particiones de* $[a,b]$ *tales que* $|P^n| \to 0$ *cuando* $n \to \infty$. *Entonces*
$$\sum_{k=0}^{m_n-1} \left[B(t_{k+1}^n) - B(t_k^n)\right]^2 \to b - a$$
*en* $L^2(\Omega)$. *Este hecho justifica en forma parcial la idea heurística de que*
$$dB \approx (dt)^{1/2}.$$
4. ***Markovianidad.*** *Para todo* $A \in \mathcal{B}$ *y para todo* $0 \le s \le t$
$$\mathbb{P}\big(B(t) \in A | \mathcal{U}(B(r), 0 \le r \le s)\big) = \mathbb{P}(B(t) \in A | B(s)).$$
Es decir, para predecir el valor de $B(t)$ da lo mismo conocer el valor $B(s)$ que todo el recorrido que hizo $(B(r), 0 \le r \le s)$. A los procesos que tienen esta propiedad se los llama *Markovianos*. Una extensa teoría ha sido desarrollada sobre este tipo de procesos.
5. ***Rescale.*** *Los procesos* $\frac{1}{a}B(a^2 t)$ *y* $\frac{1}{t}B(1/t)$ *son movimientos Brownianos.*
6. ***Ceros.*** *Sea* $Z_B := \{t \ge 0 \colon B(t) = 0\}$ *el conjunto de ceros de* $B(\cdot)$. *Para casi todo* $\omega \in \Omega$, $Z_B$ *es un conjunto cerrado, no numberable y no contiene puntos aislados. Su dimensión de Hausdorff es* $1/2$. *La dimensión del gráfico de una trayectoria es* $3/2$ *para casi todo* $\omega$.

Demostración. Probaremos sólo el ítem 3, el resto de las demostraciones se pueden encontrar en [**6, 12**]. Para ello, consideremos
$$Q_n := \sum_{k=0}^{m_n-1} \left[B(t_{k+1}^n) - B(t_k^n)\right]^2$$
Entonces
$$Q_n - (b-a) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \Big(\left[B(t_{k+1}^n) - B(t_k^n)\right]^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)\Big),$$
y por lo tanto
$$\mathbb{E}[(Q_n - (b-a))^2] =$$
$$\sum_{k,j=0}^{m_n-1} \mathbb{E}\left[\Big(\left[B(t_{k+1}^n) - B(t_k^n)\right]^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)\Big) \cdot \Big(\left[B(t_{j+1}^n) - B(t_j^n)\right]^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)\Big)\right],$$
Gracias a los incrementos independientes del Movimiento Browniano, para $k \ne j$ la esperanza en la suma de arriba se factoriza y por lo tanto vale cero ya que $B(t_{k+1}^n) - B(t_k^n) \sim N(0, t_{k+1}^n - t_k^n)$. Entonces, si llamamos
$$Y_k = Y_k^n := \frac{B(t_{k+1}^n) - B(t_k^n)}{\sqrt{t_{k+1}^n - t_k^n}},$$
tenemos que
$$\mathbb{E}[(Q_n - (b-a))^2] = \sum_{k=0}^{m_n-1} \mathbb{E}[(Y_k^2 - 1)^2](t_{k+1}^n - t_k^n)^2$$
Como $Y_k \sim N(0,1)$, obtenemos
$$\mathbb{E}[(Q_n - (b-a))^2] \le C \sum_{k=0}^{m_n-1} (t_{k+1}^n - t_k^n)^2 \le C|P^n|(b-a) \to 0 \quad (n \to \infty).$$
$\square$

Observación 1.32. *Pasando a una subsucesión si es necesario, tenemos que*

$$\sum_{k=0}^{m_n-1}\left[B(t_{k+1}^n)-B(t_k^n)\right]^2 \to b-a \quad (n\to\infty) \ \ c.s.$$

De este hecho se deduce que para todo $0<\gamma<2$

$$\sup_P \sum_{k=0}^{m_n-1}\left[B(t_{k+1}^n)-B(t_k^n)\right]^\gamma = \infty \quad c.s.$$

Probando que para casi todo $\omega$, $B(\cdot,\omega)$ no es de variación acotada y por lo tanto para casi todo $t$ no es diferenciable.

En general, usando el mismo procedimiento que en 3 del Teorema anterior, se define la variación cuadrática de un proceso arbitrario. En efecto, se tiene

Definición 1.33. *Sea $X$ un proceso en $L^2(\mathbb{P})$. Se define la* variación cuadrática *de $X$ en $[0,t]$ y se lo nota $\langle X\rangle_t$ al límite en $L^2$ (cuando existe)*

$$\langle X\rangle_t = \lim_{|P|\to 0}\sum_{k=0}^{m}[X(t_{k+1})-X(t_k)]^2$$

*donde $P:=\{0=t_0<t_1<\cdots<t_m=t\}$ es una partición arbitraria de $[0,t]$ y $|P|$ es la norma de la partición.*

**Ruido Blanco.** En muchas aplicaciones (ingeniería, física, finanzas, etc.) el tipo de ruido que se desearía usar para modelar es el denominado *ruido blanco*. Lo que se requiere de este ruido es que sea un proceso $\xi(\cdot)$ con las siguientes propiedades:

1. Las variables aleatorias $\{\xi(t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ son independientes.
2. $\xi(\cdot)$ es estacionario, es decir, dados $t_1<t_2<\cdots<t_n$, la distribución del vector aleatorio $(\xi(t+t_1),\xi(t+t_2),\ldots,\xi(t+t_n))$ no depende de $t$.
3. $\mathbb{E}[\xi(t)]\equiv 0$.

Este proceso, serviría para modelar "shocks" independientes e idénticamente distribuidos con media cero. Desafortunadamente, un proceso con tales características no existe, o mejor dicho, no puede tener trayectorias medibles a menos que sea $\xi(t)\equiv 0$. Ver el Ejercicio 6

Sin embargo, uno podría preguntarse qué propiedades debería satisfacer el proceso

$$X(t)=\int_0^t \xi(s)\,ds,$$

suponiendo que $\xi(\cdot)$ existiera (cosa que es falsa). Observemos que debería satisfacer las siguientes propiedades:

1. $X(0)=0$ $\mathbb{P}-$c.s.
2. Casi todas la trayectorias $t\mapsto X(t)$ son continuas.
3. Para $n\in\mathbb{N}$ y $t_0<t_1<\cdots<t_n$ las variables aleatorias $X(t_1)-X(t_0),\ldots,X(t_n)-X(t_{n-1})$ son independientes.
4. $\mathbb{E}[X(t)]=0$ para todo $t\geq 0$.
5. Los incrementos son estacionarios, es decir $X(t_1+t)-X(t_2+t)$ y $X(t_1)-X(t_2)$ tienen la misma distribución para todo $t\geq 0$.

El Movimiento Browniano satisface estos requerimientos. Se puede probar que si se normaliza (i.e. $\mathbb{V}(X(t))\equiv 1$), entonces el único proceso que satisface estas propiedades es el Movimiento Browniano (ver [**9**]), i.e. $X(t)=B(t)$. Esto prueba que no existe un *ruido blanco* en el sentido clásico.

## 5. Ejercicios

1. Probar que
   a) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{V}]] = \mathbb{E}[X]$.
   b) $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X|\mathcal{W}]$ si $\mathcal{W}$ es la $\sigma-$álgebra trivial, $\mathcal{W} = \{\emptyset, \Omega\}$.
2. Sean $X$ e $Y$ procesos continuos (casi todas sus trayectorias son funciones continuas) tales que $P(X(t) = Y(t)) = 1$ para todo $t \geq 0$. Entonces $X$ e $Y$ son indistinguibles.
3. a) Probar que si $B(\cdot)$ es un Movimiento Browniano $n-$dimensional, entonces también lo son
      1) $B(t+s) - B(s)$ para todo $s \geq 0$.
      2) $cB(t/c^2)$ para todo $c > 0$ ("rescale Browniano").

   b) Sea $B(\cdot)$ un Movimiento Browniano unidimensional. Mostrar que
   $$\lim_{k\to\infty} \frac{B(k)}{k} = 0 \qquad \text{casi seguramente.}$$
   Sugerencia: Fijar $\varepsilon > 0$, definir el evento $A_k := \{|\frac{B(k)}{k}| \geq \varepsilon\}$ y aplicar Borel-Cantelli.

   c) Sea $B(\cdot)$ un Movimiento Browniano unidimensional. Definimos
   $$\tilde{B}(t) := \begin{cases} tB\left(\frac{1}{t}\right) & t > 0, \\ 0 & t = 0. \end{cases}$$
   Probar que $\tilde{B}(t) - \tilde{B}(s) \sim N(0, t-s)$ para tiempos $0 \leq s < t$.

   d) Sea $\tilde{B}(\cdot)$ como en el ejercicio anterior. Usar la desigualdad de Doob para probar que $\tilde{B}(\cdot)$ es continuo en 0 casi seguramente (también tiene incrementos independientes y es por lo tanto un Movimiento Browniano).
4. Probar que para todo $0 < \gamma < 2$,
   $$\sup_P \sum_{k=0}^{m-1} [B(t_{k+1}) - B(t_k)]^\gamma = \infty \quad c.s.$$
   donde el supremo es tomado sobre todas las posibles particiones $P$ de un intervalo $[a, b]$.
5. Probar que si $X$ es un proceso absolutamente continuo (i.e. $X(t)$ es una función absolutamente continua para casi todo $\omega$, entonces $\langle X\rangle_t = 0$.
6. Si $(t, \omega) \mapsto \xi(t, \omega)$ es medible con $\mathbb{E}[\xi(t)^2] < \infty$ y $\xi(\cdot)$ es un ruido blanco, entonces para todo $t \geq 0$
   $$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \xi(s)\, ds\right)\right] = 0,$$
   y por lo tanto $\xi(t) = 0$ c.s.
7. Justificar el nombre *ruido blanco* calculando la esperanza y la varianza de los coeficientes de Fourier de $\dot{B}$ en $[0, 1]$ mediante una integración por partes formal, i.e. usando (formalmente)
   $$a_k = \int_0^1 \dot{B}(t)\sqrt{2}\sin(2\pi kt)\, dt = -\int_0^1 B(t)2\pi k\sqrt{2}\cos(2\pi kt)\, dt,$$
   y los análogos para los coeficientes del coseno. Concluir que los coeficientes son variables aleatorias i.i.d. normales estándar, luego la intensidad de cada frecuencia es igualmente fuerte.

CAPíTULO 2

# La integral de Itô

En este capítulo nos dedicaremos a la construcción de la Integral Estocástica de Itô, que es la herramienta fundamental que nos permitirá entender y definir el concepto de solución para una ecuación diferencial estocástica, y al estudio de sus propiedades. Fundamentalmente desarrollaremos lo que se conoce como el cálculo de Itô.

Queremos remarcar que éste no es el único enfoque posible. Existen otras alternativas a la integral de Itô (y al cálculo de Itô) como la integral de Stratonovich sobre la cual no haremos mención en estas notas.

En la primera sección nos dedicaremos a la construcción de la integral de Itô en $L^2$. En la Sección 2 estudiaremos algunas de sus propiedades y en la Sección 3 desarrollaremos el cálculo de Itô.

## 1. Construcción en $L^2$

Dado que sólo necesitaremos la integral de Itô con respecto al Movimiento Browniano, no la estudiaremos en su máxima generalidad (i.e. la teoría de semimartingalas). A partir de ahora trabajaremos en un espacio de probabilidades completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donde una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ se encuentra definida y satisface las *condiciones usuales*:

- $\mathcal{F}_s = \bigcap_{t>s} \mathcal{F}_t$ para todo $s \geq 0$.
- Si $A \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(A) = 0$, entonces $A \in \mathcal{F}_0$.

Si notamos por $\mathcal{B}$ a la $\sigma-$álgebra de Borel en $[0, \infty)$, el proceso $X(\cdot)$ se dice *medible* si la aplicación $(t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$ es $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}-$medible.

Decimos que $(X(t))_{t\geq 0}$ es continuo, si las trayectorias $t \mapsto X(t, \omega)$ son continuas para todo $\omega \in \Omega$. Se puede ver (cf. [**6**]) que un proceso estocástico continuo es medible (en realidad alcanza con ser continuo a derecha).

Nuestro objetivo en esta sección es definir la integral

$$\int_0^t Y(s)\, dB(s)$$

para una clase suficientemente amplia de integrandos estocásticos $Y$. Observemos que no es inmediato dar una definición de la integral estocástica, puesto que el Movimiento Browniano no es una función de variación acotada (ver Teorema 1.31 y/o Ejercicio 4 del Capítulo 1)

Por comodidad, definiremos primero las integrales infinitas $\int_0^\infty Y(s)\, dB(s)$ para luego obtener de forma inmediata las integrales sobre conjuntos acotados multiplicando por sus respectivas funciones características.

Definición 2.1. *Notamos por $V$ a la clase de procesos estocásticos $(Y(t))_{t\geq 0}$ a valores reales que son adaptados, medibles y verifican*

$$\|Y\|_V := \left( \int_0^\infty \mathbb{E}\big[Y(t)^2\big]\, dt \right)^{1|2} < \infty.$$

DEFINICIÓN 2.2. *Un proceso $Y \in V$ se dice* simple *si es de la forma*

$$Y(t,\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i(\omega) \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t),$$

*para una sucesión creciente $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y variables aleatorias $\mathcal{F}_{t_i}-$medibles $\eta_i$.*

DEFINICIÓN 2.3. *Para un proceso simple $Y \in V$ definimos*

$$\int_0^{\infty} Y(t)\, dB(t) := \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)). \tag{2.1}$$

Veamos que (2.1) es una buena definición sobre los procesos simples.

PROPOSICIÓN 2.4. *La serie en* (2.1) *converge en $L^2(\mathbb{P})$, en consecuencia la integral*

$$\int_0^{\infty} Y(t)\, dB(t)$$

*es una variable aleatoria bien definida $\mathbb{P}-$casi seguramente. Más aún, se tiene la siguiente isometría:*

$$\mathbb{E}\left[\Big(\int_0^{\infty} Y(t)\, dB(t)\Big)^2\right] = \|Y\|_V^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Mostraremos que las sumas parciales $S_k := \sum_{i=0}^{k} \eta_i (B(t_{i+1}) - B(t_i))$ forman una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{P})$.

Sean $k \le l$, entonces por la propiedad de independencia de los incrementos y dado que los mismos tienen esperanza cero, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[(S_l - S_k)^2\big] &= \sum_{i=k+1}^{l} \mathbb{E}\big[(\eta_i(B(t_{i+1}) - B(t_i)))^2\big] \\
&\quad + 2 \sum_{k+1\le i<j\le l} \mathbb{E}\big[\eta_i(B(t_{i+1}) - B(t_i))\eta_j\big]\mathbb{E}\big[B(t_{j+1}) - B(t_j)\big] \\
&= \sum_{i=k+1}^{l} \mathbb{E}\big[(\eta_i(B(t_{i+1}) - B(t_i)))^2\big] \\
&= \sum_{i=k+1}^{l} \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[\eta_i^2(B(t_{i+1}) - B(t_i))^2\big]\Big|\mathcal{F}_{t_i}\Big] \\
&= \sum_{i=k+1}^{l} \mathbb{E}\Big[\eta_i^2\mathbb{E}\big[(B(t_{i+1}) - B(t_i))^2\big]\Big|\mathcal{F}_{t_i}\Big] \\
&= \sum_{i=k+1}^{l} \mathbb{E}\big[\eta_i^2\big](t_{i+1} - t_i) \\
&= \int_{t_{k+1}}^{t_l} \mathbb{E}\big[Y(t,\omega)^2\big]\, dt.
\end{aligned}$$

Como $\|Y\|_V < \infty$ la última línea tiende a cero cuando $k, l \to \infty$. Luego, por la completitud de $L^2(\mathbb{P})$, la integral de Itô de $Y$ está bien definida como el límite en $L^2(\mathbb{P})$ de la sucesión $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

El mismo cálculo muestra

$$\mathbb{E}\big[S_k^2\big] = \int_0^{t_k} \mathbb{E}\big[Y(t,\omega)^2\big]\,dt.$$

Tomando ahora límite $k \to \infty$ a ambos lados se obtiene la isometría. $\square$

La idea principal para extender la integral de Itô a integrandos generales en $V$ es mostrar que los procesos simples son densos en $V$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_V$ y usar la isometría para definir la integral por aproximación.

Proposición 2.5. *Dado $Y \in V$ existe una sucesión de procesos simples $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ tales que $\|Y - Y_n\|_V \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Haremos la demostración en etapas.

1. Supongamos que $Y$ es continuo, $|Y(t)| \le K$ para $t \le T$ e $Y(t) = 0$ para $t \ge T$.

Fijemos $t_i^n := \frac{i}{n}$ y definamos

$$Y_n(t) := \sum_{i=0}^{Tn-1} Y(t_i^n)\mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n)}(t).$$

Luego $Y_n$ es claramente un proceso simple en $V$, $\mathcal{F}_t-$medible y por la continuidad de $Y(t)$ los procesos $Y_n$ convergen a $Y$ puntualmente para todo $(t,\omega)$.

Como $\|Y_n\|_V^2 \le TK^2$, el Teorema de Convergencia Mayorada implica

$$\lim_{n\to\infty} \|Y - Y_n\|_V = 0.$$

2. Supongamos ahora $|Y(t)| \le K$ para $t \le T$ e $Y(t) = 0$ para $t \ge T$.

En este caso es fácil ver que $Y$ puede ser aproximado por procesos continuos $Y_n$ con las mismas propiedades (reemplazando $T$ por $T+1$). En efecto, sea $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ continua tal que $h(t) = 0$ para $t \ge 1$ y $\int_0^\infty h(s)\,ds = 1$. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos la convolución

$$Y_n(t) := \int_0^t Y(s)\frac{1}{n}h(n(t-s))\,ds.$$

Luego $Y_n$ es continua, tiene soporte en $[0, T + \frac{1}{n}]$ y verifica $|Y_n(t)| \le K$ para todo $\omega$.

Más aún, $Y_n(t)$ es $\mathcal{F}_t-$medible, luego $Y_n \in V$.

Es ahora un ejercicio de Teoría de la Medida (ver [**14**]) verificar que

$$\int_0^\infty (Y_n(t) - Y(t))^2\,dt \to 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

para todo $\omega \in \Omega$. Luego, la afirmación sigue del Teorema de Convergencia Mayorada.

3. Finalmente, sea $Y \in V$ arbitrario. El proceso

$$Y_n(t) := \begin{cases} 0, & t \ge n \\ Y(t), & |Y(t)| \le n,\ t < n \\ n, & Y(t) > n \\ -n, & Y(t) < -n \end{cases}$$

está en las hipótesis del caso anterior con $T = K = n$. Más aún, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $Y$ y verifica

$$|Y_n(t,\omega)| \le |Y(t,\omega)|$$

para todo $\omega \in \Omega$. Luego el Teorema de Convergencia Mayorada nos da

$$\lim_{n\to\infty} \|Y - Y_n\|_V = 0.$$

La suma de 1, 2 y 3 nos da el resultado deseado. $\square$

La completitud de $L^2(\mathbb{P})$ y la isometría de la Proposición 2.4 implican que la siguiente definición de la integral de Itô tiene sentido. En particular, no depende de la elección de la sucesión aproximante.

DEFINICIÓN 2.6. *Dado $Y \in V$, se define la integral de Itô de $Y$ con respecto al Movimiento Browniano $B$ como*

$$\int_0^\infty Y(t)\, dB(t) := \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty Y_n(t)\, dB(t),$$

*donde $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ es una sucesión de procesos simples tales que $\lim_{n\to\infty} \|Y - Y_n\|_V = 0$. El límite en la definición de la integral, se entiende en sentido $L^2(\mathbb{P})$.*

*Para $0 \le a \le b$ e $Y \in V$ se define*

$$\int_a^b Y(t)\, dB(t) := \int_0^\infty Y(t)\mathbf{1}_{[a,b]}(t)\, dB(t).$$

## 2. Propiedades y extensiones de la integral de Itô

Empezaremos esta sección recopilando algunas propiedades básicas de la integral de Itô, sin dar detalles de las pruebas. Las mismas son, en su mayor parte, inmediatas para integrandos simples y por aproximación para el caso general.

TEOREMA 2.7. *Sean $X$, $Y$ dos procesos en $V$. Entonces*

1. $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty X(t)\, dB(t)\right)^2\right] = \|X\|_V^2$ *(Isometría de Itô).*
2. $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty X(t)\, dB(t) \int_0^\infty Y(t)\, dB(t)\right] = \int_0^\infty \mathbb{E}[X(t)Y(t)]\, dt.$
3. $\int_a^c X(t)\, dB(t) = \int_a^b X(t)\, dB(t) + \int_b^c X(t)\, dB(t)$, $\mathbb{P}-$*c.s.* $\forall\ 0 \le a \le b \le c$.
4. $\int_0^\infty (cX(t) + Y(t))\, dB(t) = c\int_0^\infty X(t)\, dB(t) + \int_0^\infty Y(t)\, dB(t)$, $\mathbb{P}-$*c.s.* $\forall\ c \in \mathbb{R}$.
5. $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty X(t)\, dB(t)\right] = 0.$
6. $\int_0^t X(s)\, dB(s)$ *es $\mathcal{F}_t-$medible para $t \ge 0$.*
7. $\left(\int_0^t X(s)\, dB(s)\right)_{t\ge 0}$ *es una $\mathcal{F}_t-$martingala.*
8. $\left(\int_0^t X(s)\, dB(s)\right)_{t\ge 0}$ *tiene una versión continua.*
9. *Si $X$ es de variación acotada,* $X(t)B(t) = \int_0^t X(s)\, dB(s) + \int_0^t B(s)\, dX(s)$, $\mathbb{P}-$*c.s.*

Para una demostración de este teorema y otras propiedades interesantes (y útiles!) sugerimos [**9**] y [**6**].

Ahora, intentaremos extender la integral de Itô a una clase de integrandos más general, la clase $V^*$.

DEFINICIÓN 2.8. *Definimos la clase $V^*$ como la clase de procesos estocásticos a valores reales $(Y(t))_{t\geq 0}$ que son adaptados, medibles y satisfacen*

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^\infty Y(t)^2\,dt < \infty\Big) = 1.$$

TEOREMA 2.9. *Para $Y \in V^*$ y $n \in \mathbb{N}$ consideramos el tiempo de parada (a valores en $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$)*

$$\tau_n(\omega) := \inf\Big\{t \geq 0 \,/\, \int_0^t Y(s,\omega)^2\,ds \geq n\Big\}.$$

*Entonces* $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ $\mathbb{P}-$*c.s. y*

$$\int_0^\infty Y(t)\,dB(t) := \lim_{n\to\infty} \int_0^{\tau_n} Y(t)\,dB(t)$$

*existe como límite en probabilidad. Más precisamente, tenemos ($\mathbb{P}-$c.s.)*

$$\int_0^\infty Y(t)\,dB(t) = \int_0^{\tau_n} Y(t)\,dB(t) \quad \text{en } \Big\{\omega \,\Big|\, \int_0^\infty Y(t,\omega)^2\,dt < n\Big\}.$$

DEMOSTRACIÓN. En el evento $\Omega_N := \{\omega \mid \int_0^\infty Y(t)^2\,dt < N\}$, tenemos $\tau_n = \infty$ para todo $n \geq N$. Luego, como por hipótesis se tiene que $\mathbb{P}(\cup_N \Omega_N) = 1$, la primera afirmación queda demostrada.

Sea ahora $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{P}(\cup_{n=1}^N \Omega_n) \geq 1 - \varepsilon$. Entonces, con probabilidad al menos $1 - \varepsilon$ se tiene que las variables $\int_0^{\tau_n} Y(t)\,dB(t)$ son constantes para $n \geq N$, esto implica que estas variables aleatorias forman una sucesión de Cauchy con respecto a la convergencia en probabilidad. Por completitud, el límite existe.

La última afirmación es evidente de la construcción. □

Veamos ahora, como aplicación de la desigualdad $L^p$ de Doob (Teorema 1.30) que si $X \in V$ entonces el proceso $\int_0^t X(s)\,dB(s)$ siempre tiene una versión continua.

PROPOSICIÓN 2.10. *Dado $X \in V$ existe una versión de $\int_0^t X(s)\,dB(s)$ que es continua. Es decir, un proceso continuo $(J(t))_{t\geq 0}$ tal que*

$$\mathbb{P}\Big(J(t) = \int_0^t X(s)\,dB(s)\Big) = 1 \text{ para todo } t \geq 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de procesos simples en $V$ que aproximan $X$. Por definición, se tiene que

$$I_n(t) := \int_0^t X_n(s)\,dB(s)$$

es continuo en $t$ para todo $\omega$. Más aún, $I_n(t)$ es una $\mathcal{F}_t-$martingala y entonces, por la desigualdad de Doob (Teorema 1.30, 2) y la isometría de Itô, obtenemos

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} |I_m(t) - I_n(t)|^2\right] \leq 4 \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|I_m(t) - I_n(t)|^2] = 4\|X_m - X_n\|_V^2 \to 0$$

para $m, n \to \infty$.

Usando ahora la desigualdad de Chebyshev, obtenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k$ tal que

$$\mathbb{P}\big(\sup_{t\geq 0} |I_m(t) - I_n(t)| > 2^{-k}\big) \leq 2^{-k}$$

para $n, m \geq n_k$. Ahora, por el Lema de Borel-Cantelli, tenemos que

$$\mathbb{P}\big(\sup_{t\geq 0} |I_{n_{k+1}}(t) - I_{n_k}(t)| > 2^{-k}, \text{ infinitas veces}\big) = 0,$$

luego existe $K = K(\omega)$ tal que, $\mathbb{P}-$c.s.

$$\sup_{t\geq 0} |I_{n_{k+1}}(t) - I_{n_k}(t)| \leq 2^{-k} \quad \forall\, k \geq K.$$

Es decir, con probabilidad uno, la sucesión $(I_{n_k}(t))_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente y el límite $J(t)$ es continuo para todo $\omega$.

Finalmente, como para todo $t \geq 0$ las variables aleatorias $(I_{n_k}(t))_{k\in\mathbb{N}}$ convergen en probabilidad a la integral

$$I(t) = \int_0^t X(s)\, dB(s),$$

las variables $I(t)$ y $J(t)$ deben coincidir $\mathbb{P}-$c.s. □

Para terminar esta sección, veamos como se extiende la integral de Itô al caso multidimensional.

Definición 2.11. *Si $Y$ es un proceso a valores en $\mathbb{R}^{d\times m}$ tal que cada componente $Y_{ij}$, $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq m$ es un elemento de $V^*$ y $B(t) = (B_1, \ldots, B_m(t))^T$ es un Movimiento Browniano $m-$dimensional, se define la integral de Itô multidimensional*

$$\int_0^\infty Y(t)\, dB(t)$$

*como el proceso estocástico a valores en $\mathbb{R}^d$ dado por*

$$\left(\int_0^\infty Y(t)\, dB(t)\right)_i := \sum_{j=1}^m \int_0^\infty Y_{ij}(t)\, dB_j(t), \qquad 1 \leq i \leq d.$$

Veamos que la isometría de Itô se extiende a este caso.

Proposición 2.12. *Sean $X$ e $Y$ dos procesos estocásticos a valores en $\mathbb{R}^{d\times m}$ con componentes en $V$ y sea $B$ un Movimiento Browniano $m-$dimensional. Se verifica*

$$\mathbb{E}\left[\Big\langle \int_0^\infty X(t)\, dB(t), \int_0^\infty Y(t)\, dB(t)\Big\rangle\right] = \int_0^\infty \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m \mathbb{E}[X_{ij}(t) Y_{ij}(t)]\, dt.$$

Demostración. Si desarrollamos el término entre corchetes del lado izquierdo de la igualdad, obtenemos

$$\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \int_0^\infty X_{ij}(t)\, dB_j(t) \int_0^\infty Y_{ik}(t)\, dB_k(t).$$

Luego, el resultado es una consecuencia de la isometría de Itô unidimensional y del hecho de que las integrales estocásticas con respecto a movimientos Brownianos independientes son no-correlacionadas (aunque bien pueden ser dependientes).

Faltaría demostrar esta última afirmación. Para esto consideremos dos movimientos Brownianos independientes $B_1$ y $B_2$ y dos procesos simples $Y_1$ e $Y_2$ en $V$,

$$Y_j(t) = \sum_{i=0}^\infty \eta_{ij}(\omega) \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t), \quad j = 1, 2.$$

Observemos que siempre podemos suponer que ambos procesos simples tienen la misma partición del eje temporal tomando como nueva partición la unión de las dos particiones originales.

Luego, usando la $\mathcal{F}_t-$medibilidad de $\eta_{ij}$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\int_0^\infty & Y_1(t)\,dB_1(t)\int_0^\infty Y_2(t)\,dB_2(t)\Big] \\
&= \sum_{0\le i\le j<\infty} \mathbb{E}\big[\eta_{i1}\eta_{i2}(B_1(t_{i+1})-B_1(t_i))(B_2(t_{j+1})-B_2(t_j))\big] \\
&\quad + \sum_{0\le j<i<\infty} \mathbb{E}\big[\eta_{i1}\eta_{i2}(B_1(t_{i+1})-B_1(t_i))(B_2(t_{j+1})-B_2(t_j))\big] \\
&= \sum_{0\le i\le j<\infty} \mathbb{E}\big[\eta_{i1}\eta_{i2}(B_1(t_{i+1})-B_1(t_i))\big]\mathbb{E}\big[(B_2(t_{j+1})-B_2(t_j))\big] \\
&\quad + \sum_{0\le j<i<\infty} \mathbb{E}\big[\eta_{i1}\eta_{i2}(B_1(t_{i+1})-B_1(t_i))\big]\mathbb{E}\big[(B_2(t_{j+1})-B_2(t_j))\big] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

A partir de esto, el resultado se concluye usando la densidad de los procesos simples en $V$. □

## 3. Fórmula de Itô

En esta sección daremos los rudimentos básicos del *Cálculo de Itô*. En general sólo daremos las ideas principales de las demostraciones y referimos a los libros **[6]** ó **[9]** para las pruebas completas.

Teorema 2.13 (Cálculo de Itô). *Sea $H \in V^*$ y sea $(G(t))_{t\ge 0}$ un proceso adaptado que verifica $\int_0^t |G(s)|\,ds < \infty$, $\mathbb{P}-$c.s. para todo $t > 0$. Definimos*

$$X(t) := \int_0^t G(s)\,ds + \int_0^t H(s)\,dB(s), \qquad t \ge 0. \tag{2.2}$$

*Sea $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y definimos el proceso $Y(t) = u(t, X(t))$. Entonces $Y$ verifica*

$$
\begin{aligned}
Y(t) =& Y(0) + \int_0^t \Big(\frac{\partial u}{\partial t}(s,X(s)) + \frac{\partial u}{\partial x}(s,X(s))G(s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s,X(s))H^2(s)\Big)\,ds \\
&+ \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s,X(s))H(s)\,dB(s), \qquad t \ge 0.
\end{aligned}
$$

Observación 2.14. *La forma más usual en que suele verse (y aplicarse!) el Cálculo de Itô es en su forma diferencial. Si $X$ es el proceso definido por (2.2), decimos que $X$ tiene diferencial*

$$dX = G\,dt + H\,dB.$$

*Luego, lo que dice el Cálculo de Itô es que si definimos un nuevo proceso $Y$ como $Y(t) = u(t, X(t))$, $Y$ tiene diferencial*

$$dY = (u_t + u_x G + \frac{1}{2}u_{xx}H^2)\,dt + u_x H\,dB.$$

*Es decir, con respecto al cálculo tradicional "aparece" un término adicional $\frac{1}{2}u_{xx}H^2\,dt$. La aparición de este término puede explicarse informalmente como sigue:*

*Si asumimos que $dB \approx (dt)^{1/2}$ (es decir que la variación cuadrática de $B$ es $t$, comparar con el punto 3 del Teorema 1.31) y hacemos el desarrollo de Taylor de $Y(t) = u(t, X(t))$ a segundo orden, nos queda*

$$dY = u_t\,dt + u_x\,dX + \frac{1}{2}u_{xx}\,(dX)^2.$$

*Ahora,*

$$(dX)^2 = (G\,dt + H\,dB)^2 = G^2\,(dt)^2 + 2GH\,dtdB + H^2\,(dB)^2 \sim H^2\,dt$$

*despreciando los términos de orden superior a $dt$. Reemplazando en la expresión para $dY$ se obtiene lo deseado. La demostración del teorema consiste en hacer rigurosas estas ideas.*

Demostración. Daremos sólo las ideas más importantes y asumiremos que $u$, $u_x$, $u_{xx}$ y $u_t$ son acotadas.

Sea $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ una partición del intervalo $[0, t]$. Aplicando la fórmula de Taylor,

$$\begin{aligned} u(t, X(t)) =& u(0, X(0)) + \sum_{k=0}^{n-1} \big(u(t_{k+1}, X(t_{k+1})) - u(t_k, X(t_k))\big) \\ =& u(0, X(0)) + \sum_{k=0}^{n-1} \Big(u_t \Delta t_k + u_x \Delta X(t_k) \\ &+ \frac{1}{2} u_{xx} (\Delta X(t_k))^2 + o(\Delta t_k) + O(\Delta t_k \, \Delta X(t_k)) + o((\Delta X(t_k))^2)\Big), \end{aligned}$$

donde las derivadas están evaluadas en $(t_k, X(t_k))$ y hemos fijado $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ y $\Delta X(t_k) = X(t_{k+1}) - X(t_k)$.

Si hacemos tender a cero la norma de la partición $|P|$ obtenemos, por definición de la integral de Riemann,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_t \Delta t_k \to \int_0^t u_t(s, X(s)) \, ds$$

y de la igualdad $\Delta X(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} G(s) \, ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} H(s) \, dB(s)$ y de la construcción de la integral de Itô,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_x \Delta X(t_k) \to \int_0^t u_x(s, X(s)) G(s) \, ds + \int_0^t u_x(s, X(s)) H(s) \, dB(s),$$

con convergencia en $L^2(\mathbb{P})$.

El tercer término converge a la variación cuadrática del proceso y usando que una función absolutamente continua tiene variación cuadrática cero se obtiene (esta es la parte más complicada de la demostración, para los detalles, ver **[12]** o **[6]**)

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{xx} (\Delta X(t_k))^2 \to \int_0^t u_{xx}(s, X(s)) H^2(s) \, ds.$$

Los términos restantes tienden a cero, debido a la variación finita de $\int_0^\cdot G(s) \, ds$ y a la variación cuadrática finita de $\int_0^\cdot H(s) \, dB(s)$, que implica que las respectivas derivadas de mayor orden se anulan. $\square$

Tenemos también, la versión $n-$dimensional.

Teorema 2.15. *Sea $(H(t))_{t \geq 0}$ un proceso estocástico a valores en $\mathbb{R}^{d \times m}$ con componentes en $V^*$ y un proceso adaptado $(G(t))_{t \geq 0}$ a valores en $\mathbb{R}^d$ con $\int_0^t \|G(s)\| \, ds < \infty$, $\mathbb{P}-$c.s. para todo $t > 0$. Definimos*

$$X(t) := \int_0^t G(s) \, ds + \int_0^t H(s) \, dB(s), \qquad t \geq 0,$$

*donde $B$ es un Movimiento Browniano $m-$dimensional. Entonces si $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^p)$ y definimos $Y(t) := u(t, X(t))$, se verifica*

$$\begin{aligned} Y(t) =& Y(0) + \int_0^t \Big( u_t(s, X(s)) + D_x u(s, X(s)) G(s) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} u_{x_i x_j}(s, X(s)) \big( \sum_{i=1}^{m} H_{il}(s) H_{jl}(s) \big) \Big) \, ds \\ &+ \int_0^t D_x u(s, X(s)) H(s) \, dB(s), \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

*donde $D_x u = (\partial_{x_i} u_j)_{1 \leq i \leq d,\, 1 \leq j \leq p}$ es el Jacobiano de $u$.*

## 4. Ejercicios

1. Sea $P^n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{k_n}^n = T\}$ una partición de $[0, T]$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ fijo. Definimos las sumas de Riemann
$$R_n^\lambda := \sum_{j=0}^{k_n} B(\tau_j^n)(B(t_{j+1}^n) - B(t_j^n)), \qquad \tau_j^n := (1-\lambda) t_j^n + (1-\lambda) t_{j+1}^n.$$
Entonces
$$\lim_{n \to \infty} R_n^\lambda = \frac{B(T)^2}{2} + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) T, \qquad \text{en } L^2(\Omega).$$
En particular, si permitimos elegir arbitrariamente $\tau_j^n$, $R_n$ no tiene límite.
2. Probar que
$$\int_0^t B^2 \, dB = \frac{1}{3} B(t)^3 - \int_0^t B(s) \, ds.$$
3. Probar que si $G, H \in V$, entonces
$$E\left( \int_0^T G \, dB \int_0^T H \, dB \right) = E\left( \int_0^T GH \, dt \right).$$
4. Usar la fórmula de Itô para probar que $Y(t) := e^{\frac{t}{2}} \cos(B(t))$ es una martingala. (Usar el hecho de que si $G \in V$ entonces $I(t) := \int_0^t G \, dB$ es una Martingala.)
5. Sea $B$ un proceso de Wiener. Calcular $d(B^m)$, $m \geq 1$.
6. Sea $B(\cdot) = (B^1, \ldots, B^n)$ un Movimiento Browniano $n-$dimensional, y sea $Y(t) := |B(t)|^2 - nt$ para tiempos $t \geq 0$. Mostrar que $Y(\cdot)$ es una martingala. Sugerencia: Calcular $dY$.

CAPíTULO 3

# Ecuaciones diferenciales estocásticas

En este capítulo estudiaremos, finalmente, ecuaciones diferenciales estocásticas ordinarias. Comenzaremos definiendo el concepto de solución que usaremos en estas notas (solución fuerte) y luego nos dedicaremos a demostrar los teoremas fundamentales de la teoría, es decir, los teoremas de existencia y unicidad de estas soluciones para una clase suficientemente amplia de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas Ordinarias.

## 1. Soluciones fuertes

El concepto de solución más simple que puede darse para una Ecuación Diferencial Ordinaria Estocástica es el de solución fuerte. Este concepto es el que desarrollaremos en estas notas y es suficiente para los propósitos que buscamos en este curso. Cabe destacar que existen otros conceptos de soluciones más flexibles y que aplican a situaciones más generales. Para una discusión detallada sobre estos temas, referimos a [**6**].

DEFINICIÓN 3.1. *Una* solución fuerte $X$ *de la ecuación diferencial estocástica*

$$dX(t) = b(t, X(t))\, dt + \sigma(t, X(t))\, dB(t), \qquad t \geq 0 \tag{3.1}$$

*donde* $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$ *son medibles, en el espacio de probabilidades* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *con respecto al Movimiento Browniano* $m-$*dimensional* $B$ *y la condición inicial* $X_0$ *sobre este espacio de probabilidades independiente de* $B$ *es un proceso estocástico* $(X(t))_{t\geq 0}$ *que satisface:*

1. $X$ *es adaptado a la filtración* $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$*, donde* $\mathcal{G}_t^0 := \sigma(B(s),\ 0 \leq s \leq t) \vee \sigma(X_0)$ *y* $\mathcal{G}_t$ *es la completación de* $\cap_{s<t}\mathcal{G}_s^0$ *con lo conjuntos* $\mathbb{P}-$*nulos.*
2. $X$ *es un proceso continuo.*
3. $\mathbb{P}(X(0) = X_0) = 1$.
4. $\mathbb{P}(\int_0^t |b(s, X(s))| + |\sigma(s, X(s))|^2\, ds < \infty) = 1$ *para todo* $t > 0$.
5. *Con probabilidad 1, se tiene*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s, X(s))\, ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))\, dB(s), \qquad \forall\ t \geq 0.$$

A lo largo de este capítulo, usaremos la notación $|\cdot|$ para denotar, tanto la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$, como la norma de una matriz de $\mathbb{R}^{d\times n}$ (norma de operador).

OBSERVACIÓN 3.2. *A la función* $b(t, x)$ *se la llama usualmente la* deriva *(en inglés* drift*) y a* $\sigma(t, x)$ *se la llama* difusión *(en inglés* diffusion*).*

OBSERVACIÓN 3.3. *Se puede ver ([**6**], Sección 2.7) que la completación de la filtración de un Movimiento Browniano es continuo a derecha. Es decir que* $\mathcal{G}_t$ *coincide con la completación de* $\mathcal{G}_t^0$*.*

Veamos ahora la noción de unicidad. Diremos que (3.1) tiene la propiedad de unicidad fuerte si y sólo si la construcción de solución fuerte es única sobre cualquier espacio de probabilidades que posee los elementos $B$ y $X_0$ donde $X_0$ es una condición inicial arbitraria. Más precisamente, tenemos:

DEFINICIÓN 3.4. *Decimos que la ecuación* (3.1) *tiene* unicidad fuerte*, o que el par* $(b, \sigma)$ *tiene* unicidad fuerte*, si para todo espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *que posee un Movimiento Browniano* $B$ *y una variable aleatoria independiente* $X_0$*, dos soluciones fuertes cualesquiera* $X$ *y* $X'$ *de* (3.1) *con condición inicial* $X_0$ *verifican*

$$\mathbb{P}(X(t) = X'(t),\ \forall\, t \geq 0) = 1.$$

OBSERVACIÓN 3.5. *Como una solución fuerte de* (3.1) *es, por definición, un proceso continuo, es suficiente verificar la siguiente condición, en principio, más débil como vimos en el Capítulo 1.*

$$\mathbb{P}(X(t) = X'(t)) = 1, \qquad \forall\, t \geq 0,$$

*en la definición anterior.*

## 2. Teoremas de unicidad

En esta sección enunciaremos y demostraremos los teoremas de unicidad fuerte para la ecuación (3.1). Para ilustrar los resultados, comencemos con un ejemplo.

Consideremos la ecuación unidimensional

$$dX(t) = b(t, X(t))\, dt + dB(t),$$

con $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible Borel, acotada y decreciente en la segunda variable. Entonces esta ecuación verifica el principio de unicidad fuerte.

En efecto, supongamos que se tienen $X$ y $X'$ dos soluciones fuertes en algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Entonces el proceso $Y(t) := (X(t) - X'(t))^2$ verifica, por Itô,

$$dY(t) = 2(X(t) - X'(t))(dX(t) - dX'(t)) = 2(X(t) - X'(t))(b(t, X(t)) - b(t, X'(t))) \leq 0, \text{ c.s.}$$

Como $Y(0) = (X(0) - X'(0))^2 = 0$ sigue que $Y(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

Observemos que aún en el caso deterministico existen ejemplos elementales de no unicidad de soluciones. Por ejemplo la ecuación

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = |x(t)|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \\ &x(0) = 0 \end{aligned}$$

tiene la familia de soluciones $(\tau \geq 0)$

$$x_\tau(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1-\alpha}(t - \tau)\right)^{1/(1-\alpha)} & \text{si } t \geq \tau \\ 0 & \text{si } t < \tau. \end{cases}$$

La condición usual que garantiza unicidad en el caso determinístico es la continuidad Lipschitz del segundo miembro. Para ecuaciones estocásticas la misma condición es suficiente.

Comencemos por recordar el clásico Lema de Gronwall.

LEMA 3.6 (Lema de Gronwall). *Sea* $T > 0$*,* $c \geq 0$ *y* $u, v : [0, T] \to \mathbb{R}_+$ *funciones medibles. Asumamos que* $u$ *es acotada y* $v$ *es integrable. Si se tiene que*

$$u(t) \leq c + \int_0^t u(s)v(s)\, ds, \qquad \forall\, t \in [0, T],$$

*entonces*

$$u(t) \leq c \exp\Big(\int_0^t v(s)\,ds\Big).$$

Demostración. La demostración es clásica. Se puede ver en cualquier texto de ecuaciones diferenciales, como por ejemplo [**1**]. □

Teorema 3.7. *Supongamos que $b$ y $\sigma$ son localmente Lipschitz continuas en la variable espacial, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una constante $K_n > 0$ tal que para todo $t \geq 0$ y todo $x, y \in \mathbb{R}^d$ con $|x|, |y| \leq n$ se tiene*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K_n |x-y|.$$

*Entonces el principio de unicidad fuerte vale para* (3.1)

Demostración. Sean $X$ y $X'$ dos soluciones de (3.1) con misma condición inicial $X_0$ en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definimos los siguientes tiempos de parada

$$\tau_n := \text{ínf}\{t > 0 \mid |X(t)| \geq n\}, \qquad \tau'_n := \text{ínf}\{t > 0 \mid |X'(t)| \geq n\}$$

para $n \in \mathbb{N}$. Entonces, si $\tau_n^* := \tau_n \wedge \tau'_n$, tenemos que $\tau_n^* \to \infty$ cuando $n \to \infty$, $\mathbb{P}-$c.s.

Ahora

$$\begin{aligned} X(t \wedge \tau_n^*) - X'(t \wedge \tau_n^*) = &\int_0^{t \wedge \tau_n^*} \big(b(s, X(s)) - b(s, X'(s))\big)\,ds \\ &+ \int_0^{t \wedge \tau_n^*} \big(\sigma(s, X(s)) - \sigma(s, X'(s))\big)\,dB(s). \end{aligned}$$

Usando ahora la isometría de Itô, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la Lipschitzianidad local de $b$ y $\sigma$ se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[|X(t \wedge \tau_n^*) - X'(t \wedge \tau_n^*)|^2\big] \leq &2\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^{t \wedge \tau_n^*} |b(s, X(s)) - b(s, X'(s))|\,ds\Big)^2\Big] \\ &+ 2\int_0^t \mathbb{E}[|\sigma(s, X(s)) - \sigma(s, X'(s))|^2 \mathbf{1}_{[0, t \wedge \tau_n^*]}]\,ds \\ \leq &2TK_n^2 \int_0^t \mathbb{E}\big[|X(s \wedge \tau_n^*) - X'(s \wedge \tau_n^*)|^2\big]\,ds \\ &+ 2K_n^2 \int_0^t \mathbb{E}\big[|X(s \wedge \tau_n^*) - X'(s \wedge \tau_n^*)|^2\big]\,ds. \end{aligned}$$

Luego, por el Lema de Gronwall, concluimos que

$$\mathbb{E}\big[|X(t \wedge \tau_n^*) - X'(t \wedge \tau_n^*)|^2\big] = 0, \qquad \forall\, t \in [0, T \wedge \tau_n^*].$$

Haciendo primero $n \to \infty$ y después $T \to \infty$ se deduce que

$$\mathbb{P}(X(t) = X'(t)) = 1, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

El teorema queda entonces demostrado gracias a la observación 3.5. □

## 3. Teoremas de Existencia

En la teoría determinística de ecuaciones diferenciales ordinarias, usualmente se prueba la existencia de soluciones para tiempos pequeños bajo la hipótesis de que el segundo miembro sea localmente Lipschitz. En la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas, resulta más conveniente resolver primero la ecuación globalmente (con hipótesis de Lipschitzianidad global) y luego usar un argumento de aproximación con tiempos de parada para resolver la EDO hasta un tiempo de explosión estocástico.

Estableceremos primero un teorema de existencia bajo hipótesis fuertes sobre el crecimiento de las funciones $b$ y $\sigma$ y luego iremos debilitando esas suposiciones.

TEOREMA 3.8. *Supongamos que los coeficientes $b$ y $\sigma$ verifican las siguientes hipótesis de crecimiento lineal y Lipscitzianidad global:*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0 \tag{3.2}$$

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K(1+|x|), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0, \tag{3.3}$$

*para alguna constante $K > 0$. Más aún, supongamos que en algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ existe un Movimiento Browniano $m-$dimensional $B$ y una condición inicial $X_0$ con $\mathbb{E}[|X_0|^2] < \infty$.*

*Entonces existe una solución fuerte de* (3.1) *con condición inicial $X_0$ en este espacio de probabilidad. Además se tiene que esta solución $X$ verifica*

$$\mathbb{E}[|X(t)|^2] \leq C(1 + \mathbb{E}[|X_0|^2])e^{Ct^2}, \qquad t \geq 0,$$

*para alguna constante $C > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración usa la misma estrategia que el caso determinístico. Se construyen aproximaciones sucesivas y luego se usa el Teorema de Punto Fijo de Banach para demostrar la convergencia de la sucesión.

Más precisamente, se definen de manera inductiva:

$$X^0(t) := X_0, \qquad t \geq 0, \tag{3.4}$$

$$X^{n+1}(t) := X_0 + \int_0^t b(s, X^n(s))\, ds + \int_0^t \sigma(s, X^n(s))\, dB(s), \qquad t \geq 0. \tag{3.5}$$

De la misma definición, sigue que los procesos $(X^n(t))_{t\geq 0}$ son continuos y adaptados a la filtración generada por $X_0$ y $(B(t))_{t\geq 0}$.

Sea $T > 0$. Afirmamos que, para todo $t \in [0, T]$, se tiene

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq s\leq t} |X^{n+1}(s) - X^n(s)|^2\Big] \leq C_1 \frac{(C_2 t)^n}{n!} \tag{3.6}$$

para ciertas constantes $C_1, C_2 > 0$ independientes de $t$ y de $n$ y $C_2 = O(T)$.

Veamos que (3.6) implica el resultado deseado. En efecto, de la desigualdad de Chebyshev, se obtiene

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq s\leq T} |X^{n+1}(s) - X^n(s)| > 2^{-n-1}\Big) \leq 4C_1 \frac{(4C_2T)^n}{n!}.$$

El término de la derecha es sumable sobre $n$, luego por el Lema de Borel–Cantelli, concluimos

$$\mathbb{P}\Big(\text{para infinitos } n : \sup_{0\leq s\leq T} |X^{n+1}(s) - X^n(s)| > 2^{-n-1}\Big) = 0.$$

Luego, dado $\omega \in \Omega$, existe $N = N(\omega)$ variable aleatoria finita $\mathbb{P}-$c.s., tal que

$$\sup_{m\geq 1} \sup_{0\leq s\leq T} |X^{n+m}(s) - X^n(s)| \leq 2^{-n},$$

para todo $n \geq N(\omega)$. En particular, $(X^n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ forma una sucesión de Cauchy $\mathbb{P}-$c.s. y converge a un límite $X(s)$, $s \in [0,T]$. Obviamente, el límite $X$ no depende de $T$ y por ende está definido en $\mathbb{R}_+$.

Como la convergencia es uniforme, $X(t)$ es continuo y como los procesos $X^n$ son adaptados, sigue que $X$ lo es.

Tomando límite en la ecuación (3.5), se ve que $X$ es solución de la ecuación diferencial estocástica (3.1) hasta el tiempo $T$, puesto que

$$\sup_{0\leq s\leq T} |b(s,X^n(s),s) - b(s,X(s))| \leq K \sup_{0\leq s\leq T} |X^n(s) - X(s)| \to 0 \text{ (en } L^2(\mathbb{P})),$$
$$\mathbb{E}\Big[|\sigma(\cdot,X^n(\cdot)) - \sigma(\cdot,X(\cdot))|^2_{V([0,T])}\Big] \leq K^2 T \sup_{0\leq s\leq T} \mathbb{E}\Big[|X^n(s) - X(s)|^2\Big] \to 0.$$

Finalmente, de (3.6), sumando sobre $n$ y poniendo $t = T$ se obtiene la estimación para $\mathbb{E}[|X(t)|^2]$.

Queda entonces probar la estimación (3.6). La misma es una consecuencia de la desigualdad de Doob (Teorema 1.30):

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq s\leq t} |X^{n+1}(s) - X^n(s)|^2\Big] \\
&\leq 2\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq s\leq t}\Big|\int_0^s b(\tau,X^n(\tau)) - b(\tau,X^{n-1}(\tau))\,d\tau\Big|^2\Big] \\
&\qquad + 2\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq s\leq t}\Big|\int_0^s \sigma(\tau,X^n(\tau)) - \sigma(\tau,X^{n-1}(\tau))\,dB(\tau)\Big|^2\Big] \\
&\leq 2K^2 t\int_0^t \mathbb{E}\big[|X^n(\tau) - X^{n-1}(\tau)|^2\big]\,d\tau + 2DK^2\int_0^t \mathbb{E}\big[|X^n(\tau) - X^{n-1}(\tau)|^2\big]\,d\tau \\
&\leq (2K^2TC_1 + 2DK^2)C_2^{n-1}\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Eligiendo $C_2 = 2K^2(TC_1 + D)/C_1 = O(T)$ se obtiene el resultado. □

A partir del Teorema 3.8 se obtiene fácilmente el siguiente corolario,

Corolario 3.9. *Supongamos que $\sigma$ y $b$ satisfacen las hipótesis del Teorema 3.8 y que $X$ es la solución de* (3.1). *Supongamos también que $\sigma'$ y $b'$ satisfacen* (3.2) *y* (3.3) *y que $X'$ es la solución de*

$$dX' = b'(t,X'(t))\,dt + \sigma'(t,X'(t))\,dB(t).$$

*Supongamos además que existe $K > 0$ tal que*

$$\sigma'(t,x) = \sigma(t,x), \qquad b'(t,x) = b(t,x)$$

*para $|x| \leq K$, $t > 0$. Entonces si definimos el tiempo de parada $\tau$ como*

$$\tau := \inf\{t > 0 \ :\ \max(|X(t)|, |X'(t)|) > K\},$$

*se tiene que*

$$\mathbb{P}(X(t) = X'(t) \text{ para todo } t < \tau) = 1.$$

Demostración. La demostración de este lema es evidente y queda como ejercicio (ver [**12**], Corolario 11.10). □

Combinando este corolario con el Teorema 3.8, se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 3.10. *Supongamos que $b$ y $\sigma$ son localmente Lipschitz. Entonces la ecuación diferencial estocástica*

$$dX = b(t,X)\,dt + \sigma(t,X)\,dB$$

*tiene una única solución hasta un tiempo maximal de parada $\tau$.*

Demostración. Vamos a extender la demostración del Teorema 3.8 usando un método de truncación y aplicando el Corolario 3.9.

En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$b_n(t,x) = \begin{cases} b(t,x) & \text{si } |x| < n \\ 0 & \text{si } |x| > 2n \end{cases} \quad \text{y} \quad \sigma_n(t,x) = \begin{cases} \sigma(t,x) & \text{si } |x| < n \\ 0 & \text{si } |x| > 2n \end{cases}$$

y $b_n$ y $\sigma_n$ son interpoladas para $n \leq |x| \leq 2n$

Sea $X_n(t)$ la solución de $dX_n = b_n(t, X_n)\,dt + \sigma_n(t, X_n)\,dB$. Definimos los tiempos de parada $\tau_n := \text{ínf}\{t > 0 \,:\, |X_n(t)| \geq n\}$, luego por el Corolario 3.9 tenemos que $X_n(t) = X_m(t)$ para $t \leq \text{mín}\{\tau_n, \tau_m\}$ de donde se puede definir

$$\tau := \lim_{n\to\infty} \tau_n \quad \text{y} \quad X(t) = X_n(t) \text{ para } t < \tau_n.$$

Observemos que $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona, luego el límite de la sucesión está bien definido.

La variable aleatoria $\tau$ está bien definida puesto que la sucesión $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona y es un tiempo de parada (puede ser $\tau = \infty$ en un conjunto de probabilidad positiva). El proceso $X$ está bien definido hasta $\tau$ y es una solución de (3.1) hasta $\tau$. $\square$

## 4. Ejemplos

**Ejemplo 1. Ecuaciones lineales.** Sea $B$ un Movimiento Browniano unidimensional y $g$ una función continua (no una variable aleatoria). Entonces la única solución de

$$\begin{cases} dX = gX dB \\ X(0) = 1 \end{cases}$$

es

$$X(t) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t g^2\,ds + \int_0^t g\,dB}.$$

De hecho, el proceso

$$Y(t) := -\frac{1}{2}\int_0^t g^2\,ds + \int_0^t g\,dB$$

verifica

$$dY = -\frac{1}{2}g^2\ dt + g\ dB.$$

Usando la fórmula de Itô para $u(x) = e^x$ nos da

$$dX = u_x\ dY + \frac{1}{2}u_{xx}\ g^2\ dt = e^Y\left(-\frac{1}{2}g^2\ dt + g\ dB + \frac{1}{2}g^2\ dt\right) = gX\ dB.$$

**Ejemplo 2. Ecuaciones lineales II.** De la misma forma se prueba que la única solución de

$$\begin{cases} dX = fX\ dt + gX\ dB, \\ X(0) = 1 \end{cases}$$

es

$$X(t) = e^{\int_0^t f - \frac{1}{2}g^2\,ds + \int_0^t g\,dB}.$$

**Ejemplo 3. Precios de acciones**. Sea $P(t)$ el precio de una determinada acción a tiempo $t$. Podemos modelar la evolución de $P(t)$ en el tiempo suponiendo que $\frac{dP}{P}$, el cambio relativo del precio evoluciona de acuerdo a la ecuación

$$\frac{dP}{P} = \mu\ dt + \sigma\ dB$$

para ciertas constantes $\mu$ y $\sigma$, llamadas *drift* y *volatilidad* respectivamente. Por lo tanto

$$P(t) = p_0 e^{\sigma B(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}.$$

Donde $p_0$ es el precio inicial de la acción. Observemos que $P(t)$ es siempre positivo si $p_0$ lo es.

Además, como

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma P \, dB\right] = 0$$

tenemos que

$$\mathbb{E}[P(t)] = p_0 + \int_0^t \mu \mathbb{E}[P(s)] \, ds.$$

y por lo tanto

$$\mathbb{E}[P(t)] = p_0 e^{\mu t}.$$

Es decir que el valor esperado del precio de la acción coincide con el de la solución de la ecuación sin ruido ($\sigma = 0$).

**Ejemplo 3. El puente Browniano.** La solución de la ecuación estocástica

$$\begin{cases} dW = -\frac{W}{1-t} \, dt + dB, \\ W(0) = 0, \end{cases}$$

es

$$W(t) = (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} \, dB, \qquad (0 \leq t < 1),$$

como pude verificarse de forma similar a los ejemplos anteriores. Resulta que para casi todo $\omega$, $W(t) \to 0$ cuando $t \to 1^-$. A este proceso se lo llama *Puente Browniano*, entre el origen a tiempo 0 y a tiempo 1. Aparece en muchas aplicaciones.

## 5. Ejercicios

1. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Probar que
$$E\left(e^{\int_0^T g \, dB}\right) = e^{\frac{1}{2}\int_0^T g^2 \, ds}.$$
Sugerencia: Sea $Y(t) := e^{\int_0^t g \, dB - \frac{1}{2}\int_0^t g^2 \, ds}$ ¿qué ecuación verifica $Y$?
2. Resolver la SDE $dX = -X \; dt + e^{-t} \; dB$.
3. Resolver la SDE $dX = \frac{1}{2}e^{-2X} \; dt + e^{-X} \; dB$, $X(0) = x_0$ y probar que NO está definida para todo tiempo.
4. Idem para la SDE $dX = X^3 \; dt + X^2 \; dB$, $X(0) = 1$. Más aún, probar que no existe ningún intervalo de tiempo $[0, \varepsilon)$ en donde exista una solución de esta ecuación.

CAPíTULO 4

# Explosiones

En este capítulo estudiaremos ecuaciones diferenciales estocásticas en dimensión uno y nos enfocaremos en decidir cuándo el tiempo maximal de existencia es una variable aleatoria finita con probabilidad positiva. Este fenómeno se denomina *explosión*. Mostraremos un criterio para determinar cuándo ocurre el fenómeno de explosión en dimensión uno (Test de Feller).

En el caso determinístico, i.e. $\sigma = 0$, existe un criterio muy simple para determinar si las soluciones están definidas para todo tiempo o si se produce explosión en tiempo finito para dimensión uno (ver Ejercicio 1). Sin embargo, para sistemas no se conoce ningún criterio *general* que determinar la existencia de explosiones (condiciones necesarias y suficientes).

Por ende, no es de extrañar que lo mismo suceda en el caso estocástico. Queremos recalcar que para sistemas de ecuaciones estocásticas existe también un criterio (Test de Khasminskii) que da condiciones para determinar explosiones y también (otras) para garantizar existencia global, pero no caracteriza el fenómeno como en el caso unidimensional. Ver **[12]**, Sección 52.

## 1. Eliminación del drift

En esta sección estudiaremos el *método de eliminación del drift*. Esto será de gran utilidad en la sección siguiente donde estableceremos condiciones suficientes para garantizar la explosión de las soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas en dimensión uno.

Para simplificar la exposición consideraremos ecuaciones autónomas, es decir tanto el drift como la difusión son funciones independientes del tiempo. En síntesis, la ecuación a considerar es

$$dX = b(X)\,dt + \sigma(X)\,dB \tag{4.1}$$

donde $b,\ \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son localmente Lipschitz, y se satisface

$$\sigma^2(x) > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

Tomemos ahora $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2$ y calculemos la ecuación que satisface $Y := p(X)$ si $X$ es una solución de (4.1). Aplicando el cálculo de Itô (Observación 2.14), obtenemos

$$dY = \Big(p'(X)b(X) + \frac{1}{2}p''(X)\sigma^2(X)\Big)\,dt + p'(X)\sigma(X)\,dB.$$

Luego si $p$ es tal que

$$p'b + \frac{1}{2}p''\sigma^2 = 0, \tag{4.3}$$

obtenemos que $Y$ verifica

$$dY = \tilde{\sigma}(Y)\,dB$$

donde $\tilde{\sigma}(y) = (p'\sigma) \circ p^{-1}(y)$.

Debemos entonces verificar que (4.3) tiene una solución con las propiedades requeridas, que permitan hacer rigurosos los cálculos formales realizados.

En efecto, fijamos $\xi \in \mathbb{R}$ y tomamos

$$p(x) := \int_{\xi}^{x} \exp\Big( -2 \int_{\xi}^{s} \frac{b(\tau)}{\sigma^2(\tau)}\, d\tau \Big)\, ds, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Luego, $p$ es solución de (4.3) de clase $C^2$ y verifica

$$p'(x) = \exp\Big( -2 \int_{\xi}^{x} \frac{b(\tau)}{\sigma^2(\tau)}\, d\tau \Big) > 0$$

lo que implica que $p$ es estrictamente monótona y por ende inversible con $p^{-1} : (p(-\infty), p(\infty)) \to I$ de clase $C^2$.

Lo que hace que este método sea útil en el estudio de explosiones es el hecho de que si bien la solución $X$ de (4.1) puede explotar en tiempo (aleatorio) finito, $Y$ está definida globalmente. De hecho se tiene:

Proposición 4.1. *Sea $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz. Entonces las soluciones de*

$$dY = \sigma(Y)\, dB$$

*están definidas para todo tiempo y son martingalas.*

La demostración de este hecho se encuentra en [**6**], capítulo 5.

## 2. El Test de Feller para explosiones

Sea $X$ una solución de (4.1) con $X(0) = x_0 \in \mathbb{R}$. Tratemos de determinar si $X$ está definido para todo tiempo o no.

Para eso, definimos los tiempos de parada

$$T_{a,b} = \inf\big\{ t \geq 0 \ : \ X(t) \notin (a,b) \big\}, \qquad -\infty < a < b < \infty.$$

El objetivo ahora será obtener información sobre la variable $T_{a,b}$. Para eso, tomemos $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $C^2$ y apliquemos la regla de Itô al proceso $Y(t) = M(X(t))$. Por la Observación 2.14 tenemos

$$dY = \Big( M'(X) b(X) + \frac{1}{2} M''(X) \sigma^2(X) \Big)\, dt + M'(X)\sigma(X)\, dB.$$

Si elegimos $M$ de manera tal que $M'b + \frac{1}{2}M''\sigma^2 = -1$ se obtiene

$$M(X(t \wedge T_{a,b})) = M(x_0) - t \wedge T_{a,b} + \int_0^{t \wedge T_{a,b}} M'(X(s))\sigma(X(s))\, dB.$$

Si $M \geq 0$, tomando esperanza,

$$\mathbb{E}[t \wedge T_{a,b}] = M(x_0) - \mathbb{E}[M(X(t \wedge T_{a,b}))] \leq M(x_0) < \infty. \tag{4.5}$$

Haciendo ahora $t \to \infty$ se llega a $\mathbb{E}[T_{a,b}] \leq M(x_0) < \infty$. En otras palabras, $X$ *sale del intervalo $(a,b)$ con probabilidad uno y lo hace en tiempo esperado finito.* Hecha esta observación, si asumimos además que $M(a) = M(b) = 0$, se tiene

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}[M(X(t \wedge T_{a,b}))] = 0$$

y combinando esto con (4.5) concluimos que

$$\mathbb{E}[T_{a,b}] = M(x_0), \qquad a < x_0 < b. \tag{4.6}$$

Antes de proseguir observemos que efectivamente existe una tal $M$. La misma es la única solución del problema

$$\begin{cases} bM' + \frac{1}{2}\sigma^2 M'' = -1 & a < x < b, \\ M(a) = M(b) = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

que es no negativa, por el principio del máximo. Observemos que $M$ depende de $a$ y $b$ (ver el Ejercicio 2).

Como $T_{a,b} < \infty$ c.s. tenemos $X(T_{a,b}) = a$ ó $X(T_{a,b}) = b$. Tratemos ahora de calcular las probabilidades de estos eventos. Repetimos el mismo procedimiento que hicimos con $M(X)$ para $p(X)$ donde $p$ es la función definida en (4.4). Se tiene

$$p(X(t \wedge T_{a,b})) = p(x_0) + \int_0^{t\wedge T_{a,b}} p'(X(s))\sigma^2(X(s))\, dB.$$

Tomando esperanza y haciendo $t \to \infty$, obtenemos

$$\mathbb{E}[p(X(T_{a,b}))] = p(x_0),$$

pero como $X(T_{a,b})$ toma sólo dos valores, esta esperanza se calcula fácilmente. De hecho

$$\mathbb{E}[p(X(T_{a,b}))] = p(a)\mathbb{P}(X(T_{a,b}) = a) + p(b)\mathbb{P}(X(T_{a,b}) = b),$$

de donde se obtiene

$$\mathbb{P}(X(T_{a,b}) = a) = \frac{p(b) - p(x_0)}{p(b) - p(a)}, \qquad \mathbb{P}(X(T_{a,b}) = b) = \frac{p(x_0) - p(a)}{p(b) - p(a)}. \tag{4.8}$$

Tenemos ahora la siguiente proposición fundamental.

Proposición 4.2. *Sea $X$ una solución de* (4.1) *con dato inicial determinístico $x_0 \in \mathbb{R}$ y sea $p$ la función definida por* (4.4). *Sea $\tau$ el tiempo maximal de existencia de $X$. Se distinguen cuatro casos:*

1. *Si $p(-\infty) = -\infty$ y $p(\infty) = \infty$, entonces*
$$\mathbb{P}(\tau = \infty) = 1.$$
2. *Si $p(-\infty) > -\infty$ y $p(\infty) = \infty$, entonces*
$$\mathbb{P}\Big(\lim_{t \nearrow \tau} X(t) = -\infty\Big) = \mathbb{P}\Big(\sup_{0<t<\tau} X(t) < \infty\Big) = 1.$$
3. *Si $p(-\infty) = -\infty$ y $p(\infty) < \infty$, entonces*
$$\mathbb{P}\Big(\lim_{t \nearrow \tau} X(t) = \infty\Big) = \mathbb{P}\Big(\inf_{0<t<\tau} X(t) > -\infty\Big) = 1.$$
4. *Si $p(-\infty) > -\infty$ y $p(\infty) < \infty$, entonces*
$$\mathbb{P}\Big(\lim_{t \nearrow \tau} X(t) = -\infty\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(\lim_{t \nearrow \tau} X(t) = \infty\Big) = \frac{p(\infty) - p(x_0)}{p(\infty) - p(-\infty)}.$$

Observación 4.3. *En el caso 1 la solución $X$ está globalmente definida. En los casos 2, 3 y 4 la solución tiende a infinito con probabilidad 1 cuando $t \nearrow \tau$, pero no podemos determinar aún, si $\tau$ es finito o no.*

Demostración. Para el caso 1, de (4.8) para $-\infty < a < x_0 < b < \infty$ tenemos

$$\mathbb{P}\Big(\inf_{0<t<\tau} X(t) \le a\Big) \ge \mathbb{P}(X(T_{a,b}) = a) = \frac{p(b) - p(x_0)}{p(b) - p(a)}. \tag{4.9}$$

Haciendo tender $b \nearrow \infty$ tenemos

$$\mathbb{P}\Big(\inf_{0<t<\tau} X(t) \le a\Big) = 1, \qquad \forall\, a \in \mathbb{R},$$

y haciendo tender $a \searrow -\infty$, obtenemos

$$\mathbb{P}\Big( \inf_{0<t<\tau} X(t) = -\infty \Big) = 1.$$

El mismo argumento muestra que

$$\mathbb{P}\Big( \sup_{0<t<\tau} X(t) = \infty \Big) = 1.$$

Supongamos que $\mathbb{P}(\tau < \infty) > 0$, entonces el evento

$$\Big\{ \lim_{t \nearrow \tau} X(t) = -\infty \text{ ó } \lim_{t \nearrow \tau} X(t) = \infty \Big\}$$

tiene probabilidad positiva, luego, los eventos

$$\Big\{ \sup_{0<t<\tau} X(t) = \infty \Big\} \qquad \text{y} \qquad \Big\{ \inf_{0<t<\tau} X(t) = -\infty \Big\},$$

no pueden ambos tener probabilidad uno contradiciendo lo que acabamos de mostrar. Por lo tanto, $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 1$.

Para ver 2, de manera análoga al caso anterior, (4.9) implica que

$$\mathbb{P}( \inf_{0<t<\tau} X(t) = -\infty) = 1.$$

Por otro lado, de (4.8) tenemos

$$\mathbb{P}(X(T_{a,b}) = b) = \frac{p(x_0) - p(a)}{p(b) - p(a)}$$

y haciendo $a \searrow -\infty$, llegamos a

$$\mathbb{P}(X(t) = b, \text{ para algún } 0 < t < \tau) = \frac{p(x_0) - p(-\infty)}{p(b) - p(-\infty)}.$$

Si ahora hacemos $b \nearrow \infty$ se obtiene que $\mathbb{P}(\sup_{0<t<\tau} X(t) = \infty) = 0$. Luego, hemos probado que

$$\mathbb{P}\Big( \inf_{0<t<\tau} X(t) = -\infty \Big) = \mathbb{P}\Big( \sup_{0<t<\tau} X(t) < \infty \Big) = 1.$$

Resta probar que el límite $\lim_{t \to \tau} X(t)$ existe con probabilidad uno. Para esto se usan desigualdades de martingalas que no veremos en estas notas. La demostración de estos hechos se encuentra en **[6]**, Proposición 5.22.

El caso 3 es análogo al caso 2 y el caso 4 sale tomando límite $a \searrow -\infty$ y $b \nearrow \infty$ en (4.8). □

Queremos ahora buscar condiciones necesarias y suficientes que garanticen que $\tau$ es finito con probabilidad positiva (o uno!). Para esto usaremos el siguiente resultado de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya prueba se encuentra en **[6]**, Lema 5.26.

Lema 4.4. *Sea $u(x)$ la solución de la ecuación*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 u'' + bu' = u & \text{en } \mathbb{R} \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 0. \end{cases}$$

*Sea $v(x)$ la función dada por*

$$v(x) = 2 \int_0^x \frac{p(x) - p(y)}{p'(y)\sigma^2(y)}\, dy. \tag{4.10}$$

*Entonces $u \in C^2(\mathbb{R})$, es estrictamente creciente para $x > 0$ y estrictamente decreciente para $x < 0$. Más aún, tenemos*

$$1 + v(x) \leq u(x) \leq e^{v(x)}. \tag{4.11}$$

Observación 4.5. *La función $v$ se introduce porque es "sencilla" de calcular, en contraposición con $u$. De hecho,* (4.11) *dice que $u$ es finita, si y sólo si $v$ lo es.*

Con la ayuda de este Lema podemos probar el Test de Feller.

Teorema 4.6 (Test de Feller para explosiones). *Sea $X$ una solución de* (4.1) *con condición inicial determinística $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\mathbb{P}(\tau = \infty) = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad v(-\infty) = v(\infty) = \infty.$$

Demostración. Sea $Z_n(t) := u(X(t \wedge \tau_n))$. Usando la fórmula de Itô (Teorema 2.13), tenemos

$$Z_n(t) = Z_n(0) + \int_0^{t\wedge\tau_n} u(X(s))\, ds + \int_0^{t\wedge\tau_n} u'(X(s))\sigma(X(s))\, dB$$

Luego, si definimos $M_n(t) := e^{-(t\wedge\tau_n)} Z_n(t)$, nos queda

$$M_n(t) = M_n(0) + \int_0^{t\wedge\tau_n} e^{-s} u'(X(s))\sigma(X(s))\, dB$$

Definimos ahora $M(t) = \lim_{n\to\infty} M_n(t) = e^{-(t\wedge\tau)} u(X(t\wedge\tau))$, $0 \leq t < \infty$.

Nuevamente, usando desigualdades de martingalas (ver **[6]**, Teorema 5.29) puede verse que el límite

$$M_\infty := \lim_{t\to\infty} M(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-(t\wedge\tau)} u(X(t\wedge\tau)) \tag{4.12}$$

existe y es finito con probabilidad uno.

Supongamos ahora que $v(-\infty) = v(\infty) = \infty$. Por (4.11), tenemos que $u(-\infty) = u(\infty) = \infty$, pero (4.12) muestra que $M_\infty = \infty$ c.s. en el evento $\{\tau < \infty\}$, de donde $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 0$.

Supongamos ahora que $v(\infty) < \infty$ (si $v(-\infty) < \infty$ es análogo). Por (4.11), tenemos que $u(\infty) < \infty$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $c < x_0 < \infty$ y definimos $T_c := \inf\{t > 0 \ : \ X(t) = c\}$. De manera análoga al caso anterior, podemos concluir que el proceso

$$M(t \wedge T_c) = e^{-(t\wedge\tau\wedge T_c)} u(X(t\wedge\tau\wedge T_c)), \quad 0 \leq t < \infty,$$

tiene límite casi seguro para $t \to \infty$ y que es una martingala (luego tiene esperanza constante). De ahí concluimos que

$$u(x_0) = \mathbb{E}[e^{-(\tau\wedge T_c)} u(X(\tau\wedge T_c))] = u(\infty)\mathbb{E}[e^{-\tau}\mathbf{1}_{\{\tau<T_c\}}] + u(c)\mathbb{E}[e^{-T_c}\mathbf{1}_{\{T_c<\tau\}}].$$

Si $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 1$, la identidad de arriba dice que $u(x_0) = u(c)\mathbb{E}[e^{-T_c}] \leq u(c)$, lo que contradice el hecho de que $u$ es estrictamente creciente en $[c, x_0]$. Luego $\mathbb{P}(\tau = \infty) < 1$. □

Finalicemos este capítulo con un criterio para determinar si $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.

Proposición 4.7. *Se tiene que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ si y sólo si se verifica alguna de las siguientes tres posibilidades:*

1. *$v(\infty) < \infty$ y $v(-\infty) < \infty$.*
2. *$v(\infty) < \infty$ y $p(-\infty) = -\infty$.*
3. *$v(-\infty) < \infty$ y $p(\infty) = \infty$.*

*En el primer caso, se tiene además que $\mathbb{E}[\tau] < \infty$.*

Demostración. Supongamos primero que 1 vale. Luego se tiene también que $p(\infty) < \infty$ y $p(-\infty) > -\infty$ (ver el ejercicio 6 de este capítulo).

Consideremos la función $M(x)$ dada por la solución de la ecuación

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 M'' + bM' = -1 & \text{en } \mathbb{R} \\ M(-\infty) = M(\infty) = 0 \end{cases}$$

Tal $M$ existe pues $|p(\pm\infty)| < \infty$. Ver **[6]**, Observación 5.33.

El mismo procedimiento que usamos para obtener (4.6) nos da $\mathbb{E}[\tau] < \infty$.

Supongamos ahora que vale 2. Tomemos los siguientes tiempos de parada

$$L_n := \inf\{t > 0 \ : \ X(t) \leq -n\}, \quad n \geq 1$$
$$T_\infty := \inf\{t > 0 \ : \ X(t) = \infty\}, \quad T_{-\infty} := \inf\{t > 0 \ : \ X(t) = -\infty\} = \lim_{n\to\infty} L_n.$$

Como $v(\infty) < \infty$ y $v(-n) < \infty$, obtenemos como en el caso anterior, tomando $M$ la solución de

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 M'' + bM' = -1 & \text{en } (-n, \infty) \\ M(-n) = M(\infty) = 0, \end{cases}$$

que $\mathbb{E}[L_n \wedge T_\infty] < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, por el ejercicio 6 de este capítulo, $p(\infty) < \infty$, luego estamos en el caso 3 de la Proposición 4.2 y por lo tanto, para casi todo $\omega \in \Omega$, $L_n(\omega) = \infty$ si $n$ es suficientemente grande. Luego $\tau(\omega) = T_\infty(\omega) < \infty$.

El caso 3 es análogo.

Supongamos ahora que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$. Entonces por el Teorema 4.6, $v(\infty) < \infty$ o $v(-\infty) < \infty$. Consideramos $v(-\infty) < \infty$ (el otro es análogo) y asumamos que 1, 2 y 3 no valen. Entonces $p(\infty) < \infty = v(\infty)$ y $p(-\infty) > -\infty$ (ver el ejercicio 6). Entonces estamos en el caso 4 de la Proposición 4.2 y $A := \{\lim_{t\to\tau} X(t) = \infty)\}$ tiene probabilidad positiva.

Sea ahora $M(t) = e^{-(t\wedge\tau)}u(X(t \wedge \tau))$ el proceso considerado en la demostración del Teorema 4.6. Luego la variable aleatoria $M_\infty$ dada por (4.12) es finita c.s.

Como $v(\infty) = \infty$ sigue que $u(\infty) = \infty$ y luego por la definición de $M_\infty$ obtenemos que $\tau = \infty$ en $A$. Esto muestra que $\mathbb{P}(\tau < \infty) < 1$ lo que contradice nuestra suposición.

La prueba queda terminada. □

## 3. Ejercicios

1. Probar que las soluciones de la ecuación determinística
$$\dot{x} = b(x), \qquad x(0) = x_0,$$
explotan en tiempo finito si y sólo si
$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{b(s)}\, ds < \infty$$
y hallar el tiempo de explosión.
2. Probar que la ecuación (4.7) tiene una única solución que es de clase $C^2$ y positiva.
3. Sea $B$ un Movimiento Browniano unidimensional. Probar que $B$ sale de cualquier intervalo $(a, b)$ en tiempo finito con probabilidad uno y calcular la esperanza del tiempo de salida.

4. La función $p$ definida por (4.4) depende de $\xi$. Notemos luego $p = p_\xi$. Probar que para todo $c \in \mathbb{R}$ se tiene
$$p_c(x) = p_c(\xi) + p_c'(\xi)p_\xi(x).$$
Concluir que la finitud o infinitud de $p_\xi(\pm\infty)$ no depende de $\xi$ y que la cantidad
$$\frac{p_\xi(x_0) - p_\xi(a)}{p_\xi(b) - p_\xi(a)}$$
es independiente de $\xi$.
5. Para el proceso $X(t) = \mu t + \sigma B(t)$ en $\mathbb{R}$ con $\mu > 0$ y $\sigma^2 > 0$ constantes, tenemos que (para $\xi = 0$) $p(x) = (1 - e^{-\beta x})/\beta$ donde $\beta = 2\mu/\sigma^2$. Concluir que se está en el caso 3 de la Proposición 4.2.
6. Probar las implicaciones
   *a)* $p(\infty) = \infty \Rightarrow v(\infty) = \infty$
   *b)* $p(-\infty) = -\infty \Rightarrow v(-\infty) = \infty$
7. Tomar $\sigma(x) = 1$
   *a)* Si $b(x) = \frac{3}{2}x^2$, mostrar que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.
   *b)* Si $b(x) = 2x^3$, mostrar que $\mathbb{E}[\tau] < \infty$.
8. Considerar la ecuación
$$dX = -X\,dt + \sqrt{2(1+x^2)}\,dB.$$
Discutir la posibilidad de explosión.
9. Sean $b$ y $\sigma$ tales que existen constantes positivas $\kappa_1$, $\kappa_2$ que verifican
$$\kappa_1 \leq \sigma^2(s) \leq \kappa_2 b(s), \qquad \int_0^\infty \frac{1}{b(s)}\,ds < \infty.$$
Probar que entonces las soluciones de (4.1) explotan con probabilidad 1.

CAPíTULO 5

# Aproximaciones numéricas

Como pudo apreciarse en los capítulos anteriores, soluciones explícitas para las soluciones de las SDEs se encuentran solo en ejemplos muy particulares y es raro encontrarlas en las aplicaciones. Por lo tanto se han desarrollado métodos numéricos para aproximarlas. En esta sección daremos una breve introducción a este problema. Consideraremos solamente el método de Euler, para un estudio más profundo del tema puede consultarse [**7, 10**].

## 1. El Método de Euler-Maruyama

En busca de aproximaciones numéricas para las soluciones de (4.1), comenzaremos tratando el caso que la solución esta definida en un intervalo determinístico $[0, T]$, esto puede garantizarse si las funciones $b$, $\sigma$ son globalmente Lipschitz. En ese caso, consideramos una partición uniforme

$$0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T,$$

con $h = t_{i+1} - t_i = T/N$. La aproximación de Euler-Maruyama $Y$ de (3.1) está dada por

$$Y_{i+1} = Y_i + hb(t_i, X_i) + \sigma(t, X_i)\Delta B_i, \qquad Y_0 = X_0,$$

donde $\Delta B_i = B(t_{i+1}) - B(t_i)$ denota los incrementos del proceso de Wiener en el intervalo $[t_{i+1} - t_i]$ y están representados por variables aleatorias normales independientes con media cero y varianza $h$. Por conveniencia consideraremos a $Y$ como un proceso continuo en $[0, S]$, para ello se puede considerar cualquier interpolante continua que satisfaga $Y(t_i) = Y_i$, $1 \leq i \leq N$.

Bajo condiciones de regularidad, estas aproximaciones convergen a la solución de (3.1) cuando $h \to 0$ bajo diferentes nociones de convergencia.

A grandes rasgos podemos clasificar las diferentes nociones de convergencia que aparecen en la literatura en dos, según si lo que se quiere aproximar es

(a) aproximar las trayectorias, ó
(b) aproximar las distribuciones.

Las nociones de convergencia asociadas a estas dos opciones se denominan *fuerte* y *débil* respectivamente.

Definición 5.1. *Diremos que la aproximación numérica $Y$ de la solución exacta $X$ de* (3.1) *converge en sentido fuerte con orden $\gamma$ is existe una constante $K$ tal que*

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t \leq S} |X(t) - Y(t)|] \leq Kh^{\gamma},$$

*para todo 0<h <1. Y diremos que converge en sentido débil con orden $\beta$ si para todo polinomio $g$, existe $K_g$ tal que*

$$|\sup_{0 \leq t \leq S} \mathbb{E}[g(X(t))] - \mathbb{E}[g(Y(t)]| \leq K_g h^{\beta},$$

*para todo 0<h <1.*

Ambos criterios se reducen, para el caso determinístico $b \equiv 0$ al criterio usual de convergencia para EDOs.

Para simular la realización de una aproximación de Euler, es necesario generar variables aleatorias normales independientes. En la práctica se utilizan generadores de números pseudo-aleatorios por métodos de congruencia lineal o no-lineal (ver [**7, 8**]).

## 2. El caso de explosiones

El método descrito en la sección previa no se aplica al caso de soluciones con explosiones por varias razones: en primer lugar, las condiciones de regularidad necesarias para tener convergencia no están disponibles en este contexto, en segundo lugar, las aproximaciones numéricas descritas están definidas globalmente, con lo cual nunca pueden ser una buena aproximación de una solución que explota. Por último, como vimos en el capítulo anterior, cuanto tenemos soluciones que explotan en general no existe ningún intervalo de tiempo determinístico $[0, T]$ en donde la solución esté definida.

Una forma de solucionar este problema es considerar pasos de tiempo adaptivos, es decir que el paso $h$ en lugar de ser constante, pasa a ser aleatorio y se calcula en función del valor que va tomando la aproximación numérica. En [**4**] se considera este tipo de métodos, donde el paso es adaptado de manera tal de reproducir el comportamiento de las soluciones.

Al considerar métodos numéricos para ecuaciones con soluciones que explotan, algunas de las propiedades más importantes que debe tener un método son

1. Convergencia de las soluciones. Esto en general no es posible en todo el intervalo donde está definida la solución, incluso en el caso determinístico, pero si es posible obtener convergencia en cualquier intervalo de tiempo compacto en donde la solución exacta esté definida.
2. Reproducción de las explosiones. Las aproximaciones numéricas deben explotar también en tiempo finito si la solución exacta lo hace, al menos cuando el parámetro de la malla es pequeño.
3. Convergencia de los tiempos de explosión. Los tiempos de explosión de las aproximaciones numéricas deben converger a los de la solución continua en algún sentido.

Un forma de lograr estas propiedades es considerar como paso de tiempo

$$h_i = \frac{h}{b(Y_i)}.$$

De esta forma, a medida que la solución crece, el paso de tiempo se va achicando para poder captar la singularidad que se está desarrollando.

Bajo las hipótesis del Ejercicio 9 sobre $b$ y $\sigma$, que garantizan que las soluciones explotan con probabilidad 1, se puede probar que eligiendo este paso de tiempo, el método de Euler-Maruyama posee las tres propiedades requeridas arriba (ver [**4**]).

Por ejemplo si tomamos

$$b(x) = |x|^{1,1} + 0{,}1, \qquad \sigma(x) = \sqrt{|x|^{1,1} + 0{,}1}, \qquad x_0 = 10.$$

se obtienen las simulaciones de la Figura 1.

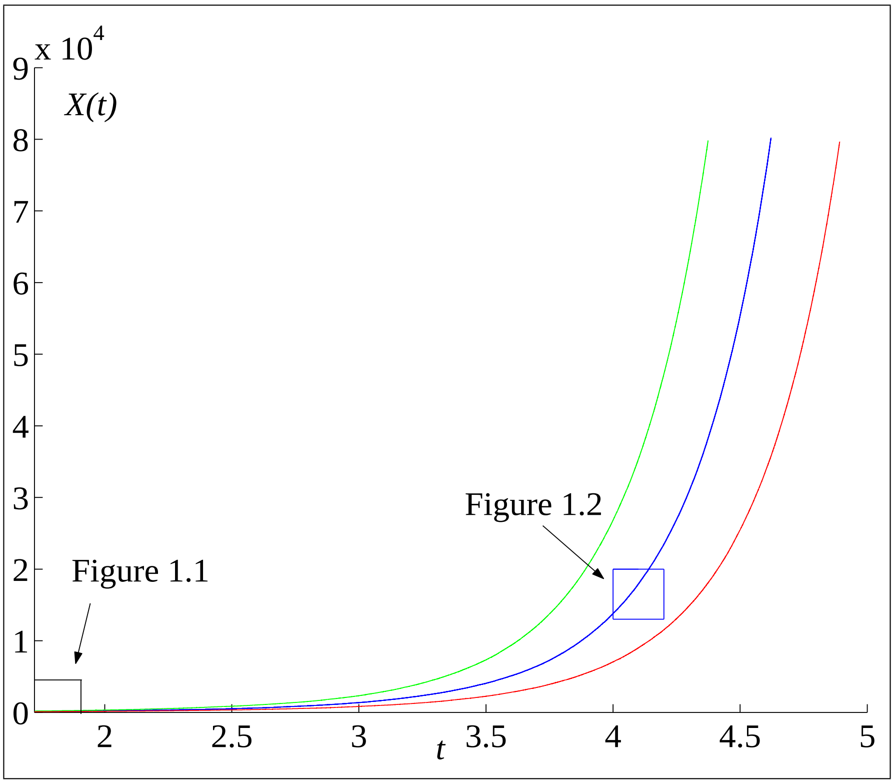


**Figura 1:** Tres trayectorias que explotan.

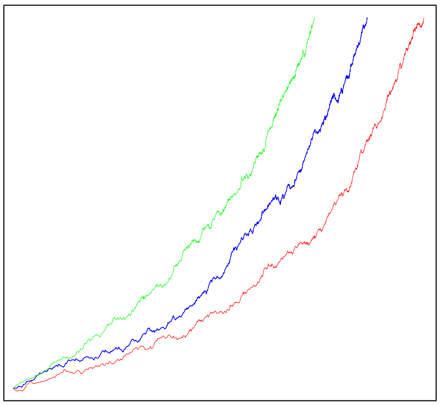

Figure 1.1

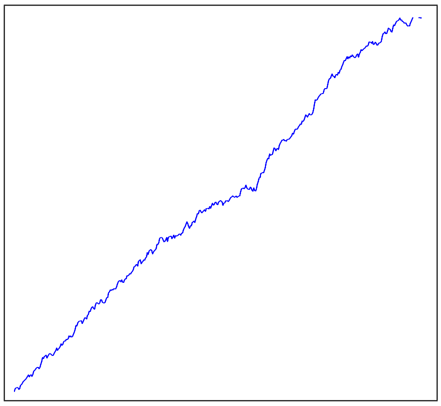

Figure 1.2

La siguiente figura muestra estimaciones, obtenidas mediante simulaciones, de las densidades de los tiempos de explosión de las aproximaciones, que convergen en probabilidad a $\tau$.

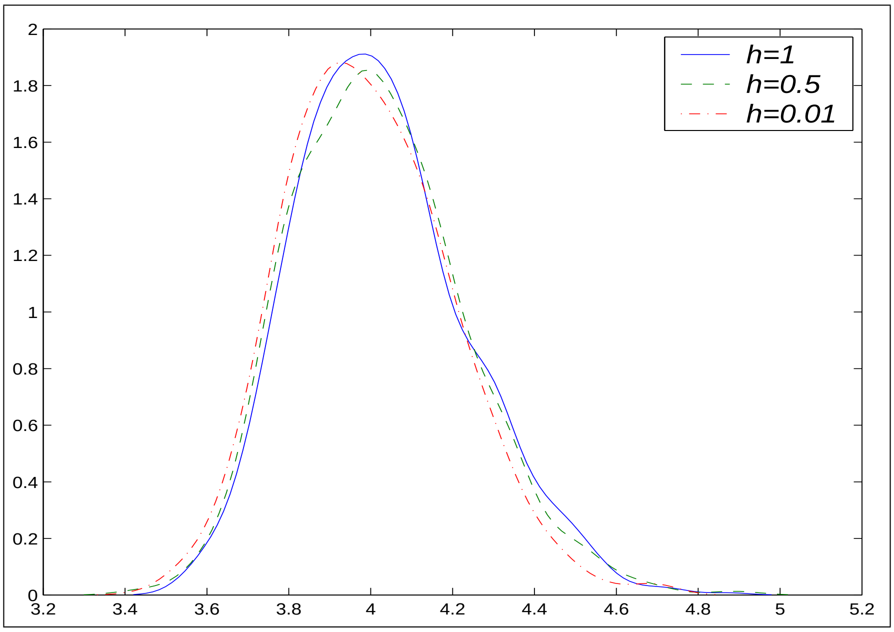


**Figure 3:** Estimación por núcleos de la densidad de $\tau$ para diferentes valores de $h$.

# Bibliografía


[1] Herbert Amann. *Ordinary Differential Equations*, volume 13 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter, Berlin - New York, 1990.

[2] Leo Breiman. *Probability*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1968.

[3] Kai Lai Chung. *A course in probability theory*. Academic Press Inc., San Diego, CA, third edition, 2001.

[4] Juán Dávila, Julián Fernández Bonder, Pablo Groisman, Julio D. Rossi, and Mariela Sued. Numerical analysis of stochastic differential equations with explosions. *Stochastic Analysis and Applications*. To appear.

[5] L. C. Evans. *An introduction to stochastic differential equations*. Department of Mathematics, UC Berkeley. Version 1.2, http://math.berkeley.edu/∼evans/SDE.course.pdf.

[6] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[7] Peter E. Kloeden and Eckhard Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations*, volume 23 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[8] Donald E. Knuth. *The art of computer programming*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, second edition, 1975. Volume 1: Fundamental algorithms, Addison-Wesley Series in Computer Science and Information Processing.

[9] Bernt Øksendal. *Stochastic differential equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, sixth edition, 2003. An introduction with applications.

[10] Eckhard Platen. An introduction to numerical methods for stochastic differential equations. In *Acta numerica, 1999*, volume 8 of *Acta Numer.*, pages 197–246. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[11] Markus Reiß. *Stochastic differential equations*. Institute of Mathematics, Humboldt University, Berlin. http://www.mathematik.hu-berlin.de/∼reiss.

[12] L. C. G. Rogers and David Williams. *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 2*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Itô calculus, Reprint of the second (1994) edition.

[13] George A. F. Seber and Alan J. Lee. *Linear regression analysis*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, second edition, 2003.

[14] Richard L. Wheeden and Antoni Zygmund. *Measure and integral*. Marcel Dekker Inc., New York, 1977. An introduction to real analysis, Pure and Applied Mathematics, Vol. 43.