Los Números Primos

Curiosidades y problemas sin resolver

Pablo De Nápoli

Departamento de Matemática - FCEyN, UBA

Semana de la Matemática -2024

Números naturales

- En esta charla vamos a trabajar con los **números naturales**

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$$

- Son los primeros números que aprendimos y los usamos para contar objetos.
- Los números naturales son **infinitos** (¡nunca se acaban!).

¿Qué son los números primos?

- Hay números que se pueden escribir como el producto de dos números más pequeños, por ejemplo:

$$14 = 7 \times 2$$

  Estos números se llaman **compuestos**.

- Por el contrario, existen números que no se pueden descomponer como el producto de dos números más pequeños. Estos números se llaman **primos**. Los primeros son.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 \ldots$$

- El número **1** no se considera primo ni compuesto.

Factorizar un número

Los números primos son como bloques con los que podemos armar otros números.

Podemos descubrir con qué números primos se arma un número dividiéndolo sucesivamente por algunos primos hasta llegar al 1.

$$
\begin{array}{r|l}
360 & 2 \\
180 & 2 \\
90 & 2 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
\mathbf{1} &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
360 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \\
&= 2^3 \times 3^2 \times 5^1
\end{aligned}
$$

Los primos como bloques básicos

Un hecho sorprendente e importante es que podemos ir dividiendo por los primos en el orden que se nos ocurra, y al final obtenemos la misma **factorización**.

360	5
72	3
24	2
12	2
6	3
2	2
1	

$$\begin{aligned} 360 &= 5 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \\ &= 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \end{aligned}$$

¿Y cómo encontramos los primos?

- Usamos la Criba de Eratóstenes (276-195 a. C.)
- El 2 es primo.
- Tachamos los múltiplos de 2 (números pares).

	1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9
~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29
~~30~~	31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39
~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49
~~50~~	51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59
~~60~~	61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69
~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79
~~80~~	81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89
~~90~~	91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99

¿Y cómo encontramos los primos? (2)

- El 3 es primo.
- Tachamos también los múltiplos de 3 (por ej: 9, 15, 21, ...).

	1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~
~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29
~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~
~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49
~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59
~~60~~	61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~
~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79
~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89
~~90~~	91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~

¿Y cómo encontramos los primos? (3)

- El 5 es primo.
- Tachamos también los múltiplos de 5 (por ej: 25, 35).

	1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~
~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29
~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~
~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49
~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59
~~60~~	61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~
~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79
~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89
~~90~~	91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~

Y siguiendo hasta el 99...

	1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~
~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29
~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~
~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~
~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59
~~60~~	61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~
~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79
~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89
~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~

¿Notan algún patrón?

¡No parece haber ninguno!

- El matemático griego Euclides (325 a. C.-ca. 265 a. C) demostró que los los números primos son infinitos.
- Actualmente, el número primo más grande conocido es

$$p = 2^{82.589.933} - 1$$

  ¡Tiene 24.862.048 dígitos ! (no lo puedo mostrar en las diapositivas)
- Pero no parece haber ninguna fórmula sencilla que nos dé todos los primos, ni siquiera una infinidad de ellos.
- ¡Parecen estar repartidos al azar!.

Un intento de fórmula

Por ejemplo, Euler propuso el polinomio

$$P(n) = n^2 + n + 41$$

y se puede ver que para $n = 0, 1, \ldots, 39$ da valores primos

41 43 47 53 61 71 83 97 113 131 151 173 197 223 251 281 313 347
383 421 461 503 547 593 641 691 743 797 853 911 971 1033 1097
1163 1231 1301 1373 1447 1523 1601

pero si $n = 40$, $P(40) = 1681$ que NO es primo pues

$$1681 = 41 \times 41 = 41^2$$

¡Entonces la propuesta de Euler NO funciona!

Primos Gemelos

Mirando las tablas de primos, los matemáticos notaron que hay muchos primos p para los que $p+2$ también es primo.

3 y 5	5 y 7	
11 y 13	17 y 19	29 y 31
41 y 43	59 y 61	71 y 73

Se llaman primos gemelos. Se cree que hay infinitos ejemplos de primos gemelos, pero nadie ha podido demostrarlo.

¡El par más grande de primos gemelos conocido tiene 388.342 dígitos!.

La conjetura de Golbach

Un problema parecido es el siguiente: se cree que todo número par se puede escribir como suma de 2 primos:

$$
\begin{aligned}
4 &= 2 + 2 \\
6 &= 3 + 3 \\
8 &= 3 + 5 \\
10 &= 3 + 7 \\
12 &= 5 + 7 \\
14 &= 3 + 11 \\
16 &= 3 + 13 \\
18 &= 5 + 13 \\
20 &= 3 + 17
\end{aligned}
$$

Ha sido verificada por computadoras hasta 4×10^{18}.

¡Pero nadie ha podido demostrarlo!

Dos clases de primos impares

Vamos a subdividir a los primos impares en dos clases según el resto que dan al dividirlos por 4.

- Hay primos que dan resto 1 al dividirlos por 4,

$$5 = 1 \times 4 + 1 \quad 13 = 3 \times 4 + 1$$

- Hay primos que dan resto 3 al dividirlos por 4,

$$7 = 1 \times 4 + 3 \quad 11 = 2 \times 4 + 3$$

Se puede demostrar que ambas clases de primos son infinitas.

Escritura como suma de cuadrados

- Los primos que dan resto 1 al dividirse por 4 se pueden escribir de una única forma como suma de cuadrados

$$5 = 2^2 + 1^2 \quad 13 = 2^2 + 3^2$$

$$17 = 4^2 + 1^2 \quad 29 = 2^2 + 5^2$$

- ¡En cambio, los primos que dan resto 3 al dividirse por 4 no se pueden escribir como suma de cuadrados!

  Por ejemplo, es imposible escribir al 7 o al 11 como suma de cuadrados.

Esto sí es un teorema que se ha podido demostrar.

En resumen...

- Los números primos han fascinado a los matemáticos desde la antigüedad hasta nuestros días.

- Si bien se han podido demostrar muchos teoremas sobre ellos, ¡aún quedan muchas problemas abiertos relacionados con los números primos. !