Introducción a las Formas Modulares – UMA 2024

Clase 3

---

1. Consideremos el operador D sobre el espacio de funciones holomorfas en $\mathcal{H}$ dado por

$$(Df)(z) = \frac{1}{2\pi i} f'(z).$$

a) Probar que si f es débilmente modular de peso k y nivel $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, entonces

$$(Df)(\gamma \cdot z) = j(\gamma, z)^{k+2} \left((Df)(z) + \frac{k}{2\pi i} \frac{c_\gamma}{j(\gamma, z)} f(z) \right)$$

para toda $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

b) Sea $F = 4E_4 \cdot D(E_6) - 6E_6 \cdot D(E_4)$. Probar que $F \in S_{12}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

c) Deducir la fórmula

$$\tau(n) = \frac{n}{12}(5\sigma_3(n) + 7\sigma_5(n)) + 70 \sum_{m=1}^{n-1} (2n - 5m)\sigma_3(m)\sigma_5(n-m).$$

2. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $F(z) = \sum_{n \geq 0} a(n) q^n$ se tiene

$$T(n)(F)(z) = \sum_{ad=n} \frac{a^{k-1}}{d} \sum_{0 \leq b < d} F\left(\frac{az+b}{d} \right).$$

3. Sea $S = S_{24}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

a) Probar que $\dim(S) = 2$ y que, más aún,

$$S = \langle \Delta^2, \Delta \cdot E_4^3 \rangle.$$

b) Calcular la matriz del operador $T(2)$ en esta base, y verificar que es diagonalizable.

c) Verificar que los autovectores hallados lo son también para el operador $T(3)$, y calcular sus autovalores.

d) Cotejar los autovalores hallados para $T(2)$ y $T(3)$ con la información sobre S en LMFDB.
