Introducción a las Formas Modulares – UMA 2024

Clase 2

---

1. Probar que:

a) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \rangle$.

b) $\Gamma_0(4) = \left\langle -I, T, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

2. Sea Γ un subgrupo de congruencias. Sea $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, y sea

$$\Gamma' = \alpha^{-1} \Gamma \alpha.$$

a) Probar que Γ' es un subgrupo de congruencias.
b) Probar que existe $h \mid N$ (mínimo) tal que $T^h \in \Gamma'$.

3. Hallar el conjunto de cúspides para $\Gamma_0(2)$ y para $\Gamma_0(4)$.

4. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$11\sigma_9(n) = 21\sigma_5(n) + 10\sigma_3(n) + 5040 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_5(n-m).$$

5. Usando que $\dim(M_4(\Gamma_0(4))) = 3$, probar que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$r(n, 8) = 16 \sum_{d \mid n} d^3 - 32 \sum_{d \mid n/2} d^3 + 256 \sum_{d \mid n/4} d^3.$$

Convención: el conjunto de divisores de un racional no entero es el conjunto vacío.

6. Probar que para $k > 2$ par el conjunto

$$\left\{ E_4^a + E_6^b : a, b \geq 0, 4a + 6b = 2k \right\}$$

es una base para $M_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$.
