Introducción a las Formas Modulares – UMA 2024

Clase 1

1. Para $n \in \mathbb{N}$ denotemos

$$r(n,4) = \#\left\{x \in \mathbb{Z}^4 : \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = n\right\}.$$

Probar[1] que $8 \mid r(n,4)$.

2. Se definen los *números de Bernoulli* B_k por

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k \geq 0} B_k \, \frac{t^k}{k!}, \qquad t \in \mathbb{C}.$$

Probar que $B_k = 0$ para todo $k > 1$ impar.

3. Sea $\chi : (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times \to \{\pm 1\}$ *el* caracter no trivial. Sea $k > 2$ un entero. Definimos

$$G_k^\chi(z) = \sum_{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\}} \frac{\chi(d)}{(cz+d)^k}.$$

Hecho: esta serie resulta absoluta y uniformemente convergente en compactos de $\mathcal{H}$.

a) Probar que:

- $G_k^\chi(z+1) = \ G_k^\chi(z)$.
- $G_k^\chi\left(-\frac{1}{z}\right) = \chi(-1) z^k \ G_k^\chi(z)$.
- $G_k^\chi \cdot [\gamma]_k = \chi(a_\gamma) \ G_k^\chi$ para toda $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ con $4 \mid c_\gamma$.

b) Probar que $G_k^\chi = 0$ para k par.

---

[1] Sin usar el teorema de Jacobi.