Práctica 5

Función Zeta y densidades

1. Sea K un cuerpo de números.

A lo largo de este ejercicio usaremos la notación introducida en clase.

Sea $t = r + s - 1$, y sean $u_1, \dots, u_t \in \mathcal{O}_K^\times$. Sea $G = \langle u_1, \dots, u_t \rangle_{\mathbb{Z}}$.

a) Consideremos $\ell : \mathcal{O}_K^\times \to \mathbb{R}^t$, y sea $\Lambda_G = \ell(G)$. Probar que ℓ induce un isomorfismo entre $\mathcal{O}_K^\times / G$ y Λ / Λ_G.

b) Probar que Λ_G es un retículo de dimensión t si y solo si $\mathcal{O}_K^\times / G$ es finito.

c) Definamos el *regulador* $\operatorname{reg}(G)$ tal como lo hacemos en el caso en que $G = \mathcal{O}_K^\times$. Probar que está bien definido.

d) Probar que $\mathcal{O}_K^\times / G$ es finito si y solo si $\operatorname{reg}(G) \neq 0$. Más aún, probar que en tal caso

$$\operatorname{reg}(G) = [\mathcal{O}_K^\times : G] \operatorname{reg}(R).$$

2. Sea K un cuerpo de números con $[K : \mathbb{Q}] = d$, y sea $\mathfrak{m}$ un módulo para K. Probar que existe una constante $\kappa_{\mathfrak{m}} > 0$ tal que para toda $C \in \operatorname{Cl}_K(\mathfrak{m})$ y para todo $t \geq 0$ se tiene que

$$\#\{\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathcal{O}_K : \mathcal{N}(\mathfrak{a}) \leq t\} = \kappa_{\mathfrak{m}} t + O\left(t^{1-\frac{1}{d}}\right).$$

3. Sea K un cuerpo de números.

a) Sea L/K finita, con clausura de Galois M. Probar que el conjunto de primos de K que se parten completamente en L tiene densidad polar $1/[M : K]$.

b) Sea $f \in \mathcal{O}_K[X]$ mónico e irreducible, y sea M/K su cuerpo de descomposición Sea

$$A = \{\mathfrak{p} \trianglelefteq \mathcal{O}_K : f \text{ se factoriza linealmente módulo } \mathfrak{p}\}.$$

Probar que A tiene densidad polar $1/[M : K]$.

4. Sea K un cuerpo de números. Probar que considerar para cada L/K de Galois los primos de K que se parten completamente en L nos da una inyección

$$\{L \text{ extensión galoisiana de } K\} \hookrightarrow \mathcal{P}(\{\mathfrak{p} \trianglelefteq \mathcal{O}_K\}).$$

5. Sea m un entero positivo. Probar que el conjunto

$$A = \{p \in \mathbb{Z} : p \text{ primo}, \ p \equiv -1 \bmod m\}$$

tiene densidad polar $1/\varphi(m)$.

6. Sea a un entero coprimo con 6. Probar que el conjunto

$$A = \{p \in \mathbb{Z} : p \text{ primo}, \ p \equiv a \bmod 24\}$$

tiene densidad polar $1/8$.

7. Calcular las densidades polares de los conjuntos de primos p tales que

a) 2 es un cuadrado módulo p.
b) 2 es un cubo módulo p.
c) 2 es una potencia cuarta módulo p.

8. Sea L/K una extensión cíclica de cuerpos de números, de grado n. Para cada $d \mid n$, sea

$$A_d = \left\{ \mathfrak{p} \trianglelefteq \mathcal{O}_K : \mathfrak{p} \text{ no ramifica y } \mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}} \text{ tiene orden } d \right\}.$$

a) Reflexionar sobre la buena definición del orden de $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}$.
b) Probar que A_d tiene densidad polar $\varphi(d)/n$.

9. Sea L/K una extensión cíclica de cuerpos de números. Para cada r calcular la densidad polar de

$$A_r = \{ \mathfrak{p} \trianglelefteq \mathcal{O}_K : \mathfrak{p} \text{ se factoriza en } \mathcal{O}_L \text{ como producto de } r \text{ primos} \}.$$

Deducir que hay infinitos primos de K inertes en L.

10. Sea $A \subseteq \mathbb{Z}$ un conjunto de ideales primos. Para $t \geq 0$ denotemos

$$A(t) = \#\{ p \in A : p \leq t \}.$$

Supongamos que existe la *densidad natural* de A, esto es

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{A(t)}{\#\{p : p \leq t\}} = \delta.$$

a) Probar que:

$$\sum_{p \in A, p \leq t} \frac{1}{p^s} = \frac{A(t)}{t^s} + s \int_1^t \frac{A(x)}{x^{s+1}} \, \mathrm{d}x.$$

Nota: esto no requiere de la existencia de la densidad natural de A.

b) Usando el teorema de los números primos, probar que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{A(t) \log(t)}{t} = \delta.$$

c) Probar que A tiene densidad de Dirichlet δ.