Práctica 4

El grupo de clases y el grupo de unidades

El grupo de clases

1. Sea $\mathcal{O} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$. Consideramos en $\mathcal{O}$ los ideales

$$\mathfrak{p} = \left\langle 2, 1+\sqrt{-5}\right\rangle,\ \mathfrak{q} = \left\langle 3, 1+\sqrt{-5}\right\rangle,\ \mathfrak{r} = \left\langle 3, 1-\sqrt{-5}\right\rangle.$$

a) Probar que $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ son maximales.
b) Probar que $\langle 2\rangle = \mathfrak{p}^2$.
c) Probar que $\langle 3\rangle = \mathfrak{q}\mathfrak{r}$.
d) Probar que ninguno de los ideales $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ es principal.

2. a) Probar que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ es euclídeo para $d = -1, -2$.
b) Probar que $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right]$ es euclídeo para $d = -3, -7, -11$.
c) Deducir que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ tiene grupo de clases trivial para $d = -1, -2, -3, -7, -11$.

3. a) Sea K un cuerpo con constante de Minkowski $M_K < 2$.
i. Probar que para todo $\alpha \in K$ existe $\beta \in \mathcal{O}_K$ tal que $\left|N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha-\beta)\right| < 1$.
ii. Deducir que $\mathcal{O}_K$ es euclídeo.
b) Probar que $\mathcal{O}_K$ es euclídeo para $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right), \mathbb{Q}\left(\sqrt{13}\right), \mathbb{Q}(\zeta_5)$.

4. Sea p un primo impar.

a) Probar que existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $r^2 + s^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$.
b) Para r, s como en el ítem anterior, consideremos el retículo

$$L = \langle (p,0,0,0), (0,p,0,0), (r,s,1,0), (s,-r,0,1)\rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}^4.$$

i. Probar que si $v \in L$ entonces $\|v\|_2^2 \equiv 0 \pmod p$.
ii. Calcular $\mathrm{vol}(L)$.

c) Probar que p es suma de cuatro cuadrados en $\mathbb{Z}$.

Nota: usando que la norma en el álgebra de cuaterniones de Hamilton es multiplicativa, de (c) se sigue el teorema de Lagrange: todo $n \in \mathbb{N}$ es suma de cuatro cuadrados en $\mathbb{Z}$.

5. Encontrar todos los ideales $\mathfrak{a}$ de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-2}\right]$ con $\mathcal{N}(\mathfrak{a}) = 18$.

6. Sea $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$, con $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. Hallar h_K para cada d con $|d| < 10$.

7. Sea $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{-31}\right)$.
a) Probar que $h_K = 3$.
b) Probar que un primo entero p es de la forma $x^2 + 31y^2$ con $x, y \in \mathbb{Z}$ si y solo si existe $\mathfrak{p} \trianglelefteq \mathcal{O}_K$ primo principal de norma p.
c) Hallar los primeros cinco primos p como en (b).

8. Sea $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{-3}\right)$. Probar que $h_K = 1$.

Nota: K contiene a $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-6}\right)$, cuyo número de clases es 2.

9. Sea K un cuerpo de números. Probar que existe un cuerpo de números L/K tal para todo $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathcal{O}_K$ se tiene que $\mathfrak{a}\mathcal{O}_L \trianglelefteq \mathcal{O}_L$ es principal.

Dar un ejemplo de una tal extensión L/K donde $h_L > 1$.

10. Hallar *todas* las soluciones enteras de la ecuación $x^2 + 19 = y^5$.

11. Sea $d < 0$ un entero libre de cuadrados. Denotemos por h_d al número de clases de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$.

Probar que si d es par y $3 \nmid h_d$, entonces la ecuación

$$y^2 = x^3 + d$$

tiene a lo sumo una solución $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

12. Hallar todas las soluciones enteras de

$$y^2 = x^3 + d$$

para $d = -13, -19, -54, -200$.

El grupo de unidades

13. Sea K un cuerpo de números. Probar que $\mathcal{O}_K^\times$ es finito si solo si $K = \mathbb{Q}$ o K es cuadrático imaginario.

14. Sea K un cuerpo de números de grado n, que admite una inmersión real ρ. Probar que $\rho(\mathcal{O}_K^\times)$ es denso en $\mathbb{R}$ si y solo si $n > 3$ o $n = 3$ y K es totalmente real.

15. Sean K_1, K_2 cuerpos cuadráticos real e imaginario, respectivamente. Sea $K = K_1K_2$. Probar que

$$\left[\mathcal{O}_K^\times : \mu_K \cdot \mathcal{O}_{K_1}^\times\right] \in \{1, 2\}.$$

¿Hay ejemplos de los dos tipos?

16. Sea $n \geq 2$ un entero tal que $4n^3 + 27$ es libre de cuadrados. Sea α tal que $\alpha^3 + n\alpha - 1 = 0$, y sea $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

a) Probar que $\mathcal{O}_K^\times$ tiene rango 1.
b) Probar que α es una unidad fundamental.

17. Sea K un cuerpo cúbico con inmersiones $\rho, \sigma, \overline{\sigma}$, y sea

$$U = \{\alpha \in \mathcal{O}_K^\times : \rho(\alpha) > 0\}.$$

a) Probar que $U \simeq \mathbb{Z}$.
b) Sea $\alpha \in U$, y sea $u = \rho(\alpha)$. Escribamos $u = x^2$ con $x \in \mathbb{R}$. Probar que existe $y \in \mathbb{R}$ con $\sigma(\alpha) = x^{-1}e^{iy}$.
c) Para x fijo, estimar $\Delta\left(1, \alpha, \alpha^2\right)$ como función de y.
d) *(Artin)* Probar si $U = \langle\alpha\rangle_{\mathbb{Z}}$ y $u > 1$, entonces $|\Delta_K| \leq 4u^3 + 24$.