Práctica 2

Dominios de Dedekind

1. Sea $\mathcal{O} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$, y sea K su cuerpo de fracciones. Consideremos los $\mathcal{O}$-módulos

$$\mathfrak{a} = \left\langle 2, 1+\sqrt{-3} \right\rangle \subseteq \mathcal{O}, \;\; \mathfrak{b} = \left\langle \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \right\rangle \subseteq K.$$

a) Probar que $\mathfrak{a} \neq \langle 2 \rangle$, y que $\mathfrak{a}^2 = 2\mathfrak{a}$. Deducir que $\mathfrak{a}$ no es inversible.
b) Probar que $\mathfrak{a}$ es maximal; más aún, que es el único ideal primo que contiene a $\langle 2 \rangle$.
c) Probar que $\langle 2 \rangle$ no es un producto de ideales primos en $\mathcal{O}$.
d) Probar que $\mathfrak{b}^3 = \mathcal{O}$.
e) Probar de (al menos) cuatro maneras distintas que $\mathcal{O}$ no es un dominio de Dedekind.

2. Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados, y sea $p \in \mathbb{N}$ un primo con $p \nmid 2d$. Sea $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$.

Probar que $p\mathcal{O}_K$ es primo si solo si d no es un cuadrado en $\mathbb{F}_p^\times$.

3. Sea $\mathcal{O}$ un dominio en el que todo ideal no nulo se escribe, de manera única, como producto de ideales primos.

a) Probar que todo ideal primo inversible es maximal.
b) Probar que todo ideal no nulo contiene un producto de ideales primos inversibles.
c) Probar que $\mathcal{O}$ es un dominio de Dedekind.

4. *Teorema de aproximación débil.*

Sea $\mathcal{O}$ un dominio de Dedekind. Sean $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \trianglelefteq \mathcal{O}$ primos no nulos distintos dos a dos, y para cada $1 \leq i \leq n$ sea $e_i \in \mathbb{N}_0$.

Probar que existe $\alpha \in \mathcal{O}$ tal que

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{p}_i}(\alpha) = e_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Sugerencia: usar el teorema chino del resto.

5. Sea $\mathcal{O}$ un dominio de Dedekind que tiene un número finito de ideales primos.

Probar que $\mathcal{O}$ es un DIP.

6. Sea $\mathcal{O}$ un dominio de Dedekind, y sea $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathcal{O}$ no nulo.

a) Probar que todo ideal de $\mathcal{O}/\mathfrak{a}$ es principal.
b) Probar que para todo $\alpha \in \mathfrak{a}$ *no nulo* existe $\beta \in \mathfrak{a}$ tal que $\mathfrak{a} = \langle \alpha, \beta \rangle$.

7. Sea $\mathcal{O}$ un dominio de Dedekind con cuerpo de fracciones K.

a) Sea $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathcal{O}$ no nulo. Probar que en toda clase de Cl_K hay un ideal entero coprimo con $\mathfrak{a}$.
b) Sea $\mathcal{P}$ un conjunto *finito* de primos de $\mathcal{O}$. Probar que Cl_K está generado por las clases de los primos $\mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p} \notin \mathcal{P}$.