Práctica 8
Medidas Complejas y Teorema de Radon-Nikodym

Ejercicio 1. Sean $(\Omega, \mathcal{M})$ un espacio medible y $\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ una medida compleja.

(a) Se define la *variación* de λ como la función $|\lambda| : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ dada por

$$|\lambda|(E) = \sup \sum\nolimits_n |\lambda(E_n)|,$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones numerables $(E_n)_n$ de E en conjuntos medibles disjuntos. Probar que $|\lambda|$ es una medida no negativa y finita.

(b) Probar que el conjunto

$$M(\Omega) = \{\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{C} : \lambda \text{ es una medida compleja}\}$$

es un espacio de Banach con la norma *variación total* dada por

$$\|\lambda\| = |\lambda|(\Omega).$$

Ejercicio 2. Sea μ la medida de contar en $\mathbb{R}$ y sea m la medida de Lebesgue. Probar que $m \ll \mu$ pero no existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifique

$$m(E) = \int_E f \, d\mu \quad \text{para todo } E \subset \mathbb{R} \text{ medible.}$$

¿Por qué esto no contradice el Teorema de Radon-Nikodym?

Ejercicio 3. Sean λ y μ medidas no negativas sobre $(\Omega, \mathcal{M})$.

(a) Asumiendo $\lambda(\Omega) < \infty$, probar que $\lambda \ll \mu$ si y sólo si

$$\forall \epsilon > 0 \, : \, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \, : \, \mu(E) < \delta \; \Rightarrow \; \lambda(E) < \epsilon.$$

(b) Demostrar que la hipótesis $\lambda(\Omega) < \infty$ es necesaria en (a).

Sugerencia : tomar μ como la medida de Lebesgue en $(0, 1)$ y λ dada por $d\lambda = t^{-1} d\mu$.

Ejercicio 4. En $\mathbb{R}^n$ considerar una medida de Borel compleja λ absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue m. Probar que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\frac{d\lambda}{dm}(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\lambda(B(x, r))}{m(B(x, r))},$$

donde $\frac{d\lambda}{dm}$ es la derivada de Radon-Nikodym de λ respecto de m.

Ejercicio 5. Sea μ una medida con signo definida en la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mu((-\infty, x])$. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) La función f es de variación acotada y continua por la derecha.

Sugerencia : notar que f es creciente cuando μ es no negativa.

(b) Se tiene $\mu \ll m$ si y sólo si f es absolutamente continua y en ese caso $\frac{d\mu}{dm} = f'$.

(c) Se tiene $\mu \perp m$ si y sólo si $f' = 0$ en casi todo punto respecto de m.

Ejercicio 6. Sean $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finita, $F \subset \mathbb{C}$ un subconjunto cerrado y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ una función en $L^1(\mu)$. Probar que si para todo $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) > 0$ se tiene

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E g(x)\, d\mu(x) \in F$$

entonces $g(x) \in F$ para casi todo x respecto de μ.

Ejercicio 7. Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medida. Un conjunto medible $A \in \mathcal{M}$ es un *átomo* para μ si $\mu(A) > 0$ y para todo $E \subset A$ medible se tiene $\mu(E) = \mu(A)$ o $\mu(E) = 0$. Si μ no tiene átomos decimos que μ es una medida *no atómica*.

(a) Probar que si $\{x\} \in \mathcal{M}$ y $\mu(\{x\}) > 0$ entonces $\{x\}$ es un átomo de μ. Mostrar con un ejemplo que no todos los átomos son de esta forma (singletons).

(b) Probar que si μ es no atómica entonces verifica una propiedad de los valores intermedios:

$$\text{para todo } A \in \mathcal{M} \text{ y para todo } 0 \leq t \leq \mu(A) \text{ existe } B \subset A \text{ medible con } \mu(B) = t.$$

Sugerencia : para la parte (b) notar que

$$\sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{M},\, B \subset A\} \;\leq\; t \;\leq\; \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{M},\, B \supset A\},$$

probar que el supremo y el ínfimo se alcanzan y concluir que coinciden con t.

Ejercicio 8. Sean $(\Omega, \mathcal{M})$ un espacio medible y $\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ una medida compleja.

(a) Probar que existe una *descomposición polar* de λ, i.e. existe $h \in L^1(|\lambda|)$ con

$$\lambda(E) = \int_E h\, d|\lambda| \quad \text{para todo } E \in \mathcal{M}$$

y $|h| = 1$ en casi todo punto de Ω respecto de $|\lambda|$. Deducir que h está unívocamente definida en casi todo punto respecto de $|\lambda|$.

(b) Dada $f \in L^1(|\lambda|)$ se define $\phi_f : M(\Omega) \to \mathbb{C}$ por

$$\phi_f(\lambda) = \int_\Omega f\, d\lambda = \int_\Omega f\, h\, d|\lambda|.$$

Probar que ϕ_f es un funcional lineal acotado de $M(\Omega)$. ¿Cuál es su norma?

Ejercicio 9. Sean $(\Omega, \mathcal{M})$ un espacio medible y $\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una medida con signo.

(a) Probar el *Teorema de descomposición de Jordan*: existen únicas medidas no negativas λ^+, λ^- tales que $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ y $|\lambda| = \lambda^+ + \lambda^-$.

(b) Probar el *Teorema de descomposición de Hahn*: existen conjuntos $P, N \in \mathcal{M}$ tales que

i) $\Omega = P \sqcup N$ y $P \cap N = \emptyset$;

ii) P es un *conjunto positivo*, i.e. para todo $E \subset P$ medible se tiene $\lambda(E) \geq 0$;

iii) N es un *conjunto negativo*, i.e. para todo $E \subset N$ medible se tiene $\lambda(E) \leq 0$.

Probar que si $P', N' \in \mathcal{M}$ tienen estas mismas propiedades entonces $P \Delta P'$ y $N \Delta N'$ son *conjuntos nulos*, i.e. todos sus subconjuntos medibles tienen medida cero.

(c) Probar que λ^+ y λ^- están concentradas en P y N respectivamente.

Ejercicio 10. Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita. Para cada $f : \Omega \to \mathbb{C}$ en $L^1(\Omega, \mu)$ definimos una medida compleja $\lambda_f \in M(\Omega)$ por

$$\lambda_f(E) = \int_E f \, d\mu \quad \text{para cada } E \in \mathcal{M}.$$

(a) Probar que la asignación $f \mapsto \lambda_f$ define un *isomorfismo isométrico* (i.e. que preserva normas) entre $L^1(\mu)$ y el subespacio de $M(\Omega)$ formado por las medidas λ con $\lambda \ll \mu$.

(b) Dar una expresión integral para $|\lambda_f|$ y escribir la descomposición polar de λ_f.

(c) Asumiendo $f : \Omega \to \mathbb{R}$ hallar la descomposición de Jordan de λ_f.

Ejercicio 11. Dada una medida compleja μ definida en la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ se define su *transformada de Fourier* como la función $T_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dada por

$$T_\mu(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} \, d\mu(x).$$

(a) Mostrar que T_μ está bien definida y que es una función acotada.

(b) Probar que si μ es absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue entonces se verifica el Lema de Riemann-Lebesgue, i.e. $\lim_{\xi \to \infty} T_\mu(\xi) = 0$.

(c) Mostrar que lo probado en (b) no vale si μ no es absolutamente continua.