

PRÁCTICA 7

DIFERENCIACIÓN

En esta práctica notamos $L^1_{loc}(E)$ al conjunto de funciones *localmente integrables* sobre un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^n$. Precisamente,

$$L^1_{loc}(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{C} : f \in L^1(K) \text{ para todo } K \subset E \text{ compacto}\}.$$

Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ notamos Mf a la *función maximal de Hardy-Littlewood* dada por

$$Mf(x) = \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f| : Q \text{ es un cubo centrado en } x \right\}.$$

Ejercicio 1. Modificar la definición de la función maximal de Hardy-Littlewood cambiando los cubos Q centrados en x por alguna de estas familias de conjuntos:

- i) cubos Q que contienen a x , ii) bolas B que contienen a x , iii) bolas B centradas en x .

Probar que esta nueva función maximal de Hardy-Littlewood $\widetilde{M}f$ es equivalente a Mf en el sentido de que existen constantes $C_1, C_2 > 0$ que sólo dependen de n y verifican

$$C_1 Mf \leq \widetilde{M}f \leq C_2 Mf \quad \text{para toda } f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Ejercicio 2. Probar las siguientes afirmaciones.

- (a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$ entonces $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.
 (b) Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entonces Mf es semicontinua inferiormente.

Ejercicio 3. Demostrar las siguientes proposiciones.

- (a) Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es medible de diámetro finito entonces existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que $C_1|E||x|^{-n} \leq M\chi_E(x) \leq C_2|E||x|^{-n}$ para $\|x\|$ suficientemente grande.
 (b) Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ no es nula en casi todo punto entonces existe $C > 0$ con $Mf(x) \geq C\|x\|^{-n}$ para $\|x\| \geq 1$ y por lo tanto $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio 4. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Probar las siguientes afirmaciones.

- (a) Si $1 \leq p < \infty$ entonces existe una constante $C > 0$ independiente de f con

$$|\{Mf > \alpha\}| \leq \frac{C}{\alpha} \int_{\{|f| \geq \frac{\alpha}{2}\}} |f(x)| dx \quad \text{para todo } \alpha > 0.$$

Sugerencia : considerar $g = f \chi_{\{|f| \geq \frac{\alpha}{2}\}}$ y usar que $|f| \leq |g| + \frac{\alpha}{2}$.

- (b) Si $1 < p \leq \infty$ entonces $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y además se tiene $\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p$ para alguna constante $C_p > 0$ que no depende de f .

Ejercicio 5. Dada una familia $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in I}$ de conjuntos medibles acotados de $\mathbb{R}^n$ y dado $x \in \mathbb{R}^n$ decimos que $\mathcal{S}$ se *contrae regularmente a x* si $\mathcal{S}$ verifica:

- i) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $S_i \in \mathcal{S}$ con $|S_i| < \varepsilon$.
- ii) Existe una constante $k > 0$ tal que para todo $S_i \in \mathcal{S}$ vale que $|Q_i| \leq k|S_i|$, donde Q_i denota el cubo más pequeño con centro en x que contiene a S_i .

Notar que los conjuntos S_i no necesitan contener a x para que $\mathcal{S}$ verifique esta definición.

- (a) Comprobar que las tres familias de conjuntos del Ejercicio 1 se contraen regularmente a x .
- (b) Probar que si $\mathcal{S}$ se contrae regularmente a x entonces existe una constante $C > 0$ con

$$\sup_{S_i \in \mathcal{S}} \frac{1}{|S_i|} \int_{S_i} |f(y)| dy \leq CMf(x)$$

para toda función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

- (c) Probar que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entonces para todo punto de Lebesgue x de f se tiene

$$\lim_{|S_i| \rightarrow 0} \frac{1}{|S_i|} \int_{S_i} |f(y) - f(x)| dy = 0$$

si $\mathcal{S}$ es una familia que se contrae regularmente a x .

Ejercicio 6. Sea $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ medible y acotada con $\text{sop}(\phi) \subset B(0, 1)$ y $\|\phi\|_1 = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$ sea $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \phi(\frac{x}{\varepsilon})$. Probar que para toda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * \phi_\varepsilon)(x) = f(x)$$

en todo punto de Lebesgue x de f .

Ejercicio 7. Fijando una función $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ medible, acotada y de soporte compacto, considerar $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} K(\frac{x}{\varepsilon})$ para $\varepsilon > 0$. Probar que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{\varepsilon > 0} |f * K_\varepsilon(x)| \leq CMf(x)$$

para toda función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 8. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ una función que verifica $\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx = 0$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Probar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f \equiv c$ a.e.

DIFERENCIACIÓN EN $\mathbb{R}$ Y FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Calcular las cuatro derivadas de Dini para f en $x_0 = 0$.

Ejercicio 10. Hallar $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ creciente, continua y tal que

$$\int_0^1 f'(x) dx < f(1) - f(0).$$

Ejercicio 11. Siendo $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y absolutamente continua, notemos $c = g(a)$ y $d = g(b)$. Demostrar las siguientes afirmaciones.

- (a) Si $G \subset [c, d]$ es abierto entonces $|G| = \int_{g^{-1}(G)} g'(x) dx$.
- (b) Si $E \subset [c, d]$ tiene medida cero y $H = \{x : g'(x) \neq 0\}$ entonces $|g^{-1}(E) \cap H| = 0$.
- (c) Si $E \subset [c, d]$ es medible entonces $F = g^{-1}(E) \cap H$ es medible y además se tiene

$$|E| = \int_F g'(x) dx = \int_a^b \chi_E(g(x)) g'(x) dx.$$

- (d) Si $f : [c, d] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible y no negativa entonces $(f \circ g) g' : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible y vale

$$\int_c^d f(y) dy = \int_a^b f(g(x)) g'(x) dx.$$

- (e) La igualdad de (d) también vale para $f : [c, d] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrable.

Ejercicio 12. Sean $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ absolutamente continua y g integrable sobre $[a, b]$. Probar que

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b G(x)F'(x) dx,$$

donde $G(x) = G(a) + \int_a^x g(t) dt$ para cada $x \in [a, b]$.

Ejercicio 13. Probar que si f es de variación acotada en $[a, b]$ entonces existen g absolutamente continua y h singular tales que $f = g + h$, siendo g y h únicas salvo constantes aditivas.

Ejercicio 14. Sea $(f_n)_{n \geq 1} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones monótonas crecientes tales que la serie $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge para todo $x \in [a, b]$. Probar que la función suma $\sum_n f_n$ es derivable en casi todo punto de $[a, b]$ y para casi todo x se tiene

$$\left(\sum_{n \geq 1} f_n(x) \right)' = \sum_{n \geq 1} f'_n(x).$$

Ejercicio 15. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de variación acotada y sea $V : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $V(x) = V_a^x(f)$. Probar que $V' = |f'|$ en casi todo punto con la siguiente estrategia.

- (a) Probar primero que para toda partición $a = x_0 < \dots < x_n = b$ puede tomarse $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(a) = 0$ y las siguientes dos propiedades:

- i)* vale $g(x_{j+1}) - g(x_j) = |f(x_{j+1}) - f(x_j)|$ para cada $0 \leq j \leq n-1$,
- ii)* existen constantes $c_0, \dots, c_{n-1}$ tales que para cada $0 \leq j \leq n-1$ vale

$$g|_{[x_j, x_{j+1}]} = f|_{[x_j, x_{j+1}]} + c_j \quad \text{o} \quad g|_{[x_j, x_{j+1}]} = -f|_{[x_j, x_{j+1}]} + c_j.$$

(b) Probar que para toda función g como en (a) se tiene

$$|g'| = |f'| \text{ a.e. , } \quad g(b) = \sum_{j=1}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)| \quad \text{y} \quad V - g \text{ monótona creciente.}$$

(c) Considerar una sucesión de funciones $(g_k)_{k \geq 1}$ como en (a) verificando $\sum_k V(x) - g_k(x) < \infty$ para casi todo x en $[a, b]$ y aplicar el Ejercicio 13.

Ejercicio 16. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de variación acotada y sea $V : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $V(x) = V_a^x(f)$. Demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) La función f es continua si y sólo si V lo es.

(b) La función f es absolutamente continua si y sólo si V lo es. En tal caso se tiene

$$V(x) = \int_a^x |f'(y)| dy \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

(c) Se tiene $\int_a^b |f'(x)| dx \leq V_a^b(f)$ y la igualdad vale si y sólo si f es absolutamente continua.

Ejercicio 17. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función absolutamente continua.

(a) Probar que si $N \subset [a, b]$ tiene medida nula entonces $f(N)$ tiene medida nula.

(b) Concluir que la imagen por f de un conjunto medible es un conjunto medible.