Práctica 6
Espacios L^p

Ejercicio 1. Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ medible y $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$.

(a) Probar que si E tiene medida finita entonces $L^{p_2}(E) \subset L^{p_1}(E)$.

(b) Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede no valer si E tiene medida infinita.

(c) Probar que vale la recíproca de la afirmación en (a).

Ejercicio 2. Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ medible de medida finita y $f : E \to \mathbb{C}$ medible.

(a) Probar que $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

(b) Mostrar que la igualdad en (a) puede no valer si la medida de E es infinita.

Ejercicio 3. Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ medible y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible. Probar que para $1 \le p \le \infty$ se tiene

$$\|f\|_p = \sup_{g \in \mathcal{D}_f(E)} \int_E f(x)g(x)\,dx,$$

donde $\mathcal{D}_f(E) = \{g \in L^{p'}(E) : \|g\|_{p'} \le 1 \text{ y } \int_E fg\,dx \text{ existe}\}$ y p' es el *conjugado* de p, i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Ejercicio 4. Siendo $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ medible, probar que para $1 \le r \le p \le s < \infty$ se tiene

$$\|f\|_p^p \le \|f\|_r^r + \|f\|_s^s.$$

Ejercicio 5. Demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) Si $f_n \to f$ en $L^p(E)$ para algún $1 \le p \le \infty$ entonces $f_n \xrightarrow{m} f$ sobre E.

(b) Si $f_n \to f$ en $L^p(E)$, $g_n \to g$ en $L^{p'}(E)$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces $f_n g_n \to fg$ en $L^1(E)$.

(c) Si $|E| < \infty$ y $f_n \to f$ en $L^\infty(E)$ entonces $f_n \to f$ en $L^p(E)$ para todo $1 \le p \le \infty$.

Ejercicio 6. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = e^n \chi_{[0,n^{-1}]}(x)$. Mostrar que la sucesión $(f_n)_n$ converge puntualmente pero no converge en $L^p([0,1])$ para ningún $1 \le p \le \infty$.

Ejercicio 7. Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ medible y $(f_n)_n \subset L^p(E)$ con $1 \le p < \infty$.

(a) Probar que si $f \in L^p(E)$ y $\|f_n - f\|_{L^p(E)} \to 0$ entonces $\|f_n\|_{L^p(E)} \to \|f\|_{L^p(E)}$.

(b) Probar que si $f_n \to f$ en casi todo punto de E entonces vale la implicación

$$\|f_n\|_{L^p(E)} \to \|f\|_{L^p(E)} \quad \Longrightarrow \quad \|f_n - f\|_{L^p(E)} \to 0.$$

Sugerencia : verificar que la sucesión $(g_n)_n$ dada por

$$g_n = 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$$

satisface las hipótesis del Lema de Fatou y aplicarlo.

Ejercicio 8. Sea $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible y $C > 0$ tales que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|\, dy \leq C \quad \text{y} \quad \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|\, dx \leq C.$$

Probar que si $1 \leq p < \infty$ entonces el operador $K : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$K(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y) f(y)\, dy$$

está bien definido y resulta continuo.

Ejercicio 9. Para $1 \leq p < \infty$ y $E \subset \mathbb{R}^n$ medible tal que $0 < |E| < \infty$ definimos

$$N_p[f] = \left(\frac{1}{|E|} \int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) Se tiene $N_{p_1}[f] \leq N_{p_2}[f]$ para $p_1 < p_2$.

(b) La función N_p es subaditiva, i.e. $N_p[f+g] \leq N_p[f] + N_p[g]$.

(c) Si p' es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces $\frac{1}{|E|} \int_E |fg|\, dx \leq N_p[f] N_{p'}[g]$.

(d) Se tiene $\lim\limits_{p\to\infty} N_p[f] = \|f\|_\infty$.

Ejercicio 10. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ medible con $0 < |E| < \infty$ y sea $f \in L^\infty(E)$ con $\|f\|_\infty > 0$. Definiendo $a_k = \int_E |f|^k\, dx$ para cada $k \in \mathbb{N}$, demostrar que se tiene $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \|f\|_\infty$.

Ejercicio 11. Sea $1 < p < \infty$ y sea $(f_n)_n \subset L^p$ tal que $f_n \to f$ en casi todo punto.

(a) Probar que si $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$ entonces $f \in L^p$ y además vale

$$\int f_n(x) g(x)\, dx \longrightarrow \int f(x) g(x)\, dx$$

para toda $g \in L^{p'}$ con p' el conjugado de Hölder de p.

(b) ¿Sigue valiendo el resultado probado en (a) si se toma $p = 1$?

Ejercicio 12. Probar que si $f_n \to f$ en L^p para cierto $1 \leq p < \infty$ y $g_n \to g$ puntualmente con $\sup_n \|g_n\|_\infty < \infty$ entonces $f_n g_n \to fg$ en L^p.

Ejercicio 13. Demostrar que si $\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r}$ con $1 \leq p_i, r \leq \infty$ entonces vale una desigualdad de Hölder generalizada de la forma $\left\| \prod_{i=1}^k f_i \right\|_r \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{p_i}$.

Ejercicio 14. Considerar un exponente $0 < p < 1$ y un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^n$ con $|E| > 0$.

(a) Mostrar que la bola

$$B = \{f \in L^p(E) \,:\, \|f\|_{L^p(E)} < 1\} = \{f \in L^p(E) \,:\, \textstyle\int_E |f|^p\, dx < 1\},$$

no es un subconjunto convexo de $L^p(E)$.

(b) Concluir que $\|\cdot\|_{L^p(E)}$ no es una norma en $L^p(E)$.

Ejercicio 15. Para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ medible considerar la función de distribución ω dada por

$$\omega(\alpha) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}| \quad \text{para cada } \alpha > 0.$$

(a) Probar que si $\omega(\alpha) \le c(1+\alpha)^{-p}$ entonces $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ para $0 < r < p$.

(b) Para $0 < p < \infty$ probar la equivalencia $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \iff \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{kp}\omega(2^k) < \infty$ y mostrar que existen constantes positivas c_1, c_2 independientes de f tales que

$$c_1 \left[\sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} 2^{kp}\omega(2^k)\right]^{\frac{1}{p}} \;\le\; \|f\|_p \;\le\; c_2 \left[\sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} 2^{kp}\omega(2^k)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Ejercicio 16. Sea $E = \left[0, \frac{1}{2}\right] \subset \mathbb{R}$.

(a) Fijando $1 \le p < \infty$, probar que $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}(\ln(x^{-1}))^{-\frac{2}{p}} \in L^p(E)$ pero $f \notin L^r(E)$ si $r > p$.

(b) Probar que $g(x) = \ln(x^{-1}) \in L^p(E)$ para $1 \le p < \infty$ pero $g \notin L^\infty(E)$.

Ejercicio 17. Siendo $E = \mathbb{R}_{\ge 0}$ y $f : E \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}(1 + |\ln(x)|)^{-1}$, mostrar que $f \in L^2(E)$ mientras que $f \notin L^p(E)$ si $1 \le p < \infty$ y $p \ne 2$.

Ejercicio 18. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \le p < \infty$, probar las siguientes afirmaciones.

(a) Para $\|h\| \to \infty$ se tiene $\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) + f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_p$.

(b) Para $\|h\| \to 0$ se tiene $\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) + f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 2\|f\|_p$.

Ejercicio 19. Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ con $1 \le p, p' \le \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(a) Probar que la convolución $f * g$ está bien definida y es uniformemente continua y acotada.

(b) Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ medible con $0 < |E| < \infty$. Tomando $f = \chi_E$ y $g = \chi_{-E}$, estudiar $f * g$ para concluir que $D(E) = \{x - y : x, y \in E\}$ tiene interior no vacío.

Ejercicio 20. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable, para cada $h > 0$ sea $f_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_h(t) = \frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2} f(x)\,dx.$$

Asumiendo $f \in L^p$ para algún $1 \le p \le \infty$ probar las siguientes afirmaciones.

(a) Se tiene $f \in L^\infty \cap L^p$ con $\|f_h\|_\infty \le h^{-1/p}\|f\|_p$ y $\|f_h\|_p \le \|f\|_p$.

(b) Para cada $r \ge p$ se tiene $\|f_h\|_r \le h^{1/r-1/p}\|f\|_p$.

(c) Si $1 \le p < \infty$ entonces $\|f_h - f\|_p \to 0$ para $h \to 0$.

Ejercicio 21. Sean $1 < p, p' < \infty$ exponentes conjugados y sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Probar que si una sucesión $(f_k)_k \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ es tal que para toda $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ vale

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx$$

entonces $\|f\|_p \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_p$.

Ejercicio 22. Dados $E \subset \mathbb{R}^n$ medible y $1 \leq p < \infty$ definimos

$$L^p_*(E) = \Big\{ f : E \to \overline{\mathbb{R}} \text{ medible} : \sup_{t>0} \Big[t\,|\{x \in E : |f(x)| > t\}|^{\frac{1}{p}} \Big] < \infty \Big\}.$$

(a) Probar que $L^p(E) \subset L^p_*(E)$.

(b) Mostrar que si E tiene medida finita y $1 < p < \infty$ entonces $L^p_*(E) \subset L^1(E)$.

Ejercicio 23. Dados $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $f \in L^p([a,b])$ con $1 < p < \infty$ se define $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Probar que para toda partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ del intervalo $[a,b]$ se tiene

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{|F(x_{i+1}) - F(x_i)|^p}{(x_{i+1} - x_i)^{p-1}} \leq K$$

para alguna constante $K \geq 0$ que sólo depende de f.