Práctica 5
Teoremas de Fubini y de cambio de variables

Ejercicio 1. Probar las siguientes proposiciones.

(a) Si $E \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto medible con secciones $E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ de medida nula para casi todo $x \in \mathbb{R}$, entonces E tiene medida nula y también son de medida nula sus secciones $E_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ para casi todo $y \in \mathbb{R}$.

(b) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible y no negativa con la propiedad de que para casi todo $x \in \mathbb{R}$ la función $y \mapsto f(x, y)$ resulta finita en casi todo punto, entonces también es finita en casi todo punto la función $x \mapsto f(x, y)$ para casi todo $y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funciones medibles.

(a) Probar que $s : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula $s(x, y) = f(x) + g(y)$ es medible.

(b) Probar que $p : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula $h(x, y) = f(x)g(y)$ es medible.

(c) Concluir que si $E_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $E_2 \subset \mathbb{R}^m$ son medibles entonces su producto cartesiano

$$E_1 \times E_2 = \{(x, y) : x \in E_1\, ,\, y \in E_2\}$$

es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^{n+m}$ y verifica $|E_1 \times E_2| = |E_1||E_2|$.

Ejercicio 3. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ medible y sea $h : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = f(x) - f(y)$. Probar que h es integrable si y sólo si f lo es.

Ejercicio 4. Probar que $E \subset [0, 1]^2$ es no medible si $|E_x| = |[0, 1] - E_y| = 0$ para todo $(x, y) \in [0, 1]^2$.

Ejercicio 5. Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible no negativa. Se define la *función de distribución* de f como la función $\omega : \mathbb{R}_{>0} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por la fórmula

$$\omega(\alpha) = |\{x \in E : f(x) > \alpha\}|.$$

Demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) La función ω es monótona decreciente y continua a derecha.

(b) Para todo $\alpha_0 > 0$ se tiene $\lim_{\alpha \to \alpha_0^-} \omega(\alpha) \geq |\{x \in E : f(x) \geq \alpha_0\}|$.

(c) Si ω es continua en α_0 entonces $|\{x \in E : f(x) \geq \alpha_0\}| = |\{x \in E : f(x) > \alpha_0\}|$.

(d) Vale $\displaystyle\int_E f(x)\, dx = \int_0^\infty \omega(\alpha)\, d\alpha$.

(e) Para todo $p > 0$ vale $\displaystyle\int_E (f(x))^p dx = \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\omega(\alpha)\, d\alpha$.

Ejercicio 6. Sean $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ medible y $\alpha \in (0,1)$ tales que

$$|f(t)| \leq t^\alpha/(1+t) \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Probar que la función $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ dada por $G(x,t) = e^{-xt} f(t)$ es medible e integrable.

Ejercicio 7. Sea $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por la fórmula $k(x,y) = xy$.

(a) Probar que $k^{-1}(E)$ es medible para todo $E \subset \mathbb{R}$ medible.

(b) Deducir que $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $h(x,y) = f(xy)$ es medible si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lo es.

Ejercicio 8. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ medibles y $h : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida como $h(x) = |(A - x) \cap B|$. Probar que h es medible y satisface $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx = |A||B|$.

Ejercicio 9. Probar el Teorema de Fubini para funciones que toman valores complejos.

Ejercicio 10. Para $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable se define su *transformada de Fourier* como la función

$$T_f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \quad \text{dada por} \quad T_f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x)\,dx.$$

Probar que T_f está bien definida y demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) La función T_f es acotada y uniformemente continua.

(b) Vale el *Lema de Riemann-Lebesgue*, i.e. $\lim_{\xi \to \infty} T_f(\xi) = 0$.

(c) Si $f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$ con cada $f_i : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable entonces $T_f(\xi) = \prod_{i=1}^n T_{f_i}(\xi_i)$.

(d) Si $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es integrable entonces $T_{f*g} = T_f T_g$.

Ejercicio 11. Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ integrable con $f \equiv 0$ sobre $\mathbb{R} - [a,b]$. Fijando un $h > 0$ se define $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ por la fórmula

$$g(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt.$$

Probar que g es medible y satisface $\int_a^b g\,dx \leq \int_a^b f\,dx$.

Ejercicio 12. Sea $F \subset \mathbb{R}$ un cerrado contenido en un intervalo $[a,b]$ y notemos $d(\,\cdot\,, F)$ a la función que mide la distancia a F. Dado $\lambda > 0$ definimos $M_\lambda : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ por la fórmula

$$M_\lambda(x) = \int_a^b \frac{d(y,F)^\lambda}{|x-y|^{1+\lambda}}\,dy.$$

(a) Probar que M_λ es medible.

(b) Probar que $M_\lambda(x) = +\infty$ para todo $x \in [a,b] - F$.

(c) Probar que M_λ es integrable sobre F y satisface la estimación

$$\int_F M_\lambda(x)\,dx \leq \frac{2}{\lambda}\left|[a,b]-F\right|.$$

(d) Deducir que M_λ es finita en casi todo punto de F.

Ejercicio 13. Probar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Sugerencia : observar que para todo $x>0$ vale la identidad $x^{-1}=\int_0^{+\infty} e^{-tx}dt$.

Ejercicio 14. Probar que para toda función medible $f:\mathbb{R}^2\to\overline{\mathbb{R}}$ no negativa se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)} f(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta))\,r\,d(r,\theta)$$

y deducir que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

Ejercicio 15. Sea $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y sea $Q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ la forma cuadrática $Q(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$.

(a) Probar que $f(x)=e^{-Q(x)}$ es integrable en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si A es definida positiva.

(b) Probar que en tal caso se tiene $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}$.

Ejercicio 16. Se dice que $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es *radial* si existe $g:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=g(\|x\|)$.

(a) Probar que g está unívocamente definida c.t.p. y que g resulta medible si f lo es.

(b) Probar que existe una constante $C_n>0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = C_n\int_0^{+\infty} r^{n-1}g(r)\,dr$$

para toda $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ radial no negativa o integrable.

Ejercicio 17. ¿Para qué valores de $p\in\mathbb{R}$ es $\|x\|^p$ integrable sobre la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$?

Ejercicio 18. Para cada $n\in\mathbb{N}$ calcular $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+\|x\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,dx$.

Ejercicio 19. Demostrar que la integral biparamétrica

$$\int_0^1 x^{p-1}|\log(x)|^{q-1}dx$$

es finita para $p,q>0$ y expresar su valor en términos de la función Γ.

Sugerencia : considerar el cambio de variables $x=e^{-t}$.