Práctica 4
Integral de Lebesgue

Para esta práctica suponemos fijado un espacio de medida $(X, \mathcal{M}_X, \mu)$ en el que deben pensarse todos los ejercicios sobre funciones de X en $\overline{\mathbb{R}}$. Para los ejercicios sobre funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\overline{\mathbb{R}}$ asumimos la medida y la σ-álgebra de Lebesgue, salvo indicación en contrario.

Ejercicio 1. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible y $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible.

(a) Probar que si f es no negativa entonces para todo $v \in \mathbb{R}^n$ valen

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+v)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_E f(x+v)\,dx = \int_{E+v} f(x)\,dx.$$

(b) Probar que si f es no negativa entonces para todo $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ valen

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(ax)\,dx = \frac{1}{|a|^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_E f(ax)\,dx = \frac{1}{|a|^n}\int_{aE} f(x)\,dx.$$

(c) Probar que las igualdades de (a) y (b) también valen cuando f es integrable sobre $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 2. Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable y tal que $\displaystyle\int_E f\,d\mu = 0$ para todo $E \in \mathcal{M}_X$. Probar que se tiene $f = 0$ en casi todo punto de X.

Ejercicio 3. Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable y tal que

$$\left|\int_X f(x)\,d\mu(x)\right| = \int_X |f(x)|\,d\mu(x).$$

Mostrar que f tiene signo constante en casi todo X.

Ejercicio 4. Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable y sea $(f_n)_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una sucesión de funciones integrables.

(a) Probar que si $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n(x) - f(x)|\,d\mu(x) = 0$ entonces $f_n \xrightarrow{m} f$ sobre X.

(b) ¿Vale la implicación recíproca?

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R}_{>0} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función integrable.

(a) Probar que existe $(x_n)_n \subset \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

(b) Mostrar que, aun si f es continua, puede existir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}_{>0}$ con

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = +\infty.$$

Ejercicio 6. Probar que para toda $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable se tiene

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\{|x|\geq r\}} |f(x)|\, dx = 0.$$

Ejercicio 7. Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{M}_X, \mu)$, sea $\{E_k\}_{k\in K}$ una familia finita o numerable de subconjuntos medibles de X y sea $\alpha \in \mathbb{N}$.

(a) Probar que existe $k \in K$ con $\#(K)\, \mu(E_k) \geq \alpha\, \mu(X)$ si se verifica que

para todo $x \in X$ el conjunto $A_x = \{k \in K : x \in E_k\}$ tiene al menos α elementos.

Interpretar la desigualdad para $\mu(X)$ y K finitos.

(b) Probar que el conjunto

$$B_\alpha = \{x \in X : x \in E_k \text{ para al menos } \alpha \text{ valores de } k\}$$

es medible y verifica $\mu(B_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{k\in K} \mu(E_k)$.

Ejercicio 8. Considerar el enunciado del Lema de Fatou.

(a) Mostrar que la desigualdad puede ser estricta.

(b) Mostrar que es necesaria la hipótesis de no negatividad para las funciones de la sucesión.

Ejercicio 9. Sea $(f_k)_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una sucesión de funciones integrables que converge en casi todo punto de X a una cierta función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

(a) Probar que si $\sup_k \int_X |f_k|\, d\mu < +\infty$ entonces f es integrable.

(b) Probar que si $0 \leq f_k \leq f$ para todo k entonces $\displaystyle\int_X f\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X f_k\, d\mu$.

Ejercicio 10. Sea $(f_k)_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una sucesión decreciente de funciones medibles no negativas.

(a) Mostrar que si alguna f_k es integrable entonces

$$0 \leq \int_E \left(\lim_{k\to\infty} f_k\right) d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k\, d\mu < +\infty.$$

(b) Integrando $f_k(t) = t^{\frac{1}{k}-1}$ sobre $(1, x)$, deducir a partir de (a) que vale

$$\lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln(x) \quad \text{para todo } x \geq 1.$$

Ejercicio 11. Probar que si $f : [0, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$ es integrable entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx = 0$.

Ejercicio 12. Considerar el Teorema de Convergencia Mayorada (TCM).

(a) Dar una demostración del TCM que utilice el Teorema de Egorov.

(b) Enunciar y probar una versión del TCM para funciones a valores complejos.

Ejercicio 13. Probar que si $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \overline{\mathbb{R}}$ es integrable entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n xg(x)dx = 0$.

Ejercicio 14. Sea $(f_k)_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una sucesión de funciones medibles que converge a f en casi todo punto de X y supongamos que existe $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrable con $|f_k| \leq g$ para todo k.

(a) Definiendo $E_j(\varepsilon) = \bigcup_{k\geq j}\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ para cada $j \in \mathbb{N}$, probar que se tiene $\lim_{j\to\infty} |E_j(\varepsilon)| = 0$ para todo $\varepsilon > 0$.

(b) Deducir que $(f_k)_k$ converge en medida a f.

Ejercicio 15. Sea $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula $g(x) = x^2 \sin(x^{-2})$ y sea $f = g'$. Mostrar que $f \notin L^1(0, 1)$ a pesar de que su integral de Riemann impropia sobre $(0, 1)$ existe y es finita.

Ejercicio 16. Sea $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un *peso*, i.e. una función medible no negativa. Definimos la *medida pesada* μ_w asociada a w por

$$\mu_w(E) = \int_E w(x)\, dx \quad \text{para todo } E \subset \mathbb{R}^d \text{ medible Lebesgue,}$$

lo que suele abreviarse escribiendo $\mu_w = w(x)\, dx$ o $d\mu_w = w(x)\, dx$.

(a) Probar que μ_w está bien definida como medida sobre la σ-álgebra de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$.

(b) Probar que vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mu_w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)w(x)\, dx$$

para toda función medible $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ no negativa o integrable con respecto a μ_w.

(c) Dar condiciones sobre w para que toda función integrable sea μ_w-integrable.

Ejercicio 17. Sea $(X, \mathcal{M}_X, \mu)$ un espacio de medida y sea $T : X \to Y$ una función. Definiendo $\nu = T_\#\mu$ como en el Ejercicio 4 de la Práctica 2, probar las siguientes afirmaciones.

(a) Una función $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{M}_Y$-medible si y sólo si $f \circ T$ es $\mathcal{M}_X$-medible.

(b) Para toda función $\mathcal{M}_Y$-medible $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ no negativa o ν-integrable se tiene

$$\int_X f(T(x))\, d\mu(x) = \int_Y f(y)\, d\nu(y).$$