Práctica 2
Medida en espacios abstractos

Ejercicio 1. Sea X un conjunto no vacío.

(a) Para cada $E \subset X$ definimos $\mu(E) = \text{card}(E)$ si E es finito y $\mu(E) = \infty$ si E es infinito. Probar que esto define una medida μ en $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, conocida como *medida de contar*.

(b) Fijando $x_0 \in X$, para cada $E \subset X$ definimos $\delta_{x_0}(E) = \chi_E(x_0)$. Probar que δ_{x_0} es una medida en $\mathcal{P}(X)$, conocida como *delta de Dirac* (concentrada en x_0).

(c) Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y fijando $A \in \mathcal{M}$, definimos $\mu_A(E) = \mu(A \cap E)$ para cada $E \in \mathcal{M}$. Probar que μ_A es una medida en $\mathcal{M}$.

(d) Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y sean $\mu_1, \dots, \mu_n$ medidas en $\mathcal{M}$. Probar que si $a_1, \dots, a_n$ son constantes no negativas entonces $\mu = a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n$ es una medida en $\mathcal{M}$.

Ejercicio 2. Sea $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto infinito numerable y sea $(w_n)_{\in\mathbb{N}}$ una sucesión que toma valores en $[0, +\infty]$. Para cada $E \subset X$ definimos

$$\mu(E) = \sum_{x_n \in E} w_n.$$

Probar que $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ resulta ser un espacio de medida. Recíprocamente, verificar que toda medida en el espacio medible $(X, \mathcal{P}(X))$ es de esta forma.

Ejercicio 3. Decidir la veracidad de las siguientes afirmaciones en el espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

(a) Si $(E_j)_{j\geq 1} \subset \mathcal{M}$ entonces $\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j)$.

(b) Si $(E_j)_{j\geq 1} \subset \mathcal{M}$ entonces $\mu(\limsup E_j) \geq \limsup \mu(E_j)$.

Ejercicio 4. Si $(X, \mathcal{M}_X, \mu)$ es un espacio de medida y $T : X \to Y$ es una función, definimos

$$\mathcal{M}_Y = \{E \subset Y : T^{-1}(E) \in \mathcal{M}_X\} \quad \text{y} \quad \nu(E) = \mu(T^{-1}(E)) \text{ para cada } E \in \mathcal{M}_Y.$$

Probar que $\mathcal{M}_Y$ es una σ-álgebra y que ν es una medida en $\mathcal{M}_Y$. La medida ν se conoce como el *push-forward* de μ por T y usualmente se nota $T_\#\mu$. Esta construcción resulta útil para definir medidas a partir de medidas conocidas, como lo ilustran los siguientes dos ejercicios.

Ejercicio 5. Considerar el círculo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y la función $T : [0, 2\pi) \to S^1$ dada por

$$T(\theta) = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \,\operatorname{sen}(\theta).$$

Siendo m la medida de Lesbesgue en $[0, 2\pi)$, probar que la medida $\nu := T_\# m$, conocida como *medida de Lebesgue en el círculo*, satisface la propiedad de invariancia por rotaciones:

$$\nu(\alpha \cdot E) = \nu(E) \quad \text{para todo } \alpha \in S^1 \text{ y todo } E \subset S^1 \text{ medible respecto de } \nu.$$

Ejercicio 6. Considerar la función $T : [0, 1) \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ que a cada $x \in [0, 1]$ le asigna la secuencia de dígitos $(x_n)_n$ de su desarrollo en base 2. Así, $T(x) = (x_n)_n$ para $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n}$, tomando siempre un desarrollo de x que no termine con una cola infinita de unos. Consideramos la medida $\nu = T_{\#}m$ en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, donde m es la medida de Lebesgue en $[0, 1)$.

(a) Dados $j \in \mathbb{N}$, índices $k_1, \dots, k_j$ distintos entre sí y dígitos $d_1, \dots, d_j \in \{0, 1\}$, considerar

$$A = \{(x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : x_{k_1} = d_1,\ x_{k_2} = d_2,\ \dots\ ,\ x_{k_j} = d_j\}.$$

Probar que $\nu(A) = 2^{-j}$.

(b) Probar que $\nu(B_{n_0}) = 0$ si $B_{n_0} = \{(x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : x_n = 0 \text{ para } n \geq n_0\}$.

(c) ¿Cuál es la ν-medida del conjunto $C = \{(x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : x_n = 0 \text{ para infinitos } n\}$?

(d) ¿Cuál es la interpretación probabilística de este ejemplo?

Ejercicio 7. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y sea $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función que satisface:

i) $A, B \in \mathcal{M} \ \wedge\ A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,

ii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M} \ \wedge\ A_n \searrow \emptyset \implies \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Probar que la función de conjuntos μ es una medida en $\mathcal{M}$.

Ejercicio 8. Un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es *completo* si para todo $Z \in \mathcal{M}$ con $\mu(Z) = 0$ y todo $Y \subset Z$ se tiene $Y \in \mathcal{M}$, es decir, si todo subconjunto de un conjunto nulo es medible. Probar que en un espacio completo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ vale que:

(a) Si $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ y $\mu(E_1 \vartriangle E_2) = 0$ entonces $\mu(E_1) = \mu(E_2)$.

(b) Si $E_1 \in \mathcal{M}$, $E_1 \Delta E_2 \in \mathcal{M}$ y $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$, entonces $E_2 \in \mathcal{M}$.

Ejercicio 9. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Considerar el conjunto

$$\overline{\mathcal{M}} = \{A \subseteq X \ :\ A = E \cup M \text{ con } E \in \mathcal{M},\ M \subseteq N \in \mathcal{M} \text{ y } \mu(N) = 0\} \qquad (*)$$

y la función $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{M}} \to [0, +\infty]$ dada por $\overline{\mu}(A) = \mu(E)$ para $A = E \cup M$ como en $(*)$. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) El conjunto $\overline{\mathcal{M}}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{M}$.

(b) La función $\overline{\mu}$ está bien definida, es una medida en $\overline{\mathcal{M}}$ y coincide con μ sobre $\mathcal{M}$.

(c) El espacio de medida $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ es completo.

El espacio de medida $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ se conoce como la *completación* de $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Ejercicio 10. Sea $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ y sea μ la restricción a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ de la medida de Lebesgue n-dimensional. ¿Cómo es la completación de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$?