Práctica 1
Medida de Lebesgue

Ejercicio 1. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $d(A, B) > 0$. Probar que $|A \cup B|_e = |A|_e + |B|_e$.

Ejercicio 2. Probar que el conjunto

$$E = \{x \in (0,1) : \text{en el desarrollo decimal de } x \text{ no aparece el dígito } 7\}$$

tiene medida nula.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función arbitraria.

(a) Probar que si f es Riemann integrable en $[a, b]$ entonces el gráfico de la restricción de f a $[a, b]$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de medida nula.

(b) Probar que el gráfico de f tiene medida nula cuando f es continua.

(c) ¿Qué puede decirse cuando f tiene finitas discontinuidades?

Ejercicio 4. Sea $Z \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|Z| = 0$. Probar que $E = \{x^2 : x \in Z\}$ tiene medida nula.

Ejercicio 5. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ probar que existe $H \supseteq A$ de tipo G_δ tal que $|A|_e = |H|$.

Ejercicio 6. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible tal que $E = A \cup B$ con $|B| = 0$. Probar que A es medible.

Ejercicio 7. Sean $v \in \mathbb{R}^n$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por la fórmula $T(x) = x + v$.

(a) Probar que $|T(E)|_e = |E|_e$ para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) Probar que si E es medible entonces $T(E)$ es medible y $|T(E)| = |E|$.

Ejercicio 8. Dados $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ notamos $rA = \{r.a : a \in A\}$.

(a) Probar que $|rA|_e = r^n |A|_e$.

(b) Probar que si A es medible entonces rA es medible y $|rA| = r^n |A|$.

(c) Expresar la medida de $B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ en términos de $|B(0, 1)|$.

Ejercicio 9. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que existe A de medida nula con $E \subseteq A$.

(a) Probar que E tiene medida nula.

(b) Deducir que el cardinal de los medibles es 2^c. ¿Cual es el cardinal de los no medibles?

Nota: en la teórica se demostrará que todo intervalo no vacío contiene conjuntos no medibles.

Ejercicio 10. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible.

(a) Probar que es continua la función $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ dada por la fórmula $f(r) = |A \cap B(0, r)|$.

(b) Concluir que para todo $0 \leq s \leq |A|$ existe $B \subseteq A$ medible con $|B| = s$.

(c) Asumiendo $0 < |A| < +\infty$ y dado $n \in \mathbb{N}$, probar que existen subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de A, disjuntos entre sí, tales que $|A_j| = |A|/n$ para cada $1 \leq j \leq n$.

Ejercicio 11. Sea $T : [0, 1) \to [0, 1)$ definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x < 1/2, \\ 2x - 1 & \text{si } 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

Probar que si $E \subseteq [0, 1)$ es medible entonces $T^{-1}(E)$ es medible y $|T^{-1}(E)| = |E|$.

Ejercicio 12. Recordar que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos se definen

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Suponiendo que cada A_n es un medible de $\mathbb{R}^d$, probar las siguientes afirmaciones.

(a) Los conjuntos $\liminf_{n\to\infty} A_n$ y $\limsup_{n\to\infty} A_n$ son medibles.

(b) Vale la desigualdad $\left|\liminf_{n\to\infty} A_n\right| \leq \liminf_{n\to\infty} |A_n|$.

(c) Si para algún $n \in \mathbb{N}$ vale que $\left|\bigcup_{k\geq n} A_k\right| < +\infty$ entonces $\left|\limsup_{n\to\infty} A_n\right| \geq \limsup_{n\to\infty} |A_n|$.

(d) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < +\infty$ entonces $\left|\limsup_{n\to\infty} A_n\right| = 0$.

Ejercicio 13. Fijando $0 < \delta < 1$, construir un conjunto $C_\delta \subset [0, 1]$ con la misma idea del conjunto de Cantor pero removiendo intervalos de longitud $\delta 3^{-k}$ en el k-ésimo paso de la construcción.

(a) Probar que C_δ es perfecto, tiene medida $1 - \delta$ y no contiene intervalos.

(b) Construir un abierto de $\mathbb{R}$ con frontera de medida positiva.

Ejercicio 14. Dado $E \subseteq \mathbb{R}^n$, probar la equivalencia entre las siguientes afirmaciones:

(a) El conjunto E es medible.

(b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $G \supset E$ abierto tal que $|G \backslash E|_e < \varepsilon$.

(c) Existen H de clase G_δ y N de medida nula tales que $E = H \setminus N$.

(d) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $F \subset E$ cerrado tal que $|E \backslash F|_e < \varepsilon$.

(e) Existen H de clase F_σ y N de medida nula tales que $E = H \cup N$.

Ejercicio 15. Decimos que el conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ satisface la *condición de Carathéodory* si

$$|A|_e = |A \cap E|_e + |A \cap E^c|_e$$

para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Probar que:

(a) Todo conjunto medible satisface la condición de Carathéodory.

(b) Si E es acotado y satisface la condición de Carathéodory entonces E es medible.

(c) Un conjunto E es medible si y sólo si satisface la condición de Carathéodory.

Ejercicio 16. Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en $\mathbb{R}^n$.

(a) Probar que si $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente entonces

$$\Big|\bigcup_{k\geq 1} E_k\Big|_e = \text{lím}_{k\to\infty} |E_k|_e.$$

(b) Dar un ejemplo de $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ decreciente con $|E_k|_e < +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$\Big|\bigcap_{k\geq 1} E_k\Big|_e < \text{lím}_{k\to\infty} |E_k|_e.$$

Ejercicio 17. Para cada $E \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos su *medida interior* como

$$|E|_i = \sup\{|F| : F \subseteq E\,,\, F \text{ cerrado}\}.$$

Probar que ésta verifica las siguientes propiedades.

(a) Vale la desigualdad $|E|_i \leq |E|_e$.

(b) Si E es medible entonces $|E|_i = |E|_e$.

(c) Si $|E|_e < +\infty$ y $|E|_i = |E|_e$ entonces E es medible.

(d) Existe E no medible tal que $|E|_i = |E|_e$.

(e) La medida interior es monótona: $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow |E_1|_i \leq |E_2|_i$.

(f) Si $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos disjuntos entonces $\Big|\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big|_i \geq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_i$.

Ejercicio 18. Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de Vitali. Probar que si $E \subseteq V$ es medible necesariamente se tiene $|E| = 0$. Concluir que $|V|_i = 0$.

Ejercicio 19. Construir subconjuntos no medibles de $\mathbb{R}$ que ejemplifiquen:

(a) Una sucesión de conjuntos $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ disjuntos tales que $\Big|\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big|_e < \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_e$.

(b) Una sucesión de conjuntos $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\Big|\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big|_i > \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_i$.

(c) Un conjunto E con $|E|_i < +\infty$ y $|E|_e = +\infty$.

Ejercicio 20. Probar que si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible y $A \subseteq E$ entonces

$$|E| = |A|_i + |E \backslash A|_e.$$

Ejercicio 21. Mostrar que existe un conjunto $H \subseteq [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ de clase F_σ con $|H| = 1$.

Ejercicio 22. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible con medida positiva.

(a) Mostrar que para todo $\alpha > 1$ existe un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $|I| < \alpha |E \cap I|$.

(b) Probar que existe $r_0 > 0$ tal que $E \cap (E + v) \neq \emptyset$ para todo $v \in B(0, r_0)$.

(c) Concluir que el *conjunto de las diferencias* de E, definido como

$$D(E) = \{x - y : x, y \in E\},$$

contiene un entorno del origen.

Nota : el resultado del ítem (c) se conoce como Teorema de Steinhaus.

Ejercicio 23. Probar que todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de medida positiva tiene cardinal c.

Sugerencia : recordar que si α es un cardinal infinito entonces $\alpha^2 = \alpha$.

Ejercicio 24. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ medible y tal que para todo par de puntos $x, y \in E$ se satisface

$$x \neq y \Longrightarrow \frac{x+y}{2} \notin E.$$

Probar que E tiene medida nula.

Sugerencia : mostrar que existe $\alpha \in (0,1)$ tal que para todo intervalo I se tiene $|E \cap I| \leq \alpha |I|$.