Práctica 0
Preliminares

Conjuntos y Funciones

Ejercicio 1. Sean $(X_i)_{i\in I}$ e $(Y_j)_{j\in J}$ dos familias de conjuntos. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(X_i \cup Y_j)$,

(b) $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(X_i \cap Y_j)$,

(c) $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(X_i \times Y_j)$,

(d) $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(X_i \times Y_j)$.

(e) Si $I = J$ y para todo $i \in I$ se tiene $Y_i \subseteq X_i$ entonces

$$\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right) \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \quad \text{y} \quad \left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right) \subseteq \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right).$$

(f) Si $A \subseteq I$ entonces $\left(\bigcup_{i\in A} X_i\right) \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)$ y $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \subseteq \left(\bigcap_{i\in A} X_i\right)$.

(g) Para todo conjunto F se tiene

$$F - \bigcup_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I}(F - X_i) \quad \text{y} \quad F - \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}(F - X_i).$$

Ejercicio 2. Sea $(A_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos indexada por $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Probar la inclusión

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{n,k} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k}$$

y mostrar que ésta puede ser estricta dando un ejemplo.

Ejercicio 3. Probar que si A y B son conjuntos tales que $A \times B = (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$ con $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = \emptyset$, $A_1 \times B_1 \neq \emptyset$ y $A_2 \times B_2 \neq \emptyset$ entonces se tiene

$$A = A_1 = A_2 \;\text{ y }\; B = B_1 \cup B_2 \quad \text{ó} \quad A = A_1 \cup A_2 \;\text{ y }\; B_1 = B_2 = B.$$

Ejercicio 4. Sea $f : E \to F$ una función y consideremos dos pares de subconjuntos $A, B \subseteq E$ y $C, D \subseteq F$. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$,

(b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

(c) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$,

(d) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ si f es inyectiva,

(e) $f(E - A) \subseteq F - f(A)$ si f es inyectiva,

(f) $f(E - A) \supseteq F - f(A)$ si f es suryectiva,

(g) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ y $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$,

(h) $f^{-1}(F - D) = E - f^{-1}(D)$.

Ejercicio 5. Dadas $f : E \to F$ y familias de subconjuntos $(X_i)_{i\in I}$ de E e $(Y_j)_{j\in J}$ de F, concluir:

(a) $f(\bigcup_{i\in I} X_i) = \bigcup_{i\in I} f(X_i)$,

(b) $f(\bigcap_{i\in I} X_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(X_i)$,

(c) $f(\bigcap_{i\in I} X_i) = \bigcap_{i\in I} f(X_i)$ si f es inyectiva,

(d) $f^{-1}(\bigcap_{j\in J} Y_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$,

(e) $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} Y_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$.

Ejercicio 6. Dada una sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de E, definimos su *límite inferior* y su *límite superior* como los conjuntos

$$\liminf_{n\to\infty} E_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} E_k \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} E_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} E_k$$

respectivamente. Notar que $\liminf\limits_{n\to\infty} E_n \subseteq \limsup\limits_{n\to\infty} E_n \subseteq E$ y probar las igualdades

$$E - \liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} (E - E_n) \quad \text{y} \quad E - \limsup_{n\to\infty} E_n = \liminf_{n\to\infty} (E - E_n).$$

Cuando los límites inferior y superior de la sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coinciden los denotamos por $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$, decimos que el *límite* de $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe y lo definimos como $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$.

(a) Demostrar que si $E_{n+1} \subseteq E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

(b) Demostrar que si $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

(c) Probar que si definimos recursivamente una sucesión $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de E vía

$$D_1 = \emptyset \quad \text{y} \quad D_{n+1} = D_n \triangle E_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

entonces existe el límite de $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} E_n = \emptyset$.

Ejercicio 7. Sea X un conjunto. Para cada subconjunto $A \subseteq X$ definimos la *función característica de* A como la función $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Deducir la equivalencia $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$ y probar las identidades

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B \qquad \text{y} \qquad \chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}.$$

Ejercicio 8. Sea $f : X \to Y$ una función arbitraria y sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $f\left(\liminf\limits_{n\to\infty} X_n\right) \subseteq \liminf\limits_{n\to\infty} f(X_n)$,

(b) $f\left(\limsup\limits_{n\to\infty} X_n\right) \subseteq \limsup\limits_{n\to\infty} f(X_n)$,

(c) $f\left(\liminf\limits_{n\to\infty} X_n\right) \subseteq \limsup\limits_{n\to\infty} f(X_n)$,

(d) valen las igualdades en (a) y (b) para f inyectiva.

Ejercicio 9. Construimos inductivamente una sucesión de conjuntos cerrados $(F_n)_n$ definiendo

$$F_0 = [0,1] \quad \text{y} \quad F_n = T_1(F_{n-1}) \cup T_2(F_{n-1}) \ \text{ para } n \geq 1,$$

donde $T_1, T_2 : [0,1] \to [0,1]$ son las transformaciones afines dadas por $T_1(x) = \frac{1}{3}x$ y $T_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Definimos el *conjunto ternario de Cantor* como la intersección $C := \bigcap_{n \geq 1} F_n$.

(a) Describir geométricamente la recursión que define F_n en términos de F_{n-1}.

(b) Probar que C es un compacto *autosimilar*, en el sentido de que $C = T_1(C) \cup T_2(C)$.

(c) Probar que para cada $\varepsilon > 0$ es posible cubrir C con una cantidad finita de intervalos de modo tal que la suma de sus longitudes sea menor que ε.

(d) Probar que un real $x \in [0,1]$ pertenece a C si y sólo si puede escribirse en base 3 en la forma

$$x = \sum\nolimits_{n \geq 1} \frac{d_n}{3^n} \quad \text{donde } d_n \in \{0, 2\} \text{ para cada } n \geq 1.$$

(e) Probar que C tiene el cardinal del continuo.

Ejercicio 10. Consideramos ahora una sucesión de funciones $(f_n)_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ tomando $f_0(x) = x$ para $x \in [0,1]$ y definiendo, para cada $n \geq 1$, una función f_n por medio de la recursión

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_{n-1}(3x) & \text{si } x \in [0, 1/3), \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [1/3, 2/3], \\ \frac{1}{2} f_{n-1}(3x-2) + \frac{1}{2} & \text{si } x \in (2/3, 1]. \end{cases}$$

Graficar las primeras f_n y probar rigurosamente las siguientes afirmaciones:

(a) Cada f_n es continua, no decreciente y verifica $f_n(0) = 0$ y $f_n(1) = 1$.

(b) Se tiene $\left| f_n(x) - f_{n-1}(x) \right| \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) La suceción $(f_n)_n$ converge uniformemente a una función continua $f : [0,1] \to [0,1]$, conocida como *función de Cantor-Lebesgue*.

(d) La función f es monótona creciente y verifica $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.

(e) Se tiene $f(C) = [0,1]$ y f es constante sobre cada componente conexa de $[0,1] \setminus C$.

Responder las siguientes preguntas:

(f) ¿Es biyectiva la restricción $f : C \to [0,1]$?

(g) ¿Existe un biyección $g : C \to [0,1]$? ¿Y un homeomorfismo?

(h) ¿Existe una biyección continua $g : C \to [0,1]$?

La Integral de Riemann

Sea $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada. Dada una partición $\pi = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$ en subintervalos notamos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $m_i = \operatorname{ínf}_{I_i} f$ y $M_i = \sup_{I_i} f$. Definimos las *sumas inferior* y *superior* de Riemann asociadas a dicha partición π como

$$s_\pi(f) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{y} \qquad S_\pi(f) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

respectivamente, lo que nos lleva a definir las *integrales inferior* y *superior* de Riemann como

$$I_R(f) := \sup\{s_\pi(f) : \pi \text{ partición de } [a,b] \text{ en subintervalos}\},$$

$$S_R(f) := \operatorname{ínf}\{S_\pi(f) : \pi \text{ partición de } [a,b] \text{ en subintervalos}\}.$$

Decimos que f es *integrable Riemann* si las integrales inferior y superior de Riemann coinciden y, en tal caso, definimos la *integral de Riemann* de f como el número real

$$\int_a^b f(x)\,dx := I_R(f) = S_R(f).$$

Ejercicio 11. Demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición π del intervalo $[a,b]$ en subintervalos tal que $S_\pi(f) - s_\pi(f) < \varepsilon$.

(b) Si f es monótona en $[a,b]$ entonces es integrable Riemann en $[a,b]$.

(c) Si f es continua en $[a,b]$ entonces es integrable Riemann en $[a,b]$.

(d) La función $\chi_{\mathbb{Q}}$ no es integrable Riemann en ningún intervalo acotado.

Ejercicio 12. Decidir si es integrable Riemann la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = p/q \text{ con } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ y } (p:q) = 1, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ejercicio 13. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones integrables Riemann en un intervalo $[a,b]$.

(a) Probar que si $(f_n)_n$ converge uniformemente a f entonces f es integrable Riemann y vale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

(b) Mostrar con un ejemplo que si la convergencia de $(f_n)_n$ a f sólo es puntual entonces f puede no ser integrable Riemann, aun si las f_n están uniformemente acotadas.

(c) Para el ejemplo del ítem anterior es posible tomar $(f_n)_n$ de modo tal que la convergencia a f sea monótona. ¿Es posible hallar un ejemplo donde, además de la convergencia monótona a f, se tenga continuidad en $[a,b]$ para cada una de las f_n?