Práctica 9
Espacios normados

En esta práctica $\mathbb{K}$ es siempre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y, salvo indicación en contrario, todo espacio normado es un espacio normado sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, es decir, un espacio normado *real* o *complejo*.

Ejercicio 1 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. Probar las siguientes afirmaciones.

a) Son continuas las funciones $E \times E \to E$, $\mathbb{K} \times E \to E$ y $E \to \mathbb{R}$ dadas por

$$(x, y) \mapsto x + y \quad , \qquad (\lambda, x) \mapsto \lambda x \qquad \text{y} \qquad x \mapsto \|x\| \, .$$

b) La clausura de una bola abierta de E es la bola cerrada correspondiente.

c) Si E tiene dimensión positiva, entonces para todo $r > 0$ y todo $x \in E$ es $\text{diám}(B_r(x)) = 2r$.

Ejercicio 2 Si V es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión finita, cualesquiera dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ en V son *(uniformemente) equivalentes*: siempre existen escalares positivos α, β tales que

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\| \quad \text{para todo } x \in V.$$

Ejercicio 3 Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y sea $d : V \times V \to \mathbb{R}$ una métrica que satisface

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \qquad \text{y} \qquad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \, d(x, y)$$

para $x, y, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ arbitrarios. Entonces, la función $N : V \to \mathbb{R}$ dada por $N(x) = d(0, x)$ es una norma en V y d es la distancia inducida por N.

Ejercicio 4 Si E es un espacio normado, para todo escalar $\lambda \neq 0$ y todo $x_0 \in E$ la función de E en E dada por $x \mapsto \lambda x + x_0$ es un homeomorfismo. Se deduce que:

i) Si $x \in E$ y $U \subset E$ es abierto, también es abierto $U + x$.

ii) Si $B \subset E$ es un conjunto arbitrario y $U \subset E$ es abierto, también es abierto $U + B$.

Estudiar la validez de *i*) y *ii*) para cerrados en lugar de abiertos.

Ejercicio 5 Sea E un espacio normado y sea S un subespacio lineal de E.

a) La clausura $\overline{S}$ de S es un subespacio lineal de E.

b) Si $S \neq E$, entonces $S^\circ = \emptyset$.

c) Si S tiene dimensión finita, entonces S es un cerrado de E.

d) Si S es un *hiperplano*, es decir, si existe un vector no nulo x en E tal que $E = S \oplus \langle x \rangle$, entonces S es o denso o cerrado en E.

Ejercicio 6 Decidir si los siguientes subespacios son cerrados, densos, o hiperplanos.

a) El subespacio c de ℓ_∞ de las sucesiones que tienen límite.

b) El subespacio c_0 de c de las sucesiones que convergen a 0.

c) El subespacio de ℓ_1 de las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ tales que $\sum_{n\geq 1} x_n = 0$.

d) El subespacio de ℓ_2 de las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ tales que $\sum_{n\geq 1} x_n = 0$.

e) El subespacio $\mathbb{R}[X]$ de $C[0,1]$.

f) El subespacio $C^1[a,b]$ de $C[a,b]$.

Ejercicio 7 Sea E un espacio normado. Un subconjunto C de E es *convexo* si $[x,y] \subset C$ cada vez que x, $y \in C$, donde $[x,y]$ es el *segmento cerrado de extremos x e y* definido como

$$[x,y] = \big\{(1-t)x + ty \in E \,:\, t \in [0,1]\big\}.$$

Probar las siguientes afirmaciones.

a) Toda bola de E, abierta o cerrada, es convexa.

b) Es convexa toda *subvariedad lineal* de E, es decir, todo conjunto de la forma $p+S$ con $p \in E$ y $S \subset E$ un subespacio lineal.

c) Son conjuntos convexos la clausura y el interior de un conjunto convexo.

d) La intersección de una familia no vacía de subconjuntos convexos de E es ella misma convexa.

e) Para todo $A \subset E$ se define la *cápsula convexa* de A como el conjunto $\operatorname{conv}(A)$ dado por la intersección de todos los subconjuntos convexos de E que contienen a A. El conjunto $\operatorname{conv}(A)$ es convexo y para todo $C \supset A$ convexo vale la inclusión $\operatorname{conv}(A) \subset C$.

f) Para todo $A \subset E$ se tiene

$$\operatorname{conv}(A) = \{t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \,:\, n \in \mathbb{N},\, x_1,\ldots,x_n \in A,\, t_1,\ldots,t_n \geq 0,\, t_1 + \cdots + t_n = 1\}.$$

Ejercicio 8 Sea E un espacio normado, sean $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones en E tales que las series $\sum_{n\geq 1} x_n$ y $\sum_{n\geq 1} y_n$ convergen, y sea $\lambda \in \mathbb{K}$.

a) La serie $\sum_{n\geq 1}(x_n + y_n)$ converge a $\sum_{n\geq 1} x_n + \sum_{n\geq 1} y_n$.

b) La serie $\sum_{n\geq 1} \lambda x_n$ converge a $\lambda \sum_{n\geq 1} x_n$.

Ejercicio 9 Sea E un espacio normado completo y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en E. Si la serie $\sum_{n\geq 1}\|x_n\|$ converge, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ converge en E.

Ejercicio 10 Sea E un espacio de Banach y sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en E tal que la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente. Si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función biyectiva, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_{\sigma(n)}$ converge y su suma es $\sum_{n\geq 1} a_n$.

Ejercicio 11 Si $T : E \to F$ es una función lineal entre espacios normados, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) La función T es continua en 0.

ii) Existe $x_0 \in E$ tal que la función T es continua en x_0.

iii) La función T es continua.

iv) La función T es uniformemente continua.

v) Existe un número $M > 0$ tal que para todo $x \in E$ es $\|T(x)\| \leq M\|x\|$.

vi) Para todo subconjunto acotado A de E el conjunto $T(A)$ es acotado.

Ejercicio 12 Sean E y F dos espacios normados y sea $L(E, F)$ el conjunto de todas las funciones lineales continuas de E en F.

a) El conjunto $L(E, F)$ es, de manera natural, un espacio vectorial.

b) Es una norma en $L(E, F)$ la función $\|\cdot\| : L(E, F) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|T\| = \|T\|_{L(E,F)} \coloneqq \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F \quad \text{para cada } T \in L(E, F),$$

que está bien definida por ser $\{\|T(x)\|_F : \|x\|_E \leq 1\}$ acotado para $T \in L(E, F)$.

c) Si F es un espacio de Banach, entonces $L(E, F)$ también lo es.

Ejercicio 13 Si $T : E \to F$ es una función lineal y continua entre espacios normados, entonces

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} \\ &= \inf \big\{ M \in \mathbb{R} : \|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E \ \ \forall x \in E \big\}. \end{aligned}$$

Ejercicio 14 Siendo $f : E_1 \to E_2$ y $g : E_2 \to E_3$ operadores lineales continuos entre espacios normados, probar que $\|g \circ f\|_{L(E_1,E_3)} \leq \|g\|_{L(E_2,E_3)} \cdot \|f\|_{L(E_1,E_2)}$.

Ejercicio 15 Probar que el operador $L : c \to \mathbb{R}$ dado por $L((a_n)_n) = \lim_{n\to\infty} a_n$ resulta lineal y continuo. Calcular su norma.

Ejercicio 16 Sean $S, T : \ell^1 \to \ell^1$ los operadores dados por

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots) \quad \text{y} \quad T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Probar que $S, T \in L(\ell^1)$ y calcular sus normas.

Ejercicio 17 La función $f : c_{00} \to \mathbb{R}$ dada por $f((a_n)_n) = \sum_n n a_n$ está bien definida y resulta lineal pero no continua.

Ejercicio 18 El *exponente conjugado* de $p \in [1,\infty]$ es el único $p' \in [1,\infty]$ que verifica $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, de modo que $1'=\infty$, $\infty'=1$ y $2'=2$. La *desigualdad de Hölder*, que generaliza la de Cauchy-Schwarz para ℓ_2, dice que para todo par de sucesiones $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ en $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) se tiene

$$\textstyle\sum_n |a_n b_n| \leq \|(a_n)_n\|_p \, \|(b_n)_n\|_{p'} \quad \text{para todo } p \in [1,\infty].$$

Fijando $p \in [1,\infty]$ y $b=(b_n)_{n\geq 1} \in \ell_{p'}$, probar que el operador $T : \ell_p \to \mathbb{R}$ dado por

$$T((a_n)_n) = \textstyle\sum_{n\geq 1} a_n b_n$$

está bien definido como función y resulta lineal y continuo. Calcular su norma.

Ejercicio 19 Sea $K : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que el operador

$$T : C[0,1] \to C[0,1] \quad \text{dado por} \quad T(f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy,$$

bien definido como función, es lineal y acotado con $\|T\| \leq \|K\|_\infty$. Mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ puede tomarse K con $\|K\|_\infty = 1$ y $\|T\| < \varepsilon$.

Ejercicio 20 Sea $\phi \in C[0,1]$ y sea $T_\phi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $T_\phi(f) = \int_0^1 f(x)\phi(x)\,dx$. Probar que T_ϕ es un funcional lineal continuo con $\|T_\phi\| = \int_0^1 |\phi(x)|\,dx$.

Sugerencia: Calcular $\|T_\phi\|$ suponiendo primero que ϕ tiene finitos ceros en el intervalo $[0,1]$ y luego pasar al caso general usando el teorema de Stone-Weierstrass.

Ejercicio 21 Sea E un espacio normado. Un subespacio lineal H de E es un hiperplano si y sólo si existe una función lineal $\phi : E \to \mathbb{K}$ no nula tal que $H = \ker(\phi)$. En tal caso, H es cerrado si y solamente si la función ϕ es continua.

Ejercicio 22 *(Lema de Riesz)* Sea E un espacio normado y sea S un subespacio lineal de E que es cerrado y propio. Si $\alpha \in (0,1)$, entonces existe $z \in E \setminus S$ tal que $\|z\| = 1$ y $\|s - z\| > \alpha$ para todo $s \in S$.

Sugerencia: Fijar $x \in E \setminus S$ y tomar $z = (x-b)/\|x-b\|$ con $b \in S$ apropiadamente elegido.

Ejercicio 23 Sea E un espacio de Banach y sean S y T dos subespacios cerrados de E. Si T tiene dimensión finita, entonces el subespacio $S+T$ de E también es cerrado.

Ejercicio 24 En todo espacio normado E de dimensión infinita existe una sucesión $(\omega_n)_{n\geq 1}$ con $\|\omega_n\| = 1$ y $\|\omega_n - \omega_m\| > \frac{1}{2}$ para $n \neq m$, de modo que ni su *bola cerrada* $\overline{B_E} = B_1[0]$ ni su *esfera* $S_E = \partial B_E$ son conjuntos compactos.

Sugerencia: Aplicar el Lema de Riesz a una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita.

Ejercicio 25 Aplicando el Teorema de Baire, deducir que ningún espacio de Banach de dimensión infinita admite una base lineal numerable.