Práctica 8

Teoremas de Arzelà-Ascoli y de Stone-Weierstrass

Equicontinuidad

Una familia $\mathcal{F}$ de funciones de (X, d_X) en (Y, d_Y) es *equicontinua* si es *equicontinua* en cada punto de X, es decir, si para todo $x_0 \in X$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \text{ para toda } f \in \mathcal{F} \text{ cuando } d_X(x, x_0) < \delta.$$

La familia $\mathcal{F}$ es *uniformemente equicontinua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon \text{ para toda } f \in \mathcal{F} \text{ cuando } d_X(x, x') < \delta.$$

Notar que toda $f \in \mathcal{F}$ es (uniformemente) continua si $\mathcal{F}$ es (uniformemente) equicontinua.

Ejercicio 1 Probar las siguientes afirmaciones para espacios métricos arbitrarios X, Y.

a) Es equicontinua en x_0 toda familia finita de funciones de X en Y continuas en $x_0 \in X$.

b) Si una sucesión en $C(X, Y)$ converge uniformemente, entonces es equicontinua.

c) Si un subconjunto de $C(X, Y)$ es equicontinuo, también lo es su clausura respecto de d_∞.

d) Si una sucesión equicontinua en $C(X, Y)$ converge puntualmente, su límite está en $C(X, Y)$.

Ejercicio 2 Construir dos familias infinitas de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que ejemplifiquen:

a) una familia equicontinua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pero no en 0, y

b) una familia equicontinua en $\mathbb{R}$ pero no uniformemente equicontinua.

Ejercicio 3 Probar las siguientes afirmaciones para X compacto e Y arbitrario.

a) Toda familia equicontinua de funciones de X en Y es uniformemente equicontinua.

b) Si una sucesión de funciones de X en Y es equicontinua y converge puntualmente, entonces también converge uniformemente.

Teorema de Arzelà-Ascoli

Ejercicio 4 Sean f_1, f_2, ... funciones de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$, integrables y uniformemente acotadas. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $F_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función que verifica

$$F_n(x) = y_n + \int_a^x f_n(t)\, dt \quad \text{para todo } x \in [a, b],$$

donde y_n es una constante real que depende sólo de n. Suponiendo que $(y_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada, probar que $(F_n)_{n\geq 1}$ posee una subsucesión que converge uniformemente en $[a, b]$.

Ejercicio 5 En $(C[-1,1],\, d_\infty)$ considerar los conjuntos

$$A = \big\{ f \in C[-1,1] : |f| \leq 1 \big\} \quad \text{y} \quad B = \big\{ f \in C^1[-1,1] : |f| \leq 1 \,\wedge\, |f'| \leq 1 \big\}.$$

Decidir si estos conjuntos son cerrados y estudiar la compacidad de sus clausuras.

Teorema de Stone-Weierstrass

Ejercicio 6 Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua. Probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathbb{R}[X,Y]$, un polinomio bivariado con coeficientes en $\mathbb{R}$, con la propiedad de que

$$|f(x,y) - P(x,y)| < \varepsilon \quad \text{para cada } (x,y) \in [0,1] \times [0,1].$$

Deducir que P puede tomarse en $\mathbb{Q}[X,Y]$.

Ejercicio 7 En $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ considerar la métrica de subespacio de $\mathbb{C}$. Probar que el conjunto de *polinomios de Laurent* con coeficientes en $\mathbb{C}$,

$$\mathbb{C}[X, X^{-1}] = \big\{ \textstyle\sum_{n=-N}^{N} a_n X^n \;:\; N \in \mathbb{N}_0,\; a_{-N},\, \ldots,\, a_N \in \mathbb{C} \big\},$$

induce una familia de funciones continuas en S^1 que es densa en $C(S^1, \mathbb{C})$.

Ejercicio 8 Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua verifica $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, x^n \, dx = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f \equiv 0$.

Ejercicio 9 Sea X un espacio métrico y sea $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R})$ una familia arbitraria.

a) Dar una descripción de $\mathcal{A}_\mathbb{R}(\mathcal{F})$, la $\mathbb{R}$-subálgebra de $C(X,\mathbb{R})$ generada por $\mathcal{F}$.

b) Probar que la $\mathbb{Q}$-subálgebra $\mathcal{A}_\mathbb{Q}(\mathcal{F})$ de $C(X,\mathbb{R})$ es contable si $\mathcal{F}$ lo es.

c) Asumiendo X compacto, probar que vale $\mathcal{A}_\mathbb{R}(\mathcal{F}) \subset \overline{\mathcal{A}_\mathbb{Q}(\mathcal{F})}$ en $(C(X,\mathbb{R}),\, d_\infty)$.

d) Probar que $C(X,\mathbb{R})$ es separable cuando X es compacto.

e) Concluir que $C(X,\mathbb{C})$ también es separable cuando X es compacto.