Práctica 7
Sucesiones de funciones

Convergencia puntual y convergencia uniforme

Ejercicio 1 Dados un conjunto A y un espacio métrico (X, d), considerar una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ de funciones de A en X y una función $f : A \to X$. Son equivalentes:

i) La sucesión $(f_n)_n$ <u>no</u> converge uniformemente a f sobre A.

ii) Existen $\varepsilon > 0$, una sucesión $(a_k)_{k\geq 1}$ en A y una subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ tales que

$$d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \varepsilon \ \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 2 Para las sucesiones de funciones $(f_n)_{n\geq 1}$ dadas a continuación, estudiar la convergencia puntual y uniforme en cada uno de los conjuntos indicados.

a) Para $f_n(x) = x^n$ en $(-1, 1]$ y en $[0, 1/2]$.

b) Para $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$ en $(1, 2)$, en $(2, \infty)$ y en $(2, 3)$.

c) Para $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$ en $\mathbb{R}$.

d) Para $f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{n}\right)$ en $\mathbb{R}$ y en $K \subset \mathbb{R}$ compacto arbitrario.

e) Para $f_n(z) = \dfrac{nz}{n+1}$ en $\mathbb{C}$ y en $K \subset \mathbb{C}$ compacto arbitrario.

f) Para $f_n(z) = nz^2$ en $\mathbb{C}$.

g) Para $f_n(z) = z^n$ en $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y en $K \subset D$ compacto arbitrario.

Ejercicio 3 Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x^3}{1+nx^2} \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Probar que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ no converge uniformemente sobre $\mathbb{R}$ a su límite puntual, aunque sí converge uniformemente a él sobre cada compacto de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4 Sean X e Y espacios métricos y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones de X en Y que converge uniformemente a $f : X \to Y$. Probar las siguientes afirmaciones.

a) Si cada f_n es continua, entonces f es continua.

b) Si cada f_n es uniformemente continua, entonces f es uniformemente continua.

Ejercicio 5 Dado un conjunto no vacío X, sea $B(X)$ el conjunto de todas las funciones acotadas de X en $\mathbb{C}$ y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $B(X)$.

a) Si $(f_n)_n$ converge puntualmente a una función $f : X \to \mathbb{C}$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

Probar la siguiente afirmaciones.

b) Si $(f_n)_n$ converge uniformemente a $f : X \to \mathbb{C}$, entonces f es un elemento de $B(X)$.

c) La sucesión $(f_n)_n$ converge uniformemente a una función acotada $f : X \to \mathbb{C}$ si y solamente si $(f_n)_n$ converge a f en el espacio métrico $(B(X), d_\infty)$.

d) Si $(f_n)_n$ converge uniformemente entonces $(f_n)_n$ es *uniformemente acotada*, lo que significa que existe una constante M tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 6 Sea X un espacio métrico y sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ sucesiones de funciones de X en $\mathbb{R}$ con límites uniformes f y g respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones.

a) La sucesión $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $f + g$ sobre X.

b) Si ambas sucesiones están uniformemente acotadas sobre X, entonces la sucesión producto $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a fg sobre X.

c) Mostrar que *b*) puede fallar si alguna de las sucesiones no está uniformemente acotada.

Ejercicio 7 Sea X un espacio métrico compacto y sea $(f_n)_{n\geq 1} : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas con límite uniforme $f : X \to \mathbb{R}$. Si A es un conjunto cualquiera y $(g_n)_{n\geq 1} : A \to X$ es una sucesión con límite uniforme $g : A \to X$, concluir que la sucesión $(f_n \circ g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente sobre A a la composición $f \circ g$.

Ejercicio 8 Sea X un espacio métrico, sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua. Probar las siguientes afirmaciones.

a) Si $(f_n)_n$ converge uniformemente a f entonces se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f\big(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\big)$ para toda sucesión convergente $(x_n)_{n\geq 1}$ en X.

b) Para X compacto vale la implicación recíproca: si para toda sucesión convergente $(x_n)_{n\geq 1}$ en X se cumple $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f\big(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\big)$, entonces $(f_n)_n$ converge uniformemente a f.

Ejercicio 9 (*Teorema de Dini*) Sea X un espacio métrico compacto. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ tal que

i) $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$, y

ii) $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a una función <u>continua</u> $f : X \to \mathbb{R}$,

entonces la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f en X.

Ejercicio 10 Mostrar con un ejemplo que en el Teorema de Dini es necesaria la hipótesis de continuidad para la función límite.

Paso al límite en derivadas e integrales

Ejercicio 11 Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$.

a) Si $(f_n)_n$ converge uniformemente a $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx. \tag{1}$$

b) Sin la convergencia uniforme de la sucesión $(f_n)_n$ puede fallar la igualdad (1), como lo prueba la sucesión dada por las funciones $f_n(x)=n^2x(1-x)^n$ en el intervalo $[0,1]$.

Ejercicio 12 Siendo f_1, f_2, ... funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ con $f_n \rightrightarrows f$, decidir si vale que

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Ejercicio 13 Sea $(f_n)_{n\geq 1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una sucesión de funciones de clase C^1 tal que

i) la sucesión $(f_n')_n$ converge uniformemente sobre $\mathbb{R}$, y

ii) existe $x_0\in\mathbb{R}$ tal que $(f_n(x_0))_n$ converge.

Probar las siguientes afirmaciones.

a) La sucesión $(f_n)_n$ converge puntualmente a una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase C^1 y vale

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) \;=\; f'(x) \;=\; \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)', \tag{2}$$

siendo uniforme sobre $\mathbb{R}$ la convergencia de $(f_n')_n$ a f'.

b) La convergencia de $(f_n)_n$ a f puede no ser uniforme en $\mathbb{R}$, pero sí es uniforme sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 14 Construir sucesiones $(f_n)_n$ de funciones derivables de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que ejemplifiquen las siguientes situaciones.

a) La sucesión $(f_n)_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a una función no derivable.

b) La sucesión $(f_n)_n$ tiene límite uniforme $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable pero no vale (2).

Series de funciones

Ejercicio 15 Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ tal que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en X.

a) La función suma $f=\sum_{n\geq 1} f_n$ es continua en X.

b) Si $X=[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Ejercicio 16 (*Test M de Weierstrass*) Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones de X en $\mathbb{C}$ para la que existen constantes $(M_n)_{n\geq 1}$ tales que $|f_n| \leq M_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si la serie numérica $\sum_{n\geq 1} M_n$ converge, entonces la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente sobre X.

Ejercicio 17 La *función ζ de Riemann* es la función definida como

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \qquad \text{para todo } s \text{ en su región de convergencia.}$$

Probar que esta serie converge puntualmente en $(1, \infty) \subset \mathbb{R}$ y uniformemente en $[1+\varepsilon, \infty) \subset \mathbb{R}$ para todo $\varepsilon > 0$. Más aún, la función $\zeta : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ es derivable y es posible calcular $\zeta'(s)$ derivando la serie término a término.

Nota Definiendo $n^s = e^{s \log(n)}$ para $s \in \mathbb{C}$, puede probarse con el mismo argumento que la serie converge puntualmente en el semiplano abierto $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$ y uniformemente en todo semiplano cerrado $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \geq 1 + \varepsilon\}$ con $\varepsilon > 0$.

Ejercicio 18 Si la serie numérica compleja $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente, entonces las series de funciones $\sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx)$ y $\sum_{n\geq 1} a_n \operatorname{sen}(nx)$ convergen absoluta y uniformemente sobre $\mathbb{R}$. Si además $\sum_{n\geq 1} n a_n$ converge absolutamente, entonces las sumas de dichas series funcionales son derivables y vale derivar término a término.

Ejercicio 19 Para las series de funciones reales

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-x)^n}{n}, \qquad \sum_{n\geq 1} 2^n x^n, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{x^{3n}}{n} \quad \text{y} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n! x^n}{n^n},$$

estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme.

Ejercicio 20 Considerar la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n^2x^2}$ definida sobre $\mathbb{R}$.

a) ¿En qué conjunto converge la serie?

b) ¿Sobre qué intervalos es uniforme la convergencia? ¿Sobre cuáles no?

c) ¿Es continua la función suma en su dominio? ¿Y acotada?

d) ¿Existe el límite de la función suma para $x \to \infty$? ¿Y para $x \to 0$?

e) ¿Es derivable la función suma en su dominio?