Práctica 6

Conexión y arco-conexión

Conexión

Recordar que un espacio métrico (X, d) es *conexo* si no admite una *desconexión*, es decir, si no existen abiertos disjuntos y no vacíos U, V en X con $X = U \cup V$. Un subconjunto A de X es *conexo* si el subespacio métrico (A, d) es conexo. En particular, $\emptyset$ es un conjunto conexo.

Ejercicio 1 Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son conexos:

$$\{0\}\,, \qquad \mathbb{N}\,, \qquad [0,1)\,, \qquad \mathbb{Q}\,, \qquad \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\,, \qquad \{0\} \cup \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Ejercicio 2 Decidir la validez de las siguientes afirmaciones para un espacio métrico general (X, d).

a) Toda bola abierta en X es conexa.

b) Para todo $x_0 \in X$ existe $r > 0$ tal que la bola $B_r(x_0)$ es conexa.

c) Si $A, B \subset X$ son conexos entonces $A \cup B$ es conexo.

d) Si $A, B \subset X$ son conexos entonces $A \cap B$ es conexo.

e) Si $A, B \subset X$ son conexos entonces $A - B$ es conexo.

f) Si $A \subset X$ es conexo y $x \in A'$, entonces $A \cup \{x\}$ es conexo.

g) Si $A \subset X$ es conexo, entonces A° es conexo.

h) Si $A \subset X$ es conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo.

Pensar cuáles de las afirmaciones falsas se vuelven verdaderas para $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual.

Ejercicio 3 Sean (X, d) un espacio métrico y $C \subset X$. Son equivalentes:

i) No existen abiertos no vacíos y disjuntos U, V de C tales que $C = U \cup V$.

ii) No existen abiertos disjuntos U, V de X tales que $U \cap C \neq \emptyset$, $V \cap C \neq \emptyset$ y $C \subset U \cup V$.

iii) Si $A \subset C$ no vacío es abierto y cerrado en (C, d), entonces $A = C$.

Ejercicio 4 Sea X un espacio métrico y sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos conexos de X con la siguiente propiedad: para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$ existen $n \in \mathbb{N}_0$ y $C_0, \ldots, C_n \in \mathcal{A}$ tales que $A = C_0$, $B = C_n$ y $C_{i-1} \cap C_i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Probar que la unión $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ es conexa.

Ejercicio 5 Probar que toda función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Z}$ es constante.

Ejercicio 6 Es (X, d) conexo si y sólo si toda función continua $X \to \{0, 1\}$ es constante.

Ejercicio 7 Para $n \geq 2$ no es $\mathbb{R}^n$ homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Nota Más generalmente, $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ son no homeomorfos para $n \neq m$, pero es mucho más difícil probar este resultado (ver *Teorema de invariancia de la dimensión*).

Ejercicio 8 Probar que los espacios métricos $(0,1)$, $[0,1)$ y $[0,1]$, con las métricas que heredan como subespacios de $\mathbb{R}$, son dos a dos no homeomorfos. Decidir si alguno de ellos es homeomorfo a la circunferencia $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ con la métrica de subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 9 Sea (X,d) un espacio métrico conexo.

a) Si $f : X \to \mathbb{R}$ es continua, entonces cada vez que $a,b \in f(X)$ y $a \leq b$ se tiene $[a,b] \subset f(X)$.

b) Por ser X conexo necesariamente se tiene $|X| = 1$ o $|X| \geq c$.

Ejercicio 10 Hallar las componentes conexas de $\mathbb{Q}$ en el espacio métrico $\mathbb{R}$ y las componentes conexas de los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dados por

$$B_1((-1,0)) \cup B_1((1,0)) \quad \text{y} \quad B_1((-1,0)) \cup \{(0,0)\} \cup B_1((1,0)).$$

Ejercicio 11 Definiendo $A_n = \left\{\frac{1}{n}\right\} \times [0,1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, considerar la métrica de subespacio de $\mathbb{R}^2$ en el conjunto $X = \{(0,0),(0,1)\} \cup \bigcup_{n\geq 1} A_n$.

a) Probar que los conjuntos $\{(0,0)\}$ y $\{(0,1)\}$ son componentes conexas de X.

b) Dar un abierto de X que contenga al $(0,0)$ pero no al $(1,0)$.

c) Dar un cerrado de X que contenga al $(0,0)$ pero no al $(1,0)$.

d) Probar que si $E \subset X$ es abierto y cerrado en X entonces $(0,0) \in E \iff (0,1) \in E$.

Ejercicio 12 Las componentes conexas de un espacio métrico son cerradas. ¿Son abiertas?

Ejercicio 13 Mostrar que los siguientes conjuntos son totalmente disconexos:

a) Cualquier espacio métrico discreto con más de un punto.

b) Cualquier espacio métrico numerable.

c) El conjunto de Cantor.

Arco-conexión

Recordar que un subconjunto A de un espacio métrico X es *arco-conexo* si para todo par de puntos $x,y \in A$ existe un *arco* (o *camino*) de x a y en A, es decir, una función continua $\sigma : [0,1] \to A$ con $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$. En particular, ϕ es un conjunto arco-conexo.

Ejercicio 14 Todo subconjunto arco-conexo de un espacio métrico es conexo, pero existen espacios conexos que no son arco-conexos.

Ejercicio 15 Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son arco-conexos.

a) El gráfico de una función continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

b) Los conjuntos $B_1(0)$ y $\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$.

c) El conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

d) Los conjuntos $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ y $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x^3,x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicio 16 Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios métricos. Si X es arco-conexo, entonces $f(X)$ es un subconjunto arco-conexo de Y.

Ejercicio 17 Probar que si $S \subset \mathbb{R}^n$ es contable y $n \geq 2$ entonces $\mathbb{R}^n \setminus S$ es arco-conexo.

Ejercicio 18 En el espacio $(C[0,1], d_\infty)$ considerar el conjunto

$$U = \{f \in C[0,1] : f(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in [0,1]\}.$$

Probar que U es abierto y hallar sus componentes conexas.

Ejercicio 19 Probar que un abierto de $\mathbb{R}^n$ es conexo si y sólo si es arco-conexo. Mostrar con un ejemplo que para subconjuntos generales de $\mathbb{R}^n$ falla la equivalencia anterior.

Ejercicio 20 Sea (X,d) un espacio métrico. Se define una relación de equivalencia $\sim$ en X de modo tal que $x \sim y$ si y sólo si existe un camino de x a y.

a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en X.

b) La *componente arco-conexa* de $x \in X$ es el conjunto $C_x = \{y \in X \mid y \sim x\}$. Verificar que:

- *i*) cada C_x es arco-conexo;
- *ii*) si $x \sim y$ entonces $C_x = C_y$;
- *iii*) si $x \not\sim y$ entonces $C_x \cap C_y = \emptyset$;
- *iv*) se tiene $X = \bigcup_{x \in X} C_x$.

c) Mostrar que X es arco-conexo si y sólo si tiene una única componente arco-conexa.

Ejercicio 21 Se dice que (X,d) es *localmente conexo* (resp. *localmente arco-conexo*) si para todo $x \in X$ y todo entorno E de x existe $V \subset X$ abierto conexo (resp. arco-conexo) con $x \in V \subset E$.

a) Un espacio métrico X es localmente (arco-)conexo si y sólo si para todo U abierto de X, las componentes (arco-)conexas de U son abiertas.

b) Todo espacio métrico conexo y localmente arcoconexo es arcoconexo.

c) En un espacio métrico localmente arcoconexo todo conjunto abierto y conexo es arcoconexo.

d) Las componentes arcoconexas de un espacio localmente arcoconexo son abiertas.