PRÁCTICA 5

COMPACIDAD

ESPACIOS MÉTRICOS COMPACTOS

Ejercicio 1 Considerar $\mathbb{R}$ como espacio métrico con la métrica d usual.

a) Si la sucesión real $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $x_0 \in \mathbb{R}$ entonces $\{x_n : n \geq 0\}$ es compacto.

b) El intervalo $[0,1]$ es compacto mientras que el intervalo $(0,1]$ no lo es.

c) Si a y b son dos elementos de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tales que $a < b$, entonces $S = (a,b) \cap \mathbb{Q}$ es un conjunto cerrado, acotado y no compacto en el subespacio métrico $(\mathbb{Q}, d)$.

Ejercicio 2 Sea X un espacio métrico.

a) Todos subconjunto finito de X es compacto. En particular, $\emptyset$ es compacto.

b) El conjunto de los compactos de X es cerrado por uniones finitas e intersecciones arbitrarias.

c) Si X es compacto, todo cerrado de X es compacto.

d) Un subconjunto F de X es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo $K \subset X$ compacto.

Ejercicio 3 Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $e_n \in \ell^\infty$ dado por $e_n(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

Probar que en (ℓ^∞, d_∞) es $\{e_n : n \geq 1\}$ un conjunto discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

Ejercicio 4 Todo espacio métrico compacto es separable y completo.

Ejercicio 5 El espacio métrico (c_0, d_∞) es un espacio completo y separable en el que ninguna bola cerrada de radio positivo es compacta.

Ejercicio 6 Los espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) son compactos si y sólo si $(X \times Y, d_\infty)$ lo es.

Ejercicio 7 Un *número de Lebesgue* para un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de un espacio métrico X es un número $\lambda > 0$ tal que toda bola abierta de radio λ está contenida en algún abierto de $\mathcal{U}$.

a) Todo cubrimiento abierto de un espacio métrico compacto admite un número de Lebesgue.

b) Existe (X, d) no compacto en el que todo cubrimiento abierto admite un número de Lebesgue.

COMPACIDAD Y DISTANCIAS

Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A, B \subset X$ no vacíos, la distancia $d(A, B)$ *se realiza* si existen $a \in A$ y $b \in B$ con $d(a, b) = d(A, B)$. En tal caso, a y b *realizan* la distancia de A a B. Dados $x \in X$ y $A \subset X$ no vacío, la distancia $d(x, A)$ *se realiza* si se realiza $d(\{x\}, A)$.

Ejercicio 8 Sean (X,d) un espacio métrico y $x \in X$.

a) Si $x \in A \subset X$ entonces $d(x,A)$ se realiza trivialmente.

b) Si $K \subset X$ es compacto no vacío entonces $d(x,K)$ se realiza.

c) Para $F \subset X$ cerrado no vacío puede no realizarse $d(x,F)$.

Ejercicio 9 Sea (X,d) un espacio métrico.

a) Si $K_1, K_2 \subset X$ son compactos no vacíos entonces $d(K_1,K_2)$ se realiza. En particular, cuando K_1 y K_2 son disjuntos se tiene $d(K_1,K_2) > 0$.

b) Si $F, K \subset X$ son un cerrado y un compacto no vacíos entonces puede no realizarse $d(F,K)$, pero en cualquier caso se tiene $d(F,K) > 0$ si son F y K disjuntos.

c) Para $F_1, F_2 \subset X$ cerrados no vacíos y disjuntos puede ser $d(F_1,F_2) = 0$.

d) Para $A, K \subset X$ no vacíos, si K es compacto se tiene $d(K,A) = d(x,A)$ para algún $x \in K$.

Ejercicio 10 Sea (X,d) un espacio métrico con la *Propiedad de Heine-Borel*, es decir, donde todo cerrado y acotado es compacto.

a) Probar que (X,d) es completo, separable y admite una *exhaución por compactos*, es decir, existe una sucesión $(K_n)_{n\geq 1}$ de compactos de X tales que $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$ y $X = \bigcup_{n\geq 1} K_n$.

b) Probar que $d(F,K)$ se realiza si $F, K \subset X$ son un cerrado y un compacto no vacíos. En particular, $d(x,F)$ se realiza para todo $x \in X$ y todo cerrado $F \subset X$.

Ejercicio 11 Sea (X,d) un espacio métrico y sea $\mathcal{K}(X) = \{K \subset X : K \text{ compacto no vacío}\}$.

a) Sea $d_H : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$d_H(M,N) = \max\left\{ \sup_{x\in M} d(x,N)\,,\ \sup_{x\in N} d(x,M) \right\} \quad \text{para } M, N \in \mathcal{K}(X).$$

Para todo $\varepsilon > 0$ se tiene la equivalencia $d_H(M,N) < \varepsilon \iff M \subset B_\varepsilon(N) \ \wedge\ N \subset B_\varepsilon(M)$.

b) La función d_H es una métrica sobre $\mathcal{K}(X)$, llamada *distancia de Hausdorff*.

c) La inclusión $i : (X,d) \to (\mathcal{K}(X), d_H)$ definida por $i(x) = \{x\}$ es una isometría.

Compacidad y continuidad

Ejercicio 12 Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios métricos.

a) Si X es compacto, entonces $f(X)$ también lo es.

b) Si además f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

Ejercicio 13 Si X es un espacio métrico compacto, entonces para cualquier espacio métrico Y la proyección canónica $\pi_Y : X \times Y \to Y$ es cerrada.

Ejercicio 14 Sea Y un espacio métrico compacto. Entonces, si X es cualquier espacio métrico, toda función $f : X \to Y$ con gráfico cerrado en $X \times Y$ es una función continua.

Ejercicio 15 Sean X e Y espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Probar que f es uniformemente continua sobre cada subconjunto compacto K de X.

Ejercicio 16 Probar las siguientes afirmaciones.

a) Si $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en $[0, 1]$ y en $[1, \infty)$, entonces lo es en $[0, \infty)$.

b) La función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua.

c) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, entonces f es uniformemente continua.

Ejercicio 17 Sea X un espacio métrico y sea $K \subset X$ compacto. Si $f : K \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in K$, entonces existe $m > 0$ tal que $f(x) \geq m$ para todo $x \in K$.

Ejercicio 18 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

a) La función f no tiene extremos locales.

b) La función f es estrictamente monótona y por lo tanto inyectiva.

c) Es $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ un homeomorfismo.

Ejercicio 19 Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $f : X \to \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente.

a) Probar que f alcanza mínimo en X.

b) Mostrar con un ejemplo que f podría no alcanzar máximo en X.

Enunciar y probar afirmaciones análogas para funciones semicontinuas superiormente.