Práctica 4

Separabilidad, Completitud y Teorema de Baire

Separabilidad

Ejercicio 1 El espacio $\mathbb{R}^n$ con su métrica euclídea es separable.

Ejercicio 2 Considerar el espacio métrico (ℓ^∞, d_∞) y sus subconjuntos

$$c_0 = \{(a_n)_n \in \ell^\infty : \lim_n a_n = 0\} \quad \text{y} \quad c_{00} = \{(a_n)_n \in \ell^\infty : \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n = 0 \text{ si } n \geq n_0\}.$$

Probar que (c_{00}, d_∞) es separable y que (ℓ^∞, d_∞) no lo es. Decidir si (c_0, d_∞) es separable.

Ejercicio 3 Todo subespacio de un espacio métrico separable es él mismo separable.

Ejercicio 4 Sea (X, d) un espacio métrico. Una familia $\mathcal{B}$ de abiertos de X es una *base (para la topología de X)* si todo abierto de X es unión de elementos de $\mathcal{B}$.

a) Una familia $\mathcal{B}$ de abiertos de X es una base si y solamente si para todo abierto U de X y todo $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subset U$.

b) Es (X, d) separable si y sólo si admite una base contable.

Ejercicio 5 Sea (X, d) un espacio métrico separable.

a) Toda familia de abiertos de X disjuntos dos a dos es contable.

b) Todo subconjunto discreto de X es contable. En particular, X tiene contables puntos aislados.

c) *Propiedad de Lindelöf*: todo cubrimiento abierto de X admite un subcubrimiento contable.

d) La topología de (X, d) tiene cardinal a lo sumo c.

e) Si $f : (X, d) \to (Y, d')$ es continua y sobreyectiva entonces (Y, d') es separable.

Ejercicio 6 Los espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) son separables si y sólo si $(X \times Y, d_\infty)$ lo es.

Sucesiones de Cauchy

Ejercicio 7 Sea X un espacio métrico y sea $x = (x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X.

a) La sucesión x converge a x_0 si y sólo si toda subsucesión de x converge a x_0.

b) Si toda subsucesión de x posee una subsucesión convergente a x_0, entonces x converge a x_0.

c) Si x es de Cauchy y posee una subsucesión que converge a x_0, entonces x converge a x_0.

d) Si x converge entonces x es de Cauchy. ¿Vale la afirmación recíproca?

e) Si x es de Cauchy entonces x es acotada.

f) Asumiendo x acotada, ¿puede concluirse que x posee alguna subsucesión de Cauchy?

Ejercicio 8 Sea (X, d) un espacio métrico y sean $x = (x_n)_{n\geq 1}$ y $x' = (x'_n)_{n\geq 1}$ sucesiones en X.

a) Si x converge a x_0 y x' a x'_0, entonces $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = d(x_0, x'_0)$.

b) Si x y x' son sucesiones de Cauchy, entonces $(d(x_n, x'_n))_{n\geq 1}$ es convergente.

Ejercicio 9 Sean X e Y espacios métricos. Si $f : X \to Y$ es uniformemente continua entonces f manda sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy. ¿Vale la implicación recíproca?

Completitud

Ejercicio 10 Si δ es la métrica discreta en X entonces (X, δ) es completo.

Ejercicio 11 Si toda bola cerrada de (X, d) es un subespacio completo, entonces X es completo.

Ejercicio 12 Sea X un espacio métrico.

a) Todo subespacio completo de X es cerrado.

b) Si X es completo entonces todo subespacio cerrado de X lo es.

Ejercicio 13 Un espacio métrico X es completo si y sólo si toda sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ de cerrados no vacíos de X, decreciente y con $\lim_{n\to\infty} \text{diám}(F_n) = 0$, tiene intersección no vacía.

Ejercicio 14 Los espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) son completos si y sólo si $(X \times Y, d_\infty)$ lo es.

Ejercicio 15 Sea X un conjunto no vacío y sea $B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ acotada}\}$.

a) Probar que $B(X)$ es un espacio métrico completo con la métrica d_∞ dada por

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \quad \text{para } f, g \in B(X).$$

b) Si X es un espacio métrico, probar que $C_b(X) = \{f \in B(X) : f \text{ es continua}\}$ es un subespacio cerrado de $(B(X), d_\infty)$ y por lo tanto es $(C_b(X), d_\infty)$ un espacio métrico completo.

Ejercicio 16 Estudiar la completitud de los espacios métricos (ℓ^∞, d_∞), (c_0, d_∞) y (c_{00}, d_∞).

Ejercicio 17 Sea X un espacio métrico y sea $D \subset X$ un subconjunto denso. Si toda sucesión de Cauchy con valores en D converge en X, entonces X es un espacio métrico completo.

Ejercicio 18 Sean X e Y dos espacios métricos, sea $D \subset X$ un subconjunto denso y sea $f : D \to Y$ una función uniformemente continua. Si Y es completo, entonces existe una y solo una función continua $\bar{f} : X \to Y$ tal que $\bar{f}|_D = f$. Más aún, dicha función $\bar{f}$ es uniformemente continua.

Ejercicio 19 Si d y d' son métricas uniformemente equivalentes en un conjunto X, entonces (X, d) es completo si y sólo si (X, d') lo es. Por otra parte, la métrica $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right| \quad \text{para } x, y \in \mathbb{R},$$

es topológicamente equivalente a la euclídea pero no hace de $\mathbb{R}$ un espacio métrico completo.

Ejercicio 20 Sea (X, d) completo y sin puntos aislados. Probar que $|X| \geq c$ y deducir que se tiene $|X| = c$ en el caso de que X satisfaga la hipótesis adicional de ser separable.

Puntos de condensación y conjuntos perfectos

Sea (X, d) un espacio métrico. Un *punto de condensación* de un subconjunto $S \subset X$ es un punto $x \in X$ tal que para todo $r > 0$ resulta $B_r(x) \cap S$ no contable. Un subconjunto $P \subset X$ se dice *perfecto* si es un cerrado sin puntos aislados, es decir, si $P = P'$.

Ejercicio 21 Si (X, d) es separable y $S \subset X$ es no contable, entonces existe $x \in S$ punto de condensación de S. Más aun, S contiene no contables puntos de condensación de sí mismo.

Ejercicio 22 Probar el *Teorema de Cantor-Bendixson*: todo subconjunto cerrado F de un espacio métrico completo y separable se escribe de forma única como la unión disjunta $F = P \sqcup C$ de un subconjunto perfecto P y un subconjunto contable C.

Sugerencia: tomar como P el conjunto de puntos de condensación de F.

Teorema del punto fijo

Sea X un conjunto no vacío y sea $f : X \to X$ una función. Se dice que un elemento $x_0 \in X$ es un *punto fijo* de f si verifica $f(x_0) = x_0$. Para cualquier $x_0 \in X$ la sucesión x_0, $f(x_0)$, $f(f(x_0))$, ... se conoce como la *iteración de punto fijo* generada por f a partir de x_0.

Ejercicio 23 Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \to X$ una función continua. Probar que si una iteración de punto fijo generada por f converge, entonces lo hace a un punto fijo de f.

Ejercicio 24 Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \to X$ una *contracción*, lo que significa que existe $\lambda \in [0, 1)$ con $d(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda\, d(x_1, x_2)$ para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$.

a) Probar que la función f tiene a lo sumo un punto fijo y podría no tener ninguno.

b) Probar que si (X, d) es completo entonces f tiene un único punto fijo y a él converge toda iteración de punto fijo generada por f.

Ejercicio 25 Probar que las siguientes funciones tienen puntos fijos.

a) Cualquier función $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continua.

b) Cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua que verifique alguna de las siguientes hipótesis:

i) f acotada, *ii*) f decreciente, *iii*) $x^{-1} f(x) \to 0$ para $|x| \to \infty$, *iv*) $f \circ f$ tiene algún punto fijo.

Teorema de Baire

Ejercicio 26 Sea X un espacio métrico. Un subconjunto A de X es *nunca denso* en X si $\overline{A}^{\circ} = \emptyset$, y es *denso en* $B \subset X$ si $A \cap B$ es denso en el subespacio métrico B.

a) Si $A \subset X$ es nunca denso entonces $X \setminus A$ es denso. ¿Vale la afirmación recíproca?

b) Si U es un abierto denso de X entonces $X \setminus U$ es nunca denso.

c) Para $A \subset X$ las siguientes afirmaciones son equivalentes entre sí:

- *i*) El conjunto A es nunca denso en X.
- *ii*) Toda bola abierta B de X contiene otra B' tal que $B' \cap A = \emptyset$.
- *iii*) El conjunto A no es denso en ninguna bola abierta de X.

Ejercicio 27 Construir ejemplos que ilustren las siguientes situaciones.

a) Un espacio métrico (X, d) y abiertos densos $U_1, U_2, \ldots$ en X con $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \emptyset$.

b) Un espacio métrico completo (X, d) y abiertos densos $(U_i)_{i\in I}$ en X con $\bigcap_{i\in I} U_i = \emptyset$.

Ejercicio 28 En (X, d) completo y sin puntos aislados, ningún denso numerable puede ser un G_δ.

Ejercicio 29 Dados un cuerpo $\mathbb{K}$ y $n \in \mathbb{N}$, considerar el $\mathbb{K}$ espacio vectorial $\mathbb{K}^n$.

a) Dar una demostración algebraica de que si $\mathbb{K}$ es infinito entonces $\mathbb{K}^n$ no es unión finita de subespacios vectoriales propios.

b) Para el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, dar una demostración analítica (topológica) de que $\mathbb{K}^n$ no es unión numerable de subespacios vectoriales propios.

Ejercicio 30 No existen funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sean continuas sólo en $\mathbb{Q}$.

Sugerencia: para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar el conjunto

$$U_n = \{x \in \mathbb{R} : \text{existe un abierto } U \subset \mathbb{R} \text{ con } x \in U \text{ y } \operatorname{diám}(f(U)) < 1/n\}.$$

Ejercicio 31 Sea $(I_n)_{n\geq 1}$ una enumeración de los subintervalos cerrados de $[0, 1]$ con extremos racionales y longitud positiva. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $E_n = \{f \in C[0, 1] : f \text{ es monótona en } I_n\}$.

a) Cada conjunto E_n es un cerrado nunca denso de $(C[0, 1], d_\infty)$.

b) El conjunto de las funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ que tienen algún intervalo (no trivial) de monotonía tiene interior vacío en $(C[0, 1], d_\infty)$.

c) Existen funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ no monótonas en ningún subintervalo de longitud positiva de $[0, 1]$. Más aun, el conjunto de tales funciones es denso en $(C[0, 1], d_\infty)$.

Ejercicio 32 El conjunto $\operatorname{Lip}[a, b]$ de las funciones Lipschitz de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ está contenido en $C[a, b]$. Si $[a, b]$ es no trivial, entonces $\operatorname{Lip}[a, b]$ tiene interior vacío en $(C[a, b], d_\infty)$.