Práctica 3

Continuidad y continuidad uniforme

Funciones continuas

Ejercicio 1 Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función.

a) Probar que f es continua en un punto x_0 de X si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X convergente a x_0 se tiene $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$.

b) Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) La función f es continua.

ii) Para todo abierto G de Y el conjunto $f^{-1}(G)$ es abierto en X.

iii) Para todo cerrado F de Y el conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

Ejercicio 2 Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas.

a) La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ con las métricas usuales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$.

b) La función identidad $(\mathbb{R}^2, \delta) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, siendo δ la métrica discreta.

c) La función identidad $(\mathbb{R}^2, d_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \delta)$, siendo δ la métrica discreta.

d) Una inclusión $i : E \to X$, siendo (X, d) un espacio métrico cualquiera y $E \subset X$ un subespacio.

Ejercicio 3 Sean f, g, $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad g(x) = xf(x) \qquad \text{y} \qquad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ y } (m : n) = 1. \end{cases}$$

Probar que f es discontinua en todos los puntos de su dominio, que g es continua únicamente en 0, y que h es continua en $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ y en ningún otro punto de $[0, 1]$.

Ejercicio 4 Probar que un espacio métrico (X, d) es discreto si y solamente si toda función $X \to Y$ con valores en un espacio métrico (Y, d') es continua.

Ejercicio 5 Considerando la métrica euclídea en cada espacio $\mathbb{R}^n$, probar que

a) el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y(e^x - 1) = -1\}$ es cerrado,

b) el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado, y

c) el conjunto $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

Dar métricas no equivalentes a las euclídeas para las que sigan valiendo estas tres afirmaciones.

Ejercicio 6 Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que $f : X \to \mathbb{R}$ es continua si y solamente si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ los conjuntos $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ y $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ son abiertos.

Ejercicio 7 Considerar las funciones E, $I : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$E(f) = f(0) \quad \text{e} \quad I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

donde $C[0,1]$ es el conjunto de todas las funciones continuas del intervalo $[0,1]$ en $\mathbb{R}$.

a) Probar que tanto E como I son continuas sobre $(C[0,1], d_\infty)$.

b) Probar que I es continua sobre $(C[0,1], d_1)$ pero que E no lo es.

c) ¿Existe alguna $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$ continua para la métrica d_1 pero no para la métrica d_∞?

Ejercicio 8 Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función. Decidir la validez de cada una de las siguientes afirmaciones.

a) Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de X y para todo $U \in \mathcal{U}$ es continua la restricción $f|_U : U \to Y$, entonces la función $f : X \to Y$ es continua.

b) Si $\mathcal{F}$ es un cubrimiento cerrado de X y para todo $F \in \mathcal{F}$ la restricción $f|_F : F \to Y$ resulta continua, entonces la función $f : X \to Y$ es continua.

c) Si $\mathcal{F}$ es un cubrimiento cerrado y finito de X y para todo $F \in \mathcal{F}$ la restricción $f|_F : F \to Y$ resulta continua, entonces la función $f : X \to Y$ es continua.

d) Si $\mathcal{Q}$ es un cubrimiento finito de X y para todo $Q \in \mathcal{Q}$ la restricción $f|_Q : Q \to Y$ es continua, entonces $f : X \to Y$ es continua.

Ejercicio 9 Sea (X, d) un espacio métrico.

a) Probar que para $A \subset X$ no vacío es continua la función $d_A : X \to \mathbb{R}$ dada por $d_A(x) = d(x, A)$.

b) Probar el *Lema de Urysohn*: si A y B son dos cerrados disjuntos de X, entonces existe $f : X \to \mathbb{R}$ continua con $f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$ y $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$.

Sugerencia: considerar la función f dada por $f(x) = \dfrac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$ para $x \in X$.

c) Probar que si A y B son dos cerrados disjuntos de X entonces existen abiertos U y V de X tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Ejercicio 10 Una función de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ es siempre continua. ¿Puede ser un homeomorfismo? ¿Qué puede decirse en este sentido de una función de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$?

Ejercicio 11 Dados espacios métricos (X, d) e (Y, d') y funciones continuas f, $g : X \to Y$, probar que si $f|_D = g|_D$ para algún subconjunto $D \subset X$ denso en X entonces $f = g$.

Ejercicio 12 Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua que verifica $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para $x, y \in \mathbb{Q}$ cualesquiera entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Funciones abiertas, cerradas y homeomorfismos

Ejercicio 13 Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es *abierta* si es $f(U)$ abierto para todo $U \subset X$ abierto y *cerrada* si es $f(F)$ cerrado para todo $F \subset X$ cerrado.

a) Para $f : X \to Y$ biyectiva se tiene f cerrada $\iff$ f abierta $\iff$ f^{-1} continua.

b) Una función $f : X \to Y$ es un homeomorfismo si y sólo si es biyectiva e induce una biyección entre la topología de X y la de Y vía $U \mapsto f(U)$.

c) Exhibir funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continuas pero no abiertas y continuas pero no cerradas.

d) Mostrar que una función puede ser biyectiva, abierta y cerrada sin ser continua.

Ejercicio 14 Dos métricas d_1, d_2 en un conjunto no vacío X son topológicamente equivalentes si y sólo si $\mathrm{Id}_X : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es un homeomorfismo.

Ejercicio 15 Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función.

a) Probar que f es continua si y sólo si $f\left(\overline{E}\right) \subset \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subset X$. Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta.

b) Probar que f es continua y cerrada si y sólo si $f\left(\overline{E}\right) = \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subset X$.

Continuidad y topología producto

Ejercicio 16 Dados espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y), la *topología producto* en $X \times Y$ es la topología $\tau_{X \times Y}$ inducida en $X \times Y$ por cualquier métrica topológicamente equivalente a las métricas d_1 y d_∞ definidas en el Ejercicio 16 de la Práctica 2. Probar las siguientes afirmaciones.

a) Para la topología $\tau_{X \times Y}$, las proyecciones canónicas $\pi_X : X \times Y \to X$ y $\pi_Y : X \times Y \to Y$ resultan continuas y abiertas pero en general no cerradas.

b) Si (Z, d_Z) es un espacio métrico, una función $f : Z \to X \times Y$ es continua para $\tau_{X \times Y}$ si y sólo si las composiciones $\pi_X \circ f$ y $\pi_Y \circ f$ son continuas.

c) Si $f : X \to Y$ es continua entonces el *gráfico* de f, es decir, el conjunto

$$\mathrm{Gráf}(f) = \{(x, y) \in X \times Y \; : \; y = f(x)\},$$

es un cerrado de $X \times Y$ para $\tau_{X \times Y}$. ¿Vale la afirmación recíproca?

d) Para la topología $\tau_{X \times X}$ en $X \times X$, la función $\Delta : X \to X \times X$ dada por $\Delta(x) = (x, x)$ induce un homeomorfismo de X en su imagen $\Delta(X)$, que resulta ser un cerrado de $X \times X$.

Semicontinuidad

Ejercicio 17 Sea $f : (X, d) \to \mathbb{R}$. La función f es *semicontinua inferiormente* en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ con $f(x_0) - \varepsilon < f(x)$ cuando $d(x, x_0) < \delta$, y es *semicontinua superiormente* en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ con $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ cuando $d(x, x_0) < \delta$.

a) La función f es semicontinua inferiormente y/o superiormente en x_0 si y sólo si

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x) := \lim_{r \to 0} \left[\inf_{B_r^*(x_0)} f \right] \quad \text{y/o} \quad \lim_{r \to 0} \left[\sup_{B_r^*(x_0)} f \right] =: \limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

b) La función f es continua en x_0 si y sólo si es semicontinua inferior y superiormente en x_0.

c) Es f semicontinua inferiormente en X si y sólo si es $f^{-1}((\alpha, +\infty))$ abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) Es f semicontinua superiormente en X si y sólo si es $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

e) Si f es la función característica de $A \subset X$, entonces f es semicontinua inferiormente si y sólo si A es abierto y f es semicontinua superiormente si y sólo si A es cerrado.

Continuidad uniforme

Ejercicio 18 Las funciones d_A definidas en el Ejercicio 9 son uniformemente continuas.

Ejercicio 19 Una función $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ es uniformemente continua si es *Lipschitz*, es decir, si existe $L > 0$ con $d_Y(f(x), f(x')) \leq L\, d_X(x, x')$ para $x, x' \in X$. En particular, f es continua si es una *isometría*, es decir, si verifica $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$ para $x, x' \in X$.

Ejercicio 20 Dos métricas d_1, d_2 en un conjunto no vacío X son (uniformemente) equivalentes si y sólo si $\mathrm{Id}_X : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es *bi-Lipschitz*, es decir, Lipschitz e inversible con inversa Lipschitz.

Ejercicio 21 Considerar espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) y una función $f : X \to Y$. Si para un subconjunto $A \subset X$ existen $\alpha > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ y sucesiones $(x_n)_{n \geq 1}$ e $(x'_n)_{n \geq 1}$ en A tales que

$$\lim_{n \to \infty} d_X(x_n, x'_n) = 0 \qquad \text{y} \qquad d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geq \alpha \quad \text{para todo } n \geq n_0,$$

entonces $f|_A$ no es uniformemente continua.

Ejercicio 22 Probar las siguientes afirmaciones.

a) No son uniformemente continuas ni $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ ni $g : t \in (0,1) \mapsto 1/t \in \mathbb{R}$.

b) Existe una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que es continua y acotada pero no uniformemente continua.

c) Existe una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que es uniformemente continua pero no acotada.

Ejercicio 23 Sean X e Y espacios métricos y sea $f : X \to Y$ uniformemente continua.

a) Si $A, B \subset X$ son no vacíos y tales que $d_X(A, B) = 0$, entonces $d_Y(f(A), f(B)) = 0$.

b) La continuidad (a secas) de f no es suficiente para la validez de *a*).

Ejercicio 24 Sean X un espacio métrico, $A \subset X$ un subconjunto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Probar que existe una única función continua $\bar{f} : \bar{A} \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{f}|_A = f$ y probar que dicha función $\bar{f}$ resulta uniformemente continua.