PRÁCTICA 2

ESPACIOS MÉTRICOS

MÉTRICAS EN $\mathbb{R}^n$

Ejercicio 1 Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos disjuntos dos a dos en $\mathbb{R}^n$.

a) Probar que $\mathcal{F}$ es a lo sumo numerable si todos sus elementos son abiertos.

b) Mostrar que la conclusión de *a*) es falsa si los elementos de $\mathcal{F}$ son cerrados.

Ejercicio 2 Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de todas las bolas abiertas $B_r(x)$ de $\mathbb{R}^n$ con $x \in \mathbb{Q}^n$ y $r \in \mathbb{Q}^+$. Probar que si U es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $x \in U$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

Ejercicio 3 Probar que todo cubrimiento abierto de $\mathbb{R}^n$ contiene un subcubrimiento numerable. Este resultado se conoce como *Teorema de Lindelöf*.

Ejercicio 4 Todo abierto de $\mathbb{R}$ es unión de contables intervalos abiertos disjuntos dos a dos.

Ejercicio 5 Un *punto de condensación* de $S \subset \mathbb{R}^n$ es un punto $x \in \mathbb{R}^n$ con la propiedad de que para todo $r > 0$ la intersección $B_r(x) \cap S$ resulta no contable. Probar que todo subconjunto no contable de $\mathbb{R}^n$ posee al menos un punto de condensación. ¿Puede ser que posea sólo uno?

Ejercicio 6 Probar que todo subconjunto discreto de $\mathbb{R}^n$ es a lo sumo numerable.

Ejercicio 7 Decidir cuáles de las siguientes funciones definen métricas en $\mathbb{R}$:

$$d_1(x,y) = (x-y)^2\,, \qquad d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}\,, \qquad d_3(x,y) = |x^2 - y^2|\,,$$

$$d_4(x,y) = |x - 2y|\,, \qquad d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}\,.$$

Ejercicio 8 Mostrar que son métricas en $\mathbb{R}^n$ las funciones de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ dadas por

$$d_1(x,y) = \sum_{1\le i\le n} |x_i - y_i| \;\;, \quad d_2(x,y) = \left(\sum_{1\le i\le n} (x_i-y_i)^2\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad d_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|.$$

Dibujar las bolas $B_1(0)$ correspondientes para $n=1$, $n=2$ y $n=3$.

ESPACIOS MÉTRICOS

Ejercicio 9 Sea $p \in \mathbb{N}$ un primo fijo y sea $N : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dada por

$$N(a) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } p^n \mid a \text{ y } p^{n+1} \nmid a, \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Probar que la función $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definida como $d(a,b) = N(a-b)$ es una métrica en $\mathbb{Z}$.

Ejercicio 10 Sea X un conjunto no vacío. Probar que existe una única métrica $\delta : X\times X \to \{0,1\}$, llamada *métrica discreta*. Dar una expresión para δ y caracterizar los abiertos de (X,δ).

Ejercicio 11 Sea ℓ^∞ el espacio vectorial real de todas las sucesiones acotadas de números reales. Probar que es una métrica en ℓ^∞ la función $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ dada por

$$d((a_n)_{n\geq 1}\,,\,(b_n)_{n\geq 1}) = \sup_{n\geq 1} |a_n - b_n|.$$

Ejercicio 12 Dados reales $a < b$, sea $C[a,b]$ el conjunto de todas las funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$. Probar que son métricas en $C[a,b]$ las funciones $d_1, d_\infty : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \qquad \text{y} \qquad d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Ejercicio 13 Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que la función $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por

$$d'(x_1,x_2) = \frac{d(x_1,x_2)}{1 + d(x_1,x_2)} \quad \text{para } x_1,x_2 \in X$$

es una métrica topológicamente equivalente a d que hace de X un espacio métrico acotado.

Ejercicio 14 Dar dos métricas en $\mathbb{R}$ que sean topológicamente equivalentes pero no equivalentes.

Ejercicio 15 Probar que las métricas d_1, d_2 y d_∞ del Ejercicio 8 son equivalentes sobre $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 16 Dados espacios métricos (X,d_X) e (Y,d_Y), verificar que en el producto $X\times Y$ son métricas (uniformemente) equivalentes entre sí las funciones d_1, d_∞ dadas por

$$d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2) \qquad \text{para } (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X\times Y,$$

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d_X(x_1,x_2),\, d_Y(y_1,y_2)\} \qquad \text{para } (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X\times Y.$$

Construir otras métricas “naturales” en $X\times Y$ y decidir si son equivalentes a d_1 y d_∞.

Ejercicio 17 Considerar espacios métricos $((X_n,d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ con $d_n \leq 1$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Probar que es una métrica en $X = \prod_{n\geq 1} X_n$ la función $d : X\times X \to \mathbb{R}$ dada por

$$d((x_n)_n,(y_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, d_n(x_n,y_n).$$

Probar que una sucesión en (X,d) converge si y sólo si lo hace en cada coordenada.

Propiedades topológicas

Ejercicio 18 Sea (X,d) un espacio métrico.

a) Para $A\subset X$ es A° la unión de los abiertos contenidos en A.

b) Se tiene $\emptyset^\circ = \emptyset$, $X^\circ = X$ y para $A,B \subset X$ cualesquiera valen

$$i)\ A\subset B \implies A^\circ \subset B^\circ, \qquad ii)\ (A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ \quad \text{y} \quad iii)\ (A\cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ.$$

¿Se extiende *ii*) a intersecciones infinitas? ¿Vale la igualdad en *iii*)?

Ejercicio 19 Sea (X,d) un espacio métrico.

a) Para $A \subset X$ es $\overline{A}$ la intersección de los cerrados que contienen a A.

b) Se tiene $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{X} = X$ y para $A, B \subset X$ cualesquiera valen

$$i)\ \ A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}, \qquad ii)\ \ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{y} \quad iii)\ \ \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

¿Se extiende *ii*) a uniones infinitas? ¿Vale la igualdad en *iii*)?

c) Si $A \subset X$ y $x \in X$, entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión en A convergente a x.

Ejercicio 20 Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que si $A \subset X$ entonces

$$(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A} \qquad \text{y} \qquad \overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ.$$

¿Es cierto que $\overline{A} = \overline{A^\circ}$? ¿Y que $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

Ejercicio 21 Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que si $A \subset X$ entonces su frontera ∂A es un cerrado de X y verifica $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ y $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

Ejercicio 22 Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que si U y F son un abierto y un cerrado de X, entonces $F \setminus U$ y $U \setminus F$ son un cerrado y un abierto de X.

Ejercicio 23 Sea (X,d) un espacio métrico. Si $x \in X$ y $r > 0$, el conjunto

$$B_r[x] = B[x,r] = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$$

es la *bola cerrada de centro x y radio r*. Probar las siguientes afirmaciones.

a) Para cada $x \in X$ y cada $r > 0$ el conjunto $B[x,r]$ es cerrado y $\overline{B(x,r)} \subset B[x,r]$.

b) En general no vale la igualdad en la inclusión anterior.

Ejercicio 24 Con la notación del Ejercicio 16, probar que para $A_1 \subset X_1$ y $A_2 \subset X_2$ se tiene

$$(A_1 \times A_2)^\circ = A_1^\circ \times A_2^\circ \quad \text{y} \quad \overline{A_1 \times A_2} = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2.$$

Ejercicio 25 Sea (X,d) un espacio métrico.

a) Si $A \subset X$ entonces su conjunto derivado A' es un cerrado de X.

b) Para $A, B \subset X$ cualesquiera valen

$$i)\ \ A \subset B \implies A' \subset B', \quad ii)\ \ (A \cup B)' = A' \cup B', \quad iii)\ \ \overline{A} = A \cup A' \quad \text{y} \quad iv)\ \ (\overline{A})' = A'.$$

c) Si $A \subset X$ y $x \in X$, entonces $x \in A'$ si y sólo si alguna sucesión en $A \setminus \{x\}$ converge a x.

Ejercicio 26 Para cada uno de los siguientes conjuntos determinar el interior, la clausura, la frontera y el conjunto derivado, y decidir si es abierto o cerrado:

$$[0,1]\ , \qquad (0,1)\ , \qquad \mathbb{Q}\ , \qquad \mathbb{Q} \cap [0,1]\ , \qquad \mathbb{Z}\ , \qquad [0,1) \cup \{2\}.$$

Ejercicio 27 Probar que todo par de métricas topológicamente equivalentes definen los mismos abiertos, cerrados, interiores, clausuras, fronteras y sucesiones convergentes.

Ejercicio 28 Describir los abiertos y cerrados de $\mathbb{Z}$ visto como subespacio de $\mathbb{R}$. Generalizar la descripción al caso de un subconjunto discreto Z de un espacio métrico arbitrario (X, d).

Ejercicio 29 Si $S \subset \mathbb{R}$ es no contable entonces el conjunto P de los puntos de condensación de S es *perfecto* (es decir, P es cerrado y $P = P'$) y la diferencia $S \setminus P$ es a lo sumo numerable.

Ejercicio 30 Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que $A \subset X$ es un G_δ si es intersección de una familia numerable de abiertos, y que es un F_σ si es unión de una familia numerable de cerrados.

a) El complemento de un G_δ es un F_σ y el complemento de un F_σ es un G_δ.

b) Todo abierto es un conjunto F_σ y todo cerrado es un conjunto G_δ.

c) Exhibir un subconjunto de $\mathbb{R}$ que sea G_δ y F_σ pero no sea abierto ni cerrado.

Distancias a conjuntos

Siendo (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $A, B \subset X$ subconjuntos no vacíos, se definen la *distancia de x a A* y la *distancia de A a B*, respectivamente, como

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\} \quad \text{y} \quad d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Para todo $r > 0$ se definen el *r-entorno abierto de A* y el *r-entorno cerrado de A* como

$$B_r(A) = \{x \in X : d(x, A) < r\} \quad \text{y} \quad B_r[A] = \{x \in X : d(x, A) \leq r\}.$$

Ejercicio 31 Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ no vacío. Probar las siguientes afirmaciones:

a) Para todo par de puntos $x_1, x_2 \in X$ se tiene $|d(x_1, A) - d(x_2, A)| \leq d(x_1, x_2)$.

b) Para $x \in X$ se tiene $d(x, A) = 0$ si $x \in A$ y vale la equivalencia $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

c) Los r-entornos abiertos de A son abiertos, los r-entornos cerrados de A son cerrados y verifican

$$\overline{A} \subset B_r(A) \subset B_r[A] \text{ para todo } r > 0 \quad \text{y} \quad \overline{A} = \bigcap\nolimits_{r>0} B_r(A) = \bigcap\nolimits_{r>0} B_r[A].$$

d) Para $r, s > 0$ se tiene $B_r(B_s(A)) \subset B_{r+s}(A)$ y $B_r[B_s[A]] \subset B_{r+s}[A]$. ¿Valen las igualdades?

Ejercicio 32 Probar que si A y B son subconjuntos no vacíos de un espacio métrico (X, d) entonces

$$d(A, B) = \inf\{d(a, B) : a \in A\} = \inf\{d(b, A) : b \in B\}.$$

Ejercicio 33 Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, B, C \subset X$ subconjuntos no vacíos. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

a) $d(A, B) = d(B, A)$, *c*) $d(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$, *e*) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$,

b) $d(A, B) = d(A, \overline{B})$, *d*) $d(A, B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, *f*) $|d(A, B) - d(B, C)| \leq d(A, C)$.