Práctica 10

# Diferenciación

## Diferenciación en $\mathbb{R}$

**Ejercicio 1** Enunciar y probar los teoremas de Fermat, Rolle y Lagrange.

**Ejercicio 2** Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo de longitud positiva y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable.

*a*) Es $f$ constante si y sólo si es $f'$ idénticamente nula.

*b*) Es $f$ no decreciente si y sólo si es $f'$ no negativa.

*c*) Es $f$ estrictamente creciente si y sólo si es $f' \geq 0$ y vacío el interior de $\{x \in I : f'(x) = 0\}$.

*d*) Si $f'$ es acotada, entonces $f$ es Lipschitz y por lo tanto uniformemente continua.

**Ejercicio 3** Sea $x_0 \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ y sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función continua, derivable en $(a, b) \setminus \{x_0\}$ y tal que los límites laterales para $f'$ en $x_0$ existen y son finitos.

*a*) Probar que $f$ es derivable lateralmente en $x_0$ y que, si ambos límites laterales coinciden y valen $\ell$, entonces $f$ es derivable en $x_0$ con $f'(x_0) = \ell$.

*b*) Mostrar que en *a*) es necesaria la hipótesis de continuidad en $x_0$ para $f$.

**Ejercicio 4** Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo con interior no vacío y $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable, entonces $f'$ tiene la *propiedad de los valores intermedios*: cuando $a, b \in I$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ verifican $f'(a) < \lambda < f'(b)$, existe $c$ entre $a$ y $b$ con $f'(c) = \lambda$. Este resultado se conoce como el *Teorema de Darboux*.

## Diferenciación en espacios de Banach

Sean $E$ y $F$ espacios de Banach, $U \subset E$ un abierto no vacío y $f : U \to F$ una función. Se dice que $f$ es *diferenciable* (*Fréchet*) en $x_0 \in U$ si existe $T \in L(E, F)$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - T(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} = 0. \qquad (*)$$

Cuando existe $T$ es única: es la *diferencial* de $f$ en $x_0$ y se nota $Df(x_0)$.

**Ejercicio 5** Sean $E$ y $F$ espacios de Banach, $U \subset E$ un abierto no vacío y $f : U \to F$ una función.

*a*) Si $T_1, T_2 : E \to F$ son dos transformaciones lineales que satisfacen $(*)$, entonces $T_1 = T_2$.

*b*) Si para algún $x_0 \in U$ existe una transformación lineal $T : E \to F$ que satisface $(*)$ y además $f$ es acotada en un entorno de $x_0$, entonces $T$ es continua y $f$ es diferenciable en $x_0$.

Notar que ni en *a*) ni en *b*) se asume que las transformaciones lineales sean continuas.

**Ejercicio 6** Sean $E$ y $F$ espacios de Banach, $U \subset E$ abierto no vacío y $f : U \to F$ una función.

*a*) Es $f$ diferenciable en $x_0 \in U$ si y sólo si existen $T \in L(E, F)$ y $r : U \to F$ continua en $x_0$ con $r(x_0) = 0$ tales que $f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + \|x - x_0\| \cdot r(x)$ para todo $x \in U$.

*b*) Si $f$ es diferenciable en $x_0 \in U$, entonces existen $\delta > 0$ y $c \geq 0$ tales que la bola $B_\delta(x_0)$ está contenida en $U$ y $\|f(x) - f(x_0)\| \leq c\|x - x_0\|$ para todo $x \in B_\delta(x_0)$.

**Ejercicio 7** Si $U \subset \mathbb{R}$ es abierto y $F$ un espacio de Banach, una función $f : U \to F$ es diferenciable en $x_0 \in U$ si y sólo si es derivable en $x_0$. En tal caso, $Df(x_0)(v) = v \cdot f'(x_0)$ para todo $v \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 8** Enunciar la *Regla de la cadena* para funciones entre espacios de Banach.

**Ejercicio 9** Sea $E$ un espacio de Banach, sean $x_1, x_2 \in E$ y sea $U \subset E$ un abierto que contiene al segmento cerrado de extremos $x_1$ y $x_2$.

*a*) Siendo $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, probar que en el segmento $[x_1, x_2]$ existe un punto $x_0$ con $f(x_1) - f(x_2) = Df(x_0)(x_1 - x_2)$.

*b*) Mostrar con un ejemplo que lo probado en *a*) no vale para funciones vectoriales.

*c*) Siendo $F$ un espacio de Banach y $f : U \to F$ una función diferenciable con $\|Df(x)\| \leq M$ para todo $x \in U$, concluir que $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$.

**Ejercicio 10** Sean $E$ y $F$ espacios de Banach, $U \subset E$ un abierto conexo y $f : U \to F$ una función diferenciable. Probar que si $Df(x) = 0$ para todo $x \in U$, entonces $f$ es constante en $U$.

**Ejercicio 11** Sea $U$ un abierto conexo no vacío de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ una aplicación que satisface $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2$ para cualesquiera $x, y \in U$. Probar que $f$ es constante.

## Derivadas direccionales

Sean $E$ y $F$ espacios de Banach, $U \subset E$ un abierto no vacío y $f : U \to F$ una función. Dados $x_0 \in U$ y $v \in E$, la *derivada direccional* de $f$ en $x_0$ en la dirección $v$ se define como

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} \qquad \text{cuando este límite existe en } F.$$

**Ejercicio 12** Sean $E$ y $F$ espacios de Banach y sea $f : E \to F$ diferenciable en $x_0 \in E$. Probar que para cada $v \in E$ existe la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ y vale $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = Df(x_0)(v)$.

**Ejercicio 13** Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in U$. Concluir que existen todas las derivadas parciales de $f$ en $x_0$ y se tiene $[Df(x_0)] = \nabla f(x_0)$, de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle \qquad \text{para todo } v \in \mathbb{R}^n.$$

Generalizar estas observaciones para funciones vectoriales $F : U \to \mathbb{R}^m$.

**Ejercicio 14** Si $H$ es un espacio de Hilbert real, las funciones $N, Q : H \to \mathbb{R}$ dadas por $N(x) = \|x\|$ y $Q(x) = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ son diferenciables en $H \setminus \{0\}$ y en $H$ respectivamente.

**Ejercicio 15** Sea $U$ un abierto no vacío en un espacio de Banach $E$ y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función que alcanza un extremo local en $x_0 \in U$. Son nulas todas las derivadas direccionales de $f$ que existen en $x_0$, con lo cual resulta $Df(x_0)$ nula si $f$ es diferenciable en $x_0$.

**Ejercicio 16** Sea $U$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función. Probar que si $f$ tiene derivadas parciales en todo su dominio y además son acotadas, entonces $f$ es necesariamente continua.

**Ejercicio 17** Sea $f : E \to F$ una función entre espacios de Banach para la cual existen todas las derivadas direccionales en un punto $x_0 \in E$.

*a*) Mostrar con un ejemplo que $f$ podría ser discontinua en $x_0$.

Suponer, además, que $f$ es continua y que la aplicación $v \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ es un elemento de $L(E, F)$.

*b*) Mostrar con otro ejemplo que $f$ podría ser no diferenciable en $x_0$.

## Teoremas de la función inversa y de la función implícita

**Ejercicio 18** Enunciar y probar el *Teorema de la función inversa* para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

**Ejercicio 19** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(t) = \begin{cases} t + 2t^2 \operatorname{sen} \frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

Probar que $f$ es derivable con derivada acotada en $(-1, 1)$ y $f'(0) = 1 \neq 0$, a pesar de no ser $f$ biyectiva en ningún entorno de 0. Esto es posible por ser $f'$ discontinua en 0.

**Ejercicio 20** Probar que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (e^x \cos y,\ e^x \operatorname{sen} y)$ no es inyectiva aunque sí localmente inyectiva, pues su jacobiano es no nulo en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

**Ejercicio 21** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^1$. Si el jacobiano de $f$ es no nulo en todo $U$, entonces $f$ es abierta y para cada $y \in \mathbb{R}^n$ es $f^{-1}(y)$ un subconjunto discreto de $U$.

**Ejercicio 22** Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $(1, 2, 0)$ es solución de la ecuación $F(xz, y - 2x) = 0$.

*a*) Dar condiciones suficientes para que existan un entorno abierto $W$ de $(1, 0)$ $\mathbb{R}^2$ y una función $\phi : W \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$ con $\phi(1, 0) = 2$ y $F(xz, \phi(x, z) - 2x) = 0$ para todo $(x, z) \in W$.

*b*) Bajo las condiciones halladas en *a*), concluir que vale $x\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x, z) - z\dfrac{\partial \phi}{\partial z}(x, z) = 2x$ sobre $W$.

**Ejercicio 23** Considerar el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x^2 + \operatorname{sen} x - y^2 + z^3 = 0, \\ -\log(1 + x) + y^2 z = 1. \end{cases}$

*a*) Mostrar que este sistema define dos funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ de clase $C^1$ en un entorno $I \subset \mathbb{R}$ de 0 con $y(0) = z(0) = 1$.

*b*) Siendo $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dadas por $\sigma(t) = (t, y(t), z(t))$ y $g(x, y, z) = 2xyz + z \tan x$, calcular la derivada de $g$ en $(0, 1, 1)$ en la dirección del vector tangente a $\sigma$ en $t = 0$.