Práctica 1

Cardinalidad y Lema de Zorn

Cardinalidad

Ejercicio 1 Sea A un conjunto. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i) El conjunto A es infinito.

(ii) Para todo $x \in A$ existe una biyección $f_x : A \to A - \{x\}$.

(iii) Para todo $A_0 \subset A$ finito existe una biyección $f_{A_0} : A \to A - A_0$.

Ejercicio 2 Sea A un conjunto numerable. Probar que un conjunto no vacío B es contable si y sólo si existe una función sobreyectiva de A en B.

Ejercicio 3 Probar que son numerables los conjuntos

$$\mathbb{Z}_{\leq -1}\ ,\quad \mathbb{Z}_{\geq -3}\ ,\quad 3\cdot\mathbb{N}\ ,\quad \mathbb{Z}\ ,\quad \mathbb{N}^2,\quad \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\ ,\quad \mathbb{Q}\quad \text{y}\quad \mathbb{N}^m\ ,$$

donde m es un entero positivo cualquiera.

Ejercicio 4 Probar las siguientes afirmaciones.

a) Si A y B son conjuntos contables también lo son $A \cup B$ y $A \times B$.

b) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos contables también es contable la unión $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

c) Si $\mathcal{A}$ es un conjunto finito y no vacío entonces $\mathcal{S} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^m$ es infinito numerable. Concluir que hay más números reales que palabras para nombrarlos.

Ejercicio 5 Sean A un conjunto infinito y B uno numerable.

a) Probar que existe una biyección entre $A \cup B$ y A.

b) Suponiendo que A es no numerable y contiene a B, probar que $A - B$ y A son equipotentes.

Ejercicio 6 Probar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros es numerable.

Ejercicio 7 Un número $z \in \mathbb{C}$ es *algebraico* si es raíz de algún $P \in \mathbb{Z}[X]$ no nulo.

a) Demostrar que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable.

b) Deducir que existen números reales que no son algebraicos.

Nota: a los números no algebraicos se los llama *trascendentes*.

Ejercicio 8 Sea X un conjunto de números reales positivos. Probar que X es contable si para todo $F \subset X$ finito resulta $\sum_{x \in F} x \leq M$, donde M es una constante independiente de F.

Ejercicio 9 Dados un conjunto X y una función $f : X \to [0, \infty)$ se define el *soporte* de f como

$$\operatorname{sop}(f) = \{x \in X \,:\, f(x) \neq 0\}.$$

a) Suponiendo que existe una constante M tal que $\sum_{x \in F} f(x) \leq M$ para todo subconjunto $F \subset X$ finito, concluir que $\operatorname{sop}(f)$ es contable.

b) Explicar por qué *a*) generaliza el resultado probado en el Ejercicio 8.

Ejercicio 10 Sea Λ un conjunto y sea $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de intervalos abiertos de $\mathbb{R}$, no vacíos y disjuntos dos a dos, es decir, tales que $I_\lambda \cap I_{\lambda'} = \emptyset$ si $\lambda \neq \lambda'$. Probar que Λ es contable.

Ejercicio 11 Probar que toda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona tiene a lo sumo numerables discontinuidades.

Ejercicio 12 Probar que el conjunto de partes finitas de A es numerable si A lo es.

Ejercicio 13 Hallar los cardinales de los siguientes conjuntos de sucesiones:

a) $X_1 = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{N} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$,

b) $X_2 = \{(a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : a_n \leq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$,

c) $X_3 = \{(a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : a_n \geq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$,

d) $X_4 = \{(q_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : \text{lím}_{n \to \infty} q_n = 0\}$,

e) $X_5 = \{(q_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : (q_n) \text{ es periódica}\}$,

f) $X_6 = \{(a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : 1 \leq a_n \leq 5 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$,

g) $X_7 = \{(a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (a_n) \text{ es acotada}\}$.

Ejercicio 14 Hallar los cardinales de los siguientes conjuntos:

a) $A_1 = \{I : I \text{ es un intervalo cerrado de } \mathbb{R}\} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R},\, a \leq b\}$,

b) $A_2 = \{I : I \text{ es un intervalo cerrado de extremos racionales}\}$,

c) $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 7\}$,

d) $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y \geq 7\}$,

e) $A_5 = \mathbb{R}_{>0}$.

Ejercicio 15 Probar que una unión numerable de conjuntos de cardinal c tiene cardinal c.

Ejercicio 16 Considerar cardinales a, b y c.

a) Demostrar las identidades

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \ , \quad a^{b+c} = a^b \cdot a^c \ , \quad (a^b)^c = a^{b \cdot c} \quad \text{y} \quad (a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c.$$

b) Probar que si $b \leq c$ entonces $b^a \leq c^a$ y, si $a \neq 0$, también vale que $a^b \leq a^c$.

Ejercicio 17 Probar que $c = c^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = n^{\aleph_0}$ para $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Ejercicio 18 Mostrar que $\mathbb{R}$ es unión disjunta de c conjuntos de cardinal c.

Ejercicio 19 Definiendo los conjuntos

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}(\mathbb{Q}) = \{f \mid f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

considerar los subconjuntos

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ es continua}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}(\mathbb{Q}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{Q}) \mid f \text{ es continua}\}.$$

a) Mostrar que el cardinal de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ es mayor que c y calcularlo exactamente.

b) Calcular $|\mathcal{F}(\mathbb{Q})|$ y $|\mathcal{C}(\mathbb{Q})|$.

c) Probar que la función $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ dada por $\phi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ es inyectiva.

d) Calcular $|\mathcal{C}(\mathbb{R})|$.

Ejercicio 20 Probar que el conjunto de partes numerables de $\mathbb{R}$ tiene cardinal c.

Lema de Zorn

Ejercicio 21 Probar que si A y B son conjuntos entonces $|A| \leq |B|$ o $|B| \leq |A|$. En otras palabras, o bien existe $f : A \to B$ inyectiva, o bien existe $g : B \to A$ inyectiva.

Ejercicio 22 Sean A y B conjuntos no vacíos. Probar que existe $f : A \to B$ sobreyectiva si y sólo si existe una función inyectiva $g : B \to A$.

Ejercicio 23 Probar que las siguientes afirmaciones valen para todo espacio vectorial.

a) Todo conjunto linealmente independiente puede extenderse a una base.

b) De todo sistema de generadores puede extraerse una base.

Ejercicio 24 Probar que toda relación de orden se extiende a un orden total. Precisamente, si $\mathcal{R}$ es una relación de orden en un conjunto X entonces existe una relación de orden $\widetilde{\mathcal{R}} \supset \mathcal{R}$ tal que para cualesquiera $a, b \in X$ se tiene $(a,b) \in \widetilde{\mathcal{R}}$ o $(b,a) \in \widetilde{\mathcal{R}}$.