Práctica 0

Repaso

Axiomas de los números reales

Ejercicio 1 Escribir los axiomas de cuerpo ordenado para $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ y mostrar que, como consecuencia de dichos axiomas, para todo $x \in \mathbb{R}$ se obtiene

$$0 \cdot x = 0\,, \quad -(-x) = x\,, \quad (-1) \cdot x = -x \qquad \text{y} \qquad x^2 \geq 0\,.$$

Deducir la *regla de los signos* $(-1)(-1) = 1$ y la positividad de 1, es decir, que vale $1 > 0$.

Ejercicio 2 Enunciar el axioma del supremo para $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$. Probar que para $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y $s \in \mathbb{R}$ son equivalentes:

(i) s es el supremo de A;

(ii) s es cota superior de A y para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$.

Ejercicio 3 Probar que en $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ son verdaderas las siguientes afirmaciones.

a) No está acotado superiormente el conjunto $\mathbb{N} := \{\, 1,\ 1+1,\ 1+1+1,\ \ldots \,\}$ y no está acotado superior ni inferiormente el conjunto $\mathbb{Z} := \{\, m \in \mathbb{R} \,:\, m = 0 \vee m \in \mathbb{N} \vee -m \in \mathbb{N} \,\}$.

b) Se verifica la *arquimedianidad*: para $x, y > 0$ cualesquiera existe $n \in \mathbb{N}$ con $nx > y$.

c) Todo elemento positivo tiene raíz cuadrada: para todo $x > 0$ existe $y > 0$ con $y^2 = x$.

Ejercicio 4 Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define la *parte entera de x* como el número real

$$\lfloor x \rfloor := \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}.$$

Probar que $\lfloor x \rfloor$ está bien definida, notar que $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ y probar las siguientes afirmaciones:

a) $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

b) $\lfloor x \rfloor = x$ si y sólo si $x \in \mathbb{Z}$;

c) si $x < y$ entonces $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$;

d) $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Densidad

Ejercicio 5 Escribir una definición de conjunto *denso* en $\mathbb{R}^n$. Para el caso de la recta real $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, dar una definición equivalente que sólo use el orden $\leq$ en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 6 Probar que son densos en $\mathbb{R}$ los conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ y $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}_0 \right\}$.

Ejercicio 7 Fijando $\lambda \in \mathbb{R}$ positivo, probar que si $D \subset \mathbb{R}$ es denso también lo es $\{\lambda x \,:\, x \in D\}$.

Ejercicio 8 Dados $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ probar que existe $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$ con

$$\|x - q\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - q_i)^2\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Concluir que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$.

Sucesiones y series

Ejercicio 9 Probar que toda subsucesión de una sucesión convergente es también convergente.

Ejercicio 10 Probar que una sucesión monótona en $\mathbb{R}$ es convergente si y sólo si es acotada.

Ejercicio 11 Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona en $\mathbb{R}$. Probar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\ell \in \mathbb{R}$ si alguna de sus subsucesiones lo hace. ¿Qué pasa si la subsucesión tiene límite infinito?

Ejercicio 12 Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$. Dada una tercera sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para la que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $a_n \le c_n \le b_n$ si $n \ge n_0$, concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$.

Ejercicio 13 Si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$, ¿puede afirmarse que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es convergente?

Ejercicio 14 Probar que todo $x \in \mathbb{R}$ es límite de una sucesión monótona estricta de racionales.

Ejercicio 15 Considerar series reales convergentes $\sum_{n\ge1} a_n$ y $\sum_{n\ge1} b_n$. Probar que la serie $\sum_{n\ge1} (a_n + b_n)$ y la serie $\sum_{n\ge1} ca_n$ con $c \in \mathbb{R}$ resultan ambas convergentes y valen las igualdades

$$\sum_{n\ge1} (a_n + b_n) = \sum_{n\ge1} a_n + \sum_{n\ge1} b_n \qquad \text{y} \qquad \sum_{n\ge1} ca_n = c \cdot \sum_{n\ge1} a_n.$$

Ejercicio 16 Probar que toda serie absolutamente convergente es convergente.

Ejercicio 17 Mostrar que $\sum_{n\ge1} a_n^2$ puede converger o diverger cuando $\sum_{n\ge1} a_n$ es convergente. Dar hipótesis sobre $\sum_{n\ge1} a_n$ que permitan garantizar la convergencia de $\sum_{n\ge1} a_n^2$.

Desarrollos en base b

Dada una *base* $b \ge 2$, un *desarrollo en base* b para un número real $x \in [0, 1)$ es una sucesión de *dígitos* b*-arios* x_1, x_2, x_3, ... en $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ tales que $x = \sum_{k\ge1} x_k b^{-k}$, lo que usualmente se indica escribiendo $x = (0.x_1x_2x_3\ldots)_b$ o $x = 0.x_1x_2x_3\ldots$ si se sobreentiende la base b utilizada.

Ejercicio 18 Considerar $x, y \in [0, 1)$ y una base $b \ge 2$.

a) Probar que x e y admiten desarrollos únicos en base b sin colas de dígitos $b - 1$.

b) Si $x = 0.x_1x_2x_3\ldots$ e $y = 0.y_1y_2y_3\ldots$ son desarrollos como en *a*), probar que $x < y$ si y sólo si existe $k_0 \in \mathbb{N}$ con $x_k = y_k$ para $1 \le k \le k_0 - 1$ y $x_{k_0} < y_{k_0}$.

Ejercicio 19 Desarrollar en las bases 2, 5 y 10 los reales 3/8, 1/5 y 3/10.

Límite superior y límite inferior

Para una sucesión de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se definen su *límite inferior* y su *límite superior* como

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left[\inf_{m\geq n} a_m\right] \qquad \text{y} \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left[\sup_{m\geq n} a_m\right]$$

respectivamente, adoptando la convención de considerar $\sup A = +\infty$ cuando A es no acotado superiormente e $\inf A = -\infty$ cuando A es no acotado inferiormente.

Ejercicio 20 Probar que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite ℓ si y sólo si $\liminf_{n\to\infty} a_n = \ell = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Ejercicio 21 Probar que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ acotada superiormente tiene límite superior $\ell \in \mathbb{R}$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

(i) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < \ell + \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, y

(ii) para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ y $a_m > \ell - \varepsilon$.

Caracterizar análogamente el límite inferior de sucesiones acotadas inferiormente.

Ejercicio 22 Dada una sucesión de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ considerar el conjunto

$$L = \left\{ \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \,:\, (a_{n_k})_k \text{ es subsucesión de } (a_n)_n \right\} \subset [-\infty, +\infty].$$

Probar que $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \min L \leq \max L = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ejercicio 23 Probar las siguientes afirmaciones para $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ acotadas.

a) Vale la desigualdad $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

b) Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ entonces $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

c) Si $a_n, b_n \geq 0$ para $n \geq n_0$ entonces $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

d) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe y es positivo entonces $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

Enunciar y probar afirmaciones análogas para el límite inferior.

Conjuntos, relaciones y funciones

Ejercicio 24 Expresar las relaciones de inclusión e igualdad entre conjuntos, notadas $\subset$ y $=$, en términos de la relación de pertenencia $\in$. Probar que se tiene $x \in A$ si y sólo si $\{x\} \subset A$.

Ejercicio 25 Probar o refutar las siguientes afirmaciones:

$$\emptyset \in \emptyset\,,\ \ \emptyset \subset \emptyset\,,\ \ \emptyset \in \{\emptyset\}\,,\ \ \emptyset \subset \{\emptyset\}\,,\ \ \emptyset \in \{1,2\}\,,\ \ \emptyset \subset \{1,2\}\,,\ \ \{1\} = \{1,\emptyset\}.$$

Ejercicio 26 Siendo $(A_i)_{i\in I}$ una familia conjuntos y B otro conjunto, probar las igualdades

$$B - \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(B - A_i) \qquad \text{y} \qquad B - \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(B - A_i).$$

Ejercicio 27 Definir *producto cartesiano* y probar que vale $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset$.

Ejercicio 28 Definir *relación de equivalencia*. Para una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto A, escribir las definiciones de *clase de equivalencia* y *conjunto cociente*.

Ejercicio 29 Definir *relación de orden*. Escribir qué debe satisfacer una relación de orden $\leq$ en un conjunto A para ser un *orden total* y para ser un *buen orden*.

Ejercicio 30 Siendo A y B conjuntos, dar la definición de *función de A en B*. Explicar por qué existe siempre una única función de $\emptyset$ en B, llamada *función vacía*, mientras que puede no existir ninguna función de A en $\emptyset$.

Ejercicio 31 Sea $f : X \to Y$ una función. Para subconjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$, la *imagen de A por f* y la *preimagen de B por f* se definen como

$$f(A) = \{\, y \in Y \,:\, y = f(x) \text{ para algún } x \in A \,\} \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(B) = \{\, x \in X \,:\, f(x) \in B \,\}.$$

Probar las siguientes afirmaciones.

a) Si f es inversible y $B \subset Y$, la ambigüedad en la notación $f^{-1}(B)$ es inocua.

b) Para $A \subset X$ y $B \subset Y$ se tiene

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \;, \qquad f(f^{-1}(B)) \subset B \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B).$$

c) Si $(B_i)_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos de Y entonces

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \qquad \text{y} \qquad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

Ejercicio 32 Sea $f : X \to Y$ una función. Probar la equivalencia

$$f \text{ es sobreyectiva} \iff f\left(f^{-1}(B)\right) = B \text{ para todo } B \subset Y \iff f(A) \cup f(B) = Y \text{ si } A \cup B = Y$$

y la equivalencia análoga

$$f \text{ es inyectiva} \iff f^{-1}(f(A)) = A \text{ para todo } A \subset X \iff f(A) \cap f(B) = \emptyset \text{ si } A \cap B = \emptyset.$$

Ejercicio 33 Dada una sucesión de conjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, construir conjuntos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$i)\ B_n \subset A_n \text{ para todo } n \;, \quad ii)\ B_{n_1} \cap B_{n_2} = \emptyset \text{ si } n_1 \neq n_2 \quad \text{y} \quad iii)\ \bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n.$$

Hallar conjuntos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con estas propiedades se conoce como *disjuntar la unión* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Ejercicio 34 Sea $X\,/\!\sim$ el conjunto cociente para una relación de equivalencia $\sim$ en X. Se dice que una función $f : X \to Y$ *pasa bien al cociente* si la función $\overline{f} : X\,/\!\sim\, \to Y$ dada por $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$ está bien definida, donde $\overline{x}$ denota la clase de equivalencia de $x \in X$ respecto de $\sim$.

a) ¿Qué relación debe haber entre f y $\sim$ para que f pase bien al cociente?

b) Dar una terna $(X, \sim, f)$ donde f pase bien al cociente y otra terna donde eso no suceda.

c) Dar una definición de *pasar bien al cociente* para una relación R en X y construir ejemplos como en *b*) pero con relaciones R en lugar de funciones f.