

TOPOLOGÍA DIFERENCIAL- 2026
PRÁCTICA TRES
Teoría de Morse

1. Probar que la función determinante definida en la matrices $n \times n$ es función de Morse para $n = 2$ y no es Morse para $n > 2$.
2. Sea $H : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ y sea $H_t(x) = H(x, t)$. Probar que si H_0 es Morse en algún entorno de un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que H_t es Morse en algún entorno de K para todo $t < \varepsilon$. Deducir que, para toda variedad cerrada M , las funciones de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ son estables por perturbaciones.
3. Sea M subvariedad de $\mathbb{R}^n$. Probar que existe alguna transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que restringida a M es función de Morse.
4. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse. Un campo C^∞ X en M se dice que es de tipo-gradiente para f si cumple lo siguiente:
 - a) Para todo punto regular $p \in M$ vale que $d_p f(X_p) > 0$
 - b) Si $p \in M$ es crítico de índice k , entonces existe una carta (U, ϕ) alrededor de p tal que $\phi(p) = 0$, $f \circ \phi^{-1}(x) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$ y $\phi_* X = \text{Grad}(f \circ \phi^{-1})$ donde Grad es el campo gradiente usual en $\mathbb{R}^n$.Probar que toda función de Morse admite un campo tipo-gradiente.
5. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse con puntos críticos $p_1, \dots, p_r$. Probar que existe una función de Morse $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ con los mismos puntos críticos que f y tal que $g(p_i) \neq g(p_j)$ si $i \neq j$.
6. Sabemos que la esfera S^n tiene estructura de CW-complejo con 2 k -celdas por cada $0 \leq k \leq n$ (además de la estructura usual con una 0-celda y una n -celda). ¿Puede encontrar una función de Morse definida en la esfera que tenga 2 puntos críticos de índice k para cada $0 \leq k \leq n$?
7. Sea $\mathbb{R}P^n$ el espacio proyectivo real de dimensión n . Probar, usando funciones de Morse, que su característica de Euler vale 1 cuando n es par y 0 cuando es impar. (Sugerencia: toda función real definida en el espacio proyectivo es equivalente a una función par definida en la esfera S^n).
8. Sea S una superficie compacta orientable de género g (un toro con g manijas). Probar que toda función de Morse en S tiene al menos $2g + 2$ puntos críticos y que existen funciones de Morse en S con exactamente esa cantidad de puntos críticos.
9. Probar usando teoría de Morse que si M es una variedad compacta de dimensión impar entonces $\chi(M) = 0$.
10. Sea W una variedad compacta con borde ∂W . Usando el teorema 1 de la teoría de Morse y el hecho de que para toda variedad compacta con borde existe una función $g : W \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $g^{-1}(0) = \partial W$ y g no tiene puntos críticos en un entorno del borde, probar que el borde admite un “collar neighborhood”, es decir existe un entorno del borde difeomorfo a $\partial W \times [0, 1)$.

11. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse definida en una variedad M cerrada y conexa. Probar que si f tiene al menos dos mínimos locales entonces tiene un punto crítico de índice 1.
12. Es posible encontrar una función de Morse definida en $\mathbb{R}^2$ que tenga solamente dos puntos críticos y que ambos sean de índice cero?
13. (Otra demostración de las desigualdades fuertes de Morse). Sea M variedad cerrada de dimensión n y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse. Sean b_j los números de Betti de M y c_j la cantidad de puntos críticos de f de índice j . Se define el polinomio de Poincaré de M como $P(t) = \sum_{j=0}^n b_j t^j$ y sea $C(t) = \sum_{j=0}^n c_j t^j$ el polinomio asociado a la función f . Probar que

$$C(t) - P(t) = (t+1)R(t),$$

donde $R(t)$ es un polinomio con coeficientes enteros no negativos. Deducir las desigualdades de Morse:

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} c_j \geq \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} b_j \quad (\forall k \leq n)$$

En particular se tiene que $c_j \geq b_j$ para todo j .

14. Con las notaciones del ejercicio anterior, probar que si para cada j se tiene que $c_j = 0$ o $c_{j-1} = 0$, entonces $b_k = c_k$ para todo k .
15. Sea $p : N \rightarrow M$ un revestimiento de d hojas, donde M es una variedad conexa cerrada. Probar que $\chi(N) = d\chi(M)$.
16. Sean M y N variedades cerradas y sean f y g funciones de Morse definidas en M y N respectivamente. Probar que $h : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = f(x) + g(y)$ es de Morse. Describir sus puntos críticos e índices en términos de los de f y g y deducir la fórmula:

$$\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N).$$

17. Sea M una n -esfera homológica (es decir M es una variedad cerrada de dimensión n que tiene la homología de S^n). Probar que si M no es homeomorfa a S^n entonces no admite funciones de Morse perfectas.
18. Sea M una variedad cerrada. Probar que si $H_k(M)$ tiene torsión para algún k , entonces M no admite funciones de Morse perfectas. En particular el plano proyectivo no admite funciones de Morse perfectas y, más en general, ninguna variedad no orientable admite funciones de Morse perfectas.
19. Probar que si el grupo fundamental de M es un grupo perfecto no trivial, entonces M no admite funciones de Morse perfectas.