

TOPOLOGÍA DIFERENCIAL- 2026
PRÁCTICA DOS
Intersección módulo 2 y grado módulo 2

Nota: Salvo que se especifique lo contrario, las variedades son sin borde y, cuando el ejercicio trata de intersección módulo 2, las variedades satisfacen las hipótesis de intersección usuales.

1. Probar que la ecuación

$$z^7 + \cos(|z|^2)(1 + 93z^4) = 0$$

tiene solución en \mathbb{C} .

2. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ diferenciables, con X compacta. Sea W una subvariedad regular cerrada en Z y supongamos que g es transversal a W (y por lo tanto $g^{-1}(W)$ es subvariedad de Y). Probar que

$$I_2(f, g^{-1}(W)) = I_2(gf, W)$$

3. Probar que, si $f : X \rightarrow Y$ es nullhomotópica (i.e. homotópica a una constante), entonces $I_2(f, Z) = 0$ para toda subvariedad cerrada de dimensión complementaria Z , excepto quizás en el caso que la dimensión de X sea 0. Qué puede pasar en ese caso?

4. Probar que si Y es una variedad contráctil de dimensión positiva, entonces $I_2(f, Z) = 0$, para toda $f : X \rightarrow Y$ con X compacta y toda subvariedad Z cerrada en Y y de dimensión complementaria. (Incluso para el caso en el que dimensión de X sea 0). Deducir que la única variedad compacta contráctil y sin borde es el singleton.

5. Sea M variedad cerrada con $0 < \dim(M) < n$ y sea $f : M \rightarrow S^n$ suave. Probar que $I_2(f, Z) = 0$ para toda subvariedad cerrada $Z \subset S^n$ de dimensión complementaria a M . Notar que esto nos dice que los números de intersección no son interesantes sobre esferas salvo cuando la dimensión del dominio es igual a la de la esfera, es decir: los únicos números de intersección interesantes sobre esferas son los grados de funciones.

6. Sea X compacta e Y conexa de la misma dimensión. Sea $f : X \rightarrow Y$ tal que $\deg_2(f) \neq 0$. Probar que f es sobreyectiva. En particular, si Y no es compacta, $\deg_2(g) = 0$ para toda $g : W \rightarrow Y$ tal que W compacta de la misma dimensión.

7. Dos subvariedades compactas X, Z de Y se dicen *cobordantes en Y* si existe una subvariedad compacta con borde, W , en $Y \times I$ tal que $\partial W = X \times \{0\} \cup Z \times \{1\}$. Probar que si X y Z son cobordantes en Y , entonces $I_2(X, C) = I_2(Z, C)$ para toda subvariedad cerrada C de Y de dimensión complementaria a X y Z .

8. (Winding number módulo 2) Sea X una variedad cerrada y conexa de dimensión $n - 1$ y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable. Dado $z \in \mathbb{R}^n$ que no está en la imagen de f , se define el *winding number módulo 2* de f alrededor de z como $W_2(f, z) = \deg_2(u)$ donde $u : X \rightarrow S^{n-1}$ es la función $u(x) = \frac{f(x) - z}{|f(x) - z|}$ (es decir, se mide la cantidad de veces que f da vueltas alrededor de z módulo 2). Probar que si X es el borde de una variedad compacta D y la $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ se puede extender a $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $z \in \mathbb{R}^n$ es valor regular de F , entonces $F^{-1}(z)$ es finito y $W_2(f, z) = \#F^{-1}(z) \pmod{2}$. (Sugerencia: probar que (i) si z no está en la imagen de F , entonces $W_2(f, z) = 0$, (ii) Si $F^{-1}(z) = \{y_1, \dots, y_r\}$, tomar una bolita B_i alrededor de cada y_i tal que las B_i 's no se intersequen entre sí ni intersequen al borde X . Sea f_i la restricción de F a ∂B_i . Entonces $W_2(f, z) = W_2(f_1, z) + \dots + W_2(f_r, z) \pmod{2}$ y (iii) elegir B_i apropiadas para que $W_2(f_i, z) = 1$).