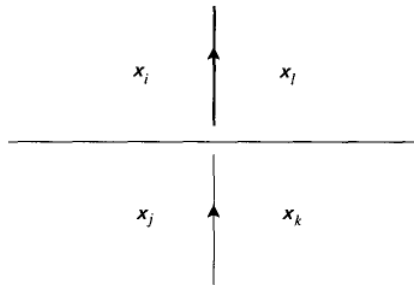


TOPOLOGÍA DIFERENCIAL- 2026
PRÁCTICA CINCO
Nudos

1. Sea K un nudo en $\mathbb{R}^3$. Probar que la inclusión de $\mathbb{R}^3$ en S^3 induce un iso $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) = \pi_1(S^3 - K)$.
2. Sea D el diagrama de un nudo clásico K . Recordar que un tramo del diagrama es la parte que va de un cruce por abajo a otro cruce por abajo. Decimos que K es tricoloreable si se puede pintar cada tramo con un color elegido de una paleta de 3 colores de tal forma que (1) se usen al menos dos de los tres colores y (2) en cada cruce, los tres tramos involucrados usen los 3 colores o todos tengan el mismo color. Probar que el nudo 8 no es tricoloreable y el trébol sí lo es.
3. Probar, utilizando van Kampen, la fórmula de la presentación de Wirtinger del grupo de un nudo.
4. Probar que el grupo del nudo trébol admite también la presentación $\langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle$.
5. Usando van Kampen y factorizando al nudo como suma conexas de dos nudos primos, probar que el grupo del siguiente nudo admite la presentación $\langle x, y, z \mid xyx = yxy, xzx = zxx \rangle$.

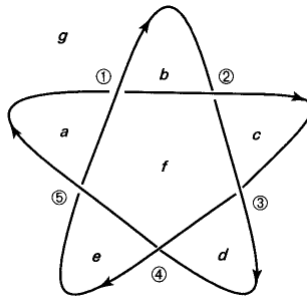


6. Probar, a partir de la presentación de Wirtinger, que el abelianizado del grupo de un nudo es $\mathbb{Z}$.
7. Encontrar una presentación del grupo del nudo 8 con la menor cantidad posible de generadores.
8. (Presentación de Dehn) Probar, utilizando van Kampen, que al grupo de un nudo se lo puede presentar con la siguiente presentación, llamada "presentación de Dehn". Sea D su diagrama (orientado) en un plano. Por cada región del plano en la que queda separado por el diagrama ponemos un generador x_i . Por cada cruce



ponemos la relación $x_i x_j^{-1} x_k x_l^{-1}$ (sentido anti-horario de las regiones que intervienen en el cruce) y al final agregamos una última relación $x_m = 1$ (eligiendo cualquier generador x_m).

9. Probar, utilizando la presentación de Dehn, que el grupo del siguiente nudo admite la presentación $\langle f, y \mid f^5 = y^2 \rangle$ (en el dibujo están etiquetadas las regiones del plano y numerados los cruces).



10. Utilizando las presentaciones de Dehn calculamos el grupo de la suma de dos nudos $K + L$: probar que si las presentaciones de Dehn de K y L son $\langle X \mid R \rangle$ (donde X es un conjunto de generadores que contiene a un generador x) y $\langle Y \mid S \rangle$ (donde Y es un conjunto de generadores que contiene a un generador y), entonces $\langle X, Y \mid R, S, x = y \rangle$ es presentación del grupo de $K + L$.
11. Dar una demostración alternativa (sin utilizar género, usando el grupo del nudo) del resultado que dice que si $K + L = 0$ entonces $K = L = 0$.
12. Probar que si S es superficie de Seifert de un nudo K construída con el algoritmo de Seifert y S tiene c circuitos de Seifert (= círculos) y n cruces, entonces $\chi(S) = c - n$ y por lo tanto $g(S) = 1/2(1 - c + n)$.
13. Calcular el género del nudo 8.