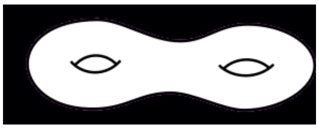
Topología aplicada y análisis topológico de datos

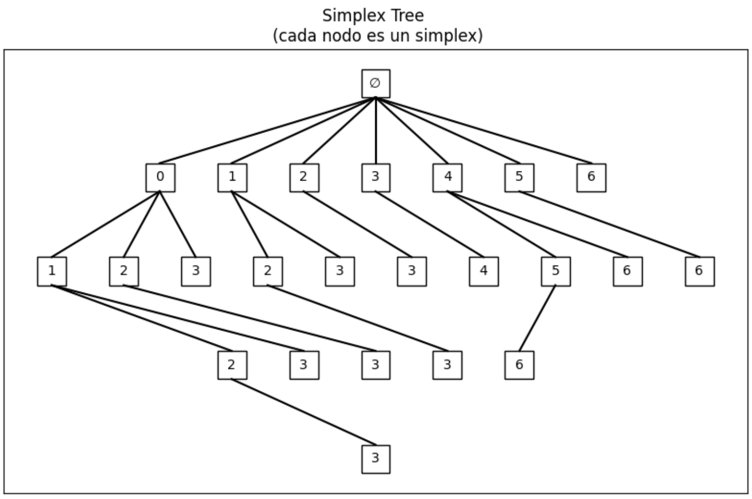
Ejercicios 1: Complejos simpliciales

- **Ejercicio 1.** Exhibir (con un dibujo donde se noten los vértices, aristas y triángulos) una triangulación del toro doble (*Sugerencia: recordar cómo construir el toro doble a partir de un octógono*).



- **Ejercicio 2.** La siguiente forma de manipular/almacenar complejos simpliciales es usada por el GUDHI (y fue introducida por J-D. Boissonnat y C. Maria en el año 2012). Definimos el simplex-tree de un complejo simplicial K como un árbol que tiene un vértice (nodo) por cada simplex de K de la siguiente manera: ordenamos todos los vértices de K (en el ejemplo de la figura de la página 2 tenemos $0 < 1 < 2 < \ldots < 6$), debajo de cada vértice v ponemos los vértices w que forman un simplex con v y sean mayores que v (en el orden establecido al comienzo).

  En el ejemplo, debajo del 0 ponemos a $1, 2, 3$ porque son mayores que 0 y cada uno forma un simplex con el 0. Repetimos eso en cada fila. Cada nodo del árbol (salvo la raíz) representa a un simplex de K (en la primera fila de arriba los 0-símplices, la segunda fila corresponde a los 1-símplices, etc). Los vértices de cada simplex son todas las etiquetas que se pueden leer desde abajo para arriba desde ese nodo hasta llegar a la raíz. La figura muestra el simplex-tree asociado al complejo simplicial cuyos símplices maximales son $[(0,1,2,3),(3,4),(4,5,6)]$ (un tetraedro y un triángulo unidos por una arista).



  (i) Probar, usando el simplex tree, que la complejidad para decidir si un m-simplex σ está o no en K es $O(m.log(n))$ (donde n es la cantidad de vértices de K).

(ii) ¿Cómo buscar las caras de un simplex σ en el simplex tree? ¿Y las co-caras? (las co-caras de un simplex σ son los símplices τ tales que $\sigma \leq \tau$).

(iii) ¿Cómo agregar (o sacar) un simplex maximal σ en el simplex tree si sus caras ya están (resp. quedan) en el árbol?

(iv) Dibujar el simplex tree asociado al complejo simplicial cuyos símplices maximales son $[(0,1,2,3),(2,3,4),(5,6)]$ (notar que no es conexo).

- **Ejercicio 3.** Probar que toda triangulación K del toro tiene al menos 7 vértices.

  Sugerencias: (i) usar que K es un complejo simplicial, (ii) recordar, como vimos en la clase, que toda arista en una triangulación de una superficie (sin borde) está en exactamente dos triángulos, (iii) usar que, en toda triangulación del toro, $\#\textit{vértices} - \#\textit{aristas} + \#\textit{triángulos} = 0$, que es la característica de Euler del toro (y lo veremos pronto).

- **Ejercicio 4.** Calcular el mínimo cardinal de un cubrimiento (por abiertos) *bueno* de S^2 y exhibir (o describir) un buen cubrimiento de mínimo cardinal. *Sugerencia: usar teorema del nervio y pensar en triangulaciones.*