Estructuras geométricas para las variedades de Banach

Gabriel Larotonda

Estructuras geométricas para las variedades de Banach

Gabriel Larotonda
Estructuras geométricas para las variedades de Banach. 2da Ed. Buenos Aires xxxxxxxxx.
310 p. 22x15 cm
ISBN XXX-XXXX
1. ???. I. Gabriel Larotonda.
CDD ??
Fecha de catalogación: ???

© Gabriel Larotonda, 2022
Este material puede ser distribuido únicamente
sujeto a los términos y condiciones expuestos en la
Licencia Abierta de Publicación
(Open Publication License, v1.0)
www.opencontent.org/openpub/

Diseño y armado de interior: Gabriel Larotonda, con la ayuda de LaTeX 2_ε

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page v

A la memoria de
Ángel Rafael Larotonda
(1939-2005)

Índice general

I Estructuras Diferenciables 1

1 Cálculo Diferencial e Integral 3
1.1. Operadores lineales . . . 3
1.1.1. Algunos teoremas útiles . . . 4
1.2. Diferenciabilidad en espacios de Banach . . . 5
1.2.1. Operadores bilineales y cuadráticos . . . 8
1.3. Integración . . . 9
1.4. Aproximaciones, acotaciones . . . 11
1.5. Fórmula de Taylor . . . 11
1.6. Funciones analíticas . . . 15
1.7. Funciones Inversa e Implícita . . . 22
1.7.1. Función Inversa . . . 22
1.7.2. Función Implícita . . . 22
1.7.2.1. Subespacios sin suplemento . . . 29
1.A. Problemas . . . 29

2 Variedades Diferenciables 35
2.1. Cartas y Atlas . . . 35
2.2. Espacio y Fibrado tangente . . . 37
2.2.1. Espacio tangente . . . 37
2.2.2. Fibrado tangente . . . 38
2.2.2.1. Fibrados . . . 39
2.2.2.2. Fibrados vectoriales . . . 39
2.2.2.3. Fibrado Tangente . . . 40
2.2.3. Diferencial de una función . . . 41
2.3. Levantadas de una curva . . . 42

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page viii

2.4. Subvariedades . . . 43
2.4.1. Subvariedades de un espacio de Banach . . . 47
2.4.1.1. La esfera de un espacio de Hilbert . . . 48
2.5. Campos . . . 49
2.5.1. Flujo de un campo . . . 49
2.5.2. Campos f-relacionados . . . 53
2.5.3. Derivaciones . . . 54
2.6. El corchete de Lie . . . 54
2.6.1. El corchete de Lie en superficies de nivel . . . 56
2.6.2. Derivada de Lie . . . 57
2.A. Problemas . . . 60

3 Grupos de Lie **61**
3.1. Teoría general . . . 62
3.1.1. Campos invariantes . . . 63
3.1.2. Grupos a un parámetro y exponencial . . . 64
3.1.2.1. La exponencial del grupo . . . 66
3.1.3. La representación adjunta y morfismos . . . 67
3.1.3.1. Homomorfismos y la naturalidad de exp . . . 67
3.1.4. La diferencial del mapa exponencial . . . 70
3.1.5. La representación local del producto . . . 73
3.1.5.1. Fórmulas de Lie-Trotter . . . 74
3.1.6. La serie de Baker-Campbell-Hausdorff . . . 75
3.1.7. Grupos locales y la regularidad de los grupos de Lie . . . 77
3.2. Subgrupos de Lie-Banach . . . 81
3.2.1. El álgebra de Lie de un subgrupo cerrado . . . 82
3.3. Integración de morfismos y el revestimiento universal . . . 88
3.4. Los grupos de automorfismos . . . 94
3.5. Espacios homogéneos . . . 97
3.5.1. Órbitas . . . 101
3.A. Problemas . . . 104

4 El Grupo Lineal **109**
4.1. El grupo de elementos inversibles, estructura local . . . 109
4.1.1. Las representaciones L y R . . . 110
4.2. Grupos lineales de matrices: un vistazo rápido . . . 111
4.2.1. El grupo lineal $GL(n, \mathbb{C})$ . . . 112
4.2.2. El grupo de matrices unitarias . . . 113
4.2.3. El grupo ortogonal . . . 114
4.2.4. El grupo simpléctico . . . 114
4.3. Espacios homogéneos de grupos de matrices . . . 116

4.3.1. La variedad de Grassmann . . . 116
4.3.2. Matrices positivas inversibles . . . 117
4.4. Subgrupos algebraicos . . . 118
4.5. El grupo de isometrías . . . 120
4.5.1. El grupo unitario de un álgebra C* . . . 123
4.5.1.1. Logaritmos de operadores unitarios . . . 125
4.6. El cono positivo de un álgebra C* . . . 126
4.6.1. Conos positivos . . . 127
4.6.2. Descomposición de Cartan y conmutadores . . . 129
4.7. Órbitas de similaridad y coadjuntas . . . 130
4.7.1. La órbita de similaridad de un inversible autoadjunto . . . 131
4.7.2. La órbita coadjunta de un operador autoadjunto . . . 131
4.7.3. La Grassmanniana como la órbita de un proyector . . . 132
4.A. Problemas . . . 138

5 El Fibrado TTM **141**
5.1. Expresiones locales para TTM y sus proyecciones . . . 141
5.1.1. Proyecciones de TTM en TM . . . 142
5.1.1.1. Fibrados verticales . . . 143
5.2. Subvariedades de un espacio lineal . . . 144
5.2.1. La esfera de un espacio de Hilbert . . . 144
5.2.2. Superficies de nivel . . . 146
5.2.2.1. Fibrados verticales en subvariedades . . . 148
5.3. El flip canónico . . . 148
5.4. Aceleraciones y 2-jets . . . 150
5.A. Problemas . . . 152

6 Conexiones y Sprays **153**
6.1. Sprays . . . 154
6.1.1. Geodésicas . . . 159
6.1.2. Exponencial . . . 160
6.2. Sprays cuadráticos o afines . . . 160
6.2.1. Entornos uniformemente normales . . . 161
6.3. Conexiones . . . 162
6.4. Conexión de Koszul . . . 165
6.5. Sprays canónicos . . . 167
6.6. La derivada covariante: derivar y proyectar . . . 168
6.7. Derivada covariante y transporte paralelo . . . 170
6.7.1. Derivada covariante de levantadas . . . 171
6.7.2. Transporte paralelo . . . 172
6.A. Problemas . . . 174

7 El tensor de curvatura y sus invariantes **175**
7.1. El tensor de curvatura R . . . 176
7.1.1. Subvariedades de un espacio de Banach . . . 177
7.2. Campos de Jacobi . . . 178
7.2.1. Campos de Jacobi versus exponencial . . . 180
7.3. Automorfismos de la geometría y campos de Killing . . . 181
7.4. La curvatura y las transformacions afines . . . 191
7.5. Espacios simétricos . . . 197
7.5.1. Espacios localmente simétricos . . . 205
7.5.2. Espacios simétricos de Cartan . . . 208
7.5.2.1. De espacios simétricos a espacios de Cartan . . . 214
7.6. Ejemplos de conexiones en variedades . . . 215
7.6.1. Espacios lineales . . . 216
7.6.2. La esfera de un espacio de Hilbert . . . 216
7.6.2.1. La esfera como espacio simétrico . . . 218
7.6.3. El grupo de inversibles de un álgebra de Banach . . . 220
7.6.4. El grupo de operadores unitarios . . . 222
7.6.5. Operadores positivos e inversibles . . . 224
7.6.5.1. El spray trivial . . . 224
7.6.5.2. El spray canónico . . . 224
7.6.5.3. Operadores positivos como espacio simetrico . . . 226
7.6.6. La Grassmanniana . . . 228
7.6.6.1. La Grassmanniana como espacio simétrico . . . 230
7.A. Problemas . . . 232

II Estructuras Métricas **235**

8 Espacios de Métrica Interior **237**
8.1. La distancia rectificable . . . 237
8.1.1. Espacios de métrica interior . . . 241
8.1.2. Geodésicas . . . 244
8.2. El teorema de Hopf-Rinow métrico . . . 244
8.2.1. El teorema de Ascoli . . . 245
8.2.2. El teorema de Hopf-Rinow métrico . . . 245
8.A. Problemas . . . 247

9 Variedades de Finsler **249**
9.1. Métricas de Finsler . . . 249
9.1.1. Funcionales longitud y energía . . . 250
9.1.1.1. Las variedades de Finsler . . . 251
9.1.2. Normas acotadas y compatibles . . . 251

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page xi

9.1.2.1. Hopf-Rinow en variedades de Finsler 256
9.2. Variedades de Finsler con spray 256
9.3. Métricas de Finsler vía operadores acotados 258
9.4. Métricas invariantes 259
9.4.1. Métricas invariantes y el spray canónico 259
9.4.2. Espacios homogéneos y métricas cocientes 260
9.4.3. Operadores positivos con métricas simétricas 261
9.5. El teorema de Cartan 265
9.A. Problemas 271

10 Variedades Riemannianas y pseudo-Riemannianas 273
10.1. La derivada de Levi-Civita 274
10.1.1. La derivada de Levi-Civita de una subvariedad 276
10.1.1.1. La Grassmanniana en los autoadjuntos 277
10.1.2. Sprays métricos en espacios homogéneos 278
10.1.2.1. El spray métrico del grupo de inversibles 278
10.1.2.2. Geodésicas 279
10.2. Cálculo de variaciones 281
10.2.1. Fórmulas variacionales 283
10.2.1.1. La variación de la energía 285
10.3. Las geodésicas son localmente minimizantes 285
10.3.1. El lema de Gauss 286
10.3.2. Coordenadas polares 287
10.3.3. Minimalidad de las geodésicas 287
10.3.3.1. Variedades Riemannianas débiles 289
10.3.4. Las curvas continuas minimales 290
10.3.5. La esfera, grupos unitarios y la Grassmanniana 291
10.3.5.1. La esfera de un espacio de Hilbert 291
10.3.5.2. El grupo de operadores unitarios 293
10.3.5.3. El grupo de unitarios con la norma uniforme 297
10.3.5.4. El grupo de unitarios con normas simétricas 298
10.3.5.5. La Grassmanniana 299
10.4. Existencia global de geodésicas cortas 300
10.5. Convexidad local 303
10.6. Isometrías 305
10.6.1. Invariancia de la derivada de Levi-Civita por isometrías 306
10.6.2. Campos de Killing métricos 308
10.7. Curvatura seccional 310
10.7.1. Variedades planas 311
10.7.2. Curvatura de grupos lineales y espacios homogéneos 312
10.7.2.1. La esfera de un espacio de Hilbert 312

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page xii

10.7.2.2. El spray métrico del grupo de inversibles 312
10.7.2.3. El grupo unitario 313
10.7.2.4. Operadores positivos inversibles 314
10.7.2.5. La Grassmanniana 315
10.8. Espacios simétricos riemannianos 316
10.8.1. Espacios simétricos de Cartan (caso Finsler y riemanniano) . . 317
10.9. El teorema de Cartan 319
10.9.1. Campos de Jacobi versus curvatura 319
10.9.2. La adjunta de la diferencial de exp 321
10.9.3. Curvatura no positiva 321
10.A. Problemas 323

IIIApéndices: Álgebras de Operadores **327**

A Álgebras de Banach **329**
A.1. Álgebras con involución 329
A.2. Cálculo funcional analítico 330
A.2.1. Propiedades del espectro 330
A.2.1.1. Radio espectral 331
A.2.2. El grupo de inversibles 332
A.2.3. Cálculo funcional de Cauchy 333
A.3. Rango y radio numérico 338
A.3.1. El rango numérico y los grupos a un parámetro 341
A.3.2. La relación entre rango numérico y espectro 344
A.4. Problemas 345

B Álgebras C^* **347**
B.1. El radio espectral de un operador normal 347
B.2. Cálculo funcional continuo 348
B.3. Teorema de Gelfand y la representación GNS 350
B.3.1. El espacio de caracteres 350
B.3.2. La transformada de Gelfand en C^*-álgebras 352
B.3.2.1. Invariancia del espectro 352
B.3.3. El Teorema de Gelfand 353
B.3.4. Propiedades del cálculo funcional continuo 354
B.3.4.1. Elementos positivos 355
B.3.4.2. Funciones monótonas y convexas 356
B.3.4.3. Los $*$-morfismos 357
B.3.5. La representación GNS 357
B.3.5.1. Funcionales positivas y estados 357
B.3.5.2. Estados normizantes 359

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page xiii

B.3.6. La construcción de Gelfand, Naimark y Segal 360
B.3.6.1. Vectores normizantes 361
B.4. Descomposición polar 362
B.4.1. Descomposición polar 363
B.5. Problemas 363

C Álgebras de von Neumann **365**
C.1. Cálculo funcional Boreliano 365
C.1.1. Teorema espectral 365
C.1.2. Medida espectral 367
C.1.3. Descomposición polar en W^*-algebras 367
C.2. Problemas 368

D Normas en Álgebras de Operadores **369**
D.1. Ideales en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 369
D.1.1. Descomposición en valores singulares 369
D.1.1.1. Espacios de sucesiones 371
D.1.2. Ideales de operadores compactos 373
D.1.3. Operadores compactos de Schatten 377
D.1.4. Desigualdad de Hölder, dualidades, norma Frobenius 379
D.1.5. El teorema de Lidskii y la ciclicidad de la traza 380
D.2. Normas simétricas en álgebras C* 380
D.2.1. Álgebras con traza finita 381
D.3. Problemas 385

Bibliografía **387**

Índice alfabético **397**

Introducción

Nadie puede escribir un libro.
Para que un libro sea verdaderamente,
Se requieren la aurora y el poniente,
Siglos, armas, y el mar que une y separa.

J. L. Borges

Este texto nace con la idea de presentar una exposición sistemática del estudio de la geometría de los grupos de Lie-Banach y sus espacios homogéneos, con especial énfasis en las nociones métricas de la geometría diferencial, cuyo primer problema a nuestro entender es el de las curvas minimales.

Habitualmente, se presentan las conexiones, las geodésicas y otros objetos geométricos como derivados de una métrica inevitablemente Riemanniana, soslayando el hecho de que una conexión es simplemente una elección de suplementos en cierto fibrado vectorial sobre la variedad, y que esto no implica necesariamente la existencia de un producto interno en este fibrado. La elección de estos suplementos se puede presentar, en particular, como un *spray* en la variedad (una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias en el fibrado tangente), que permite introducir de manera natural la noción de *geodésica* como la solución local de este sistema de ecuaciones. Este es el enfoque con el que queremos abordar los problemas de geometría que hacen a las curvas cortas y la curvatura: una perspectiva que nos permita trabajar en modelos sin limitaciones de dimensión, y sin supuestos sobre una estructura Hilbertiana o pre-Hilbertiana en el espacio vectorial que modela la variedad. En particular, estamos interesados en aquellos modelos que surgen de los grupos lineales y sus espacios homogéneos, tanto en dimensión finita como infinita, donde puede observarse que, desde el punto de vista del álgebra de operadores, las normas o métricas a introducir no suelen derivarse de una estructura Hilbertiana: el caso paradigmático es

la norma uniforme del álgebra de operadores acotados, la cual no proviene de ningún producto interno, y no es equivalente a ninguna norma con estas características en el caso infinito dimensional. Este contexto de matrices y operadores es rico en ejemplos que nos permiten introducir estas nociones de spray o conexión de manera concreta e independiente de la métrica a partir de proyectores, idempotentes y esperanzas condicionales; en los últimos años esta manera de trabajar ha tenido un desarrollo notable especialmente en el contexto de dimensión infinita vinculado con las álgebras C^* y las álgebras de von Neumann. Por otra parte, estas álgebras son ricas en normas simétricas (invariantes por la acción del grupo de unitario, que es el grupo de isometrías del espacio de Hilbert subyacente al álgebra de operadores) y estas normas nos proveen de una importante cantidad de ejemplos de *métricas de Finsler* en las variedades, es decir, elecciones continuas de normas en el fibrado tangente de la variedad (nos desviamos aquí de la noción clásica de métrica de Finsler donde se supone que la norma introducida es dos veces diferenciable fuera del origen y su Hessiano es definido positivo). Entre las clases más relevantes de normas simétricas en operadores en un espacio de Hilbert, se hallan las normas de p-Schatten, que se computan como la norma p usual de la sucesión de valores singulares del operador en cuestión; en este contexto son conocidos una serie de resultados geométricos vinculados con la convexidad uniforme del espacio normado subyacente.

En la segunda parte del libro abordaremos la noción de espacio de longitud o *espacio de métrica interior*, que a partir del trabajo de Mikhail Gromov en gupos hiperbólicos [42], ha cobrado especial relevancia, en particular relacionada con aquellos espacios que son de curvatura no positiva. En este contexto, la distancia entre dos puntos se obtiene como el ínfimo de las longitudes de arcos rectificables que los unen. Como estaremos interesados en la noción de curva corta, presentaremos la versión métrica del Teorema Hopf-Rinow que establece la existencia de geodésicas (entendidas como arcos rectificables de longitud mínima) en espacios localmente compactos.

Estudiaremos la relación entre variedades de Finsler y espacios de métrica interior, amalgamando los resultados de la primera parte del libro con la teoría métrica introducida en la segunda. Abordaremos las nociones de curvatura y curvatura seccional, presentando la primera como derivada del spray, es decir independiente de la métrica, y estudiando la segunda como el puente que une la noción de spray con la de geometría Riemanniana. La curvatura seccional separa los espacios Riemannianos en dos categorías importantes (no exhaustivas), según estos tengan curvatura seccional positiva o negativa en todos sus puntos; el comportamiento de las curvas cortas es drásticamente distinto según sea el caso. Para ilustrar esta afirmación, basta considerar dos ejemplos muy sencillos, como la circunferencia unitaria $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ y una rama de hipérbola $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$, de curvatura seccional positiva y negativa respectivamente (aunque cabe aclarar que en el primer caso la curvatura es constante y en el segundo

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 3

no lo es): de acuerdo al teorema de Cartan-Hadamard (que presentamos en este texto en el contexto de variedades de Finsler con spray), en una variedad de curvatura no positiva simplemente conexa, se da siempre este fenónomeno de unicidad de curvas cortas.

Por otra parte el Teorema de Hopf-Rinow establece la equivalencia (en dimensión finita) entre completitud métrica y completitud geodésica, garantizando la existencia de curvas cortas que unen dos puntos dados. Sin embargo, hay ejemplos sencillos de variedades Riemannianas de dimensión infinita donde ambos conceptos no son equivalentes. En casos concretos, herramientas desarrolladas ad-hoc para el ejemplo permiten encarar el problema de manera exitosa y no sólo determinar la existencia de geodésicas minimales, sino construirlas explícitamente: presentaremos en este texto una serie de problemas y resultados sobre minimalidad de curvas que hasta ahora sólo se hallan publicados en revistas especializadas, concernientes tanto a variedades de dimensión infinita como a variedades de Finsler donde la norma no es diferenciable y por lo tanto no está disponible el cálculo de variaciones usual. Nos enfocaremos en ejemplos provenientes de la teoría de operadores, especialmente aquellos que provienen de los llamados *grupos de Lie-Banach clásicos*, de las álgebras C^* y las álgebras de von Neumann, que juegan una parte importante en esta exposición, no sólo como modelos geométricos, sino también a traves de las técnicas propias de las álgebras de operadores, que permiten abordar ciertos problemas de geometría de una manera novedosa.

Prerequisitos: Para la lectura de este texto estimamos suficiente que el lector conozca en profundidad la geometría de curvas y superfices en el plano y en el espacio, como es abordada por ejemplo en el texto de do Carmo [22]. Respecto de la teoría de grupos y sus espacios homogéneos, es recomendable que el lector tenga cierta familiaridad con las nociones topológicas generales vinculadas a estos espacios, o por lo menos domine los aspectos básicos de espacios topológicos en general, como cubrimientos, bases de entornos, sucesiones, topologías cociente, etc.; si sumamos ciertas nociones básicas de análisis funcional, todos estos temas ocupan por ejemplo los primeros cuatro capítulos del libro de Reed y Simon [80]. Los temas más especializados de álgebras de operadores se encuentran desarrollados para beneficio del lector en los apéndices de este libro.

Agradecimientos: vaya mi agradecimiento expreso para todos aquellos matemáticos que me mostraron en primera persona cómo pensar la geometría de esta manera singular, a través de problemas concretos en álgebras de operadores; en particular Esteban Andruchow, Gustavo Corach y Lázaro Recht. Un agradecimiento especial para Cristian Conde, colega, amigo, editor y corrector desinteresado. También quiero agradecer a Martín Miglioli que estudió y corrigió minuciosamente el manuscrito. Por último, no puedo dejar de mencionar la contribución de los dos evaluadores

anónimos del libro, que mediante sus observaciones y correcciones hicieron sin duda de este un manuscrito mejor. De todas las posibles faltas e imprecisiones que puedan quedar en el libro, sólo puedo culpar a mis limitaciones como escritor y matemático, esperando que puedan ser tolerables para el lector, o que sean enmascaradas por el entusiasmo que espero compartan conmigo sobre los temas aquí abordados.

Parte I

Estructuras Diferenciables

En esta primera parte del libro, desarrollaremos herramientas geométricas que no involucren la elección explícita de una norma o métrica en la variedad diferenciable a estudiar. Como veremos, las variedades de Banach tienen una gran riqueza geométrica una vez que uno consigue introducir una conexión o spray en ellas, independientemente de si esta proviene de una métrica o no.

De particular relevancia son aquellas variedades que provienen del grupo de inversibles de un álgebra de Banach, y sus espacios homogéneos. En los apéndices del libro introducimos las nociones básicas del cálculo funcional y la teoría de operadores para poder trabajar con una familia de ejemplos que ilustren las nociones y provoquen nuevas preguntas, siempre con el espíritu de entender los objetos de forma geométrica, sin necesidad de usar coordenadas y por consiguiente sin limitaciones de dimensión.

Capítulo 1

Cálculo Diferencial e Integral

> Where ignorance is bliss, 'tis folly to be wise.
>
> Thomas Gray

Comenzamos en este capítulo con los fundamentos de la teoría de operadores acotados en espacios de Banach, que nos permitirán introducir nociones de diferenciación e integración. Luego presentamos versiones infinitodimensionales de los teoremas de la función inversa y de la función implícita. Este capítulo no debe tomarse como un capítulo de prerequisitos, sino como una parte integral de nuestro acercamiento *sin coordenadas* a la geometría: revisaremos resultados clásicos del cálculo con una mirada no clásica. Le debemos mucho de nuestra presentación al excelente libro de Lang [58] de geometría Riemanniana.

1.1. Operadores lineales

Todos nuestros espacios vectoriales serán sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Sean E, F espacios normados, o en particular espacios de Banach, es decir, espacio vectoriales normados completos. Empecemos por recordar que $T \in \mathcal{B}(E,F)$ si T es lineal y además es *acotado* en el siguiente sentido

$$\sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}: \quad x \in E, \quad x \neq 0\right\} < \infty.$$

Notar que la norma del numerador es la norma de F, mientras que la del denominador es la de E. Equivalentemente, $T \in \mathcal{B}(E,F)$ si T es lineal y continuo. En el caso acotado se suele denominar a este número *norma uniforme* de T,

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}: \quad x \in E, \quad x \neq 0\right\} = \sup\{\|Tx\|: \quad x \in E, \quad \|x\| \leq 1\}$$

o *norma supremo*. Notemos que el conjunto $\mathcal{B}(E,F)$ con la norma recién definida es un espacio de Banach: en efecto es un espacio vectorial y no es difícil probar que es completo, usando (únicamente) la completitud de F.

Observación 1.1.1. Notemos que si E tiene dimensión finita, hay una única topología que hace a la suma y el producto por escalares continuo, y con esto puede verse que todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes (y el espacio es completo). Además toda transformación lineal será continua. Luego si E, F son espacios de dimensión finita, también lo es $\mathcal{B}(E,F)$ y además cualquier transformación lineal entre E, F será continua. En este caso podemos tomar cualquier otra norma en $\mathcal{B}(E,F)$ sin afectar la convergencia en ese espacio, ya que todas son equivalentes.

Como veremos más adelante en contextos específicos, la norma uniforme no es la única manera de definir una norma en el conjunto de operadores lineales.

En el caso $E = F$ se suele abreviar $\mathcal{B}(E,E) = \mathcal{B}(E)$ al conjunto de endomorfismos acotados y nos referiremos a ellos como *operadores lineales acotados actuando en* E o directamente *operadores acotados en* E.

En el caso $F = k$ el cuerpo base, al espacio $E' = \mathcal{B}(E,k)$ se lo denomina *espacio dual* de E. No debe confundirse con el dual algebraico, que consiste de todas las funcionales lineales de E en k. Para distinguirlos, a veces se dice que E' es el *dual topológico* de E.

1.1.1. Algunos teoremas útiles

Listamos a continuación algunas herramientas fundamentales. La primera es un teorema de separación de objetos convexos en espacios normados mediante hiperplanos, que en el contexto de espacios de Banach enunciamos en una de sus posibles formas equivalentes.

Teorema 1.1.2 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sea* E *un espacio de Banach,* $S \subset E$ *un subespacio.*

- *Sea* $N : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *una funcional convexa, es decir si* $a, b \in k$ *(*k *es* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*) son tales que* $|a| + |b| \leq 1$*, entonces*

$$N(av + bw) \leq |a|N(v) + |b|N(w) \qquad \text{para todo } v, w \in E.$$

  Entonces si $\psi : S \to k$ *es una funcional lineal tal que* $|\psi(s)| \leq N(s)$ *para todo* $s \in S$*, existe* $\varphi \in E'$ *tal que* $\varphi = \psi$ *en* S *y* $|\varphi| \leq N$ *en todo* E.

- *En particular, dado* $v \in E$*, existe* $\varphi \in E'$ *tal que* $\varphi(v) = \|v\|$*,* $\|\varphi\| = 1$.

La prueba puede verse en el tomo I de "Methods of modern mathematical physics", por Michael Reed y Barry Simon [80], Teorema III.5.

Teorema 1.1.3 (Teorema de la función abierta (Banach-Schauder)). *Si* E, F *son espacios de Banach y* $T \in \mathcal{B}(E, F)$ *es sobreyectiva, entonces* T *es abierta. Es decir, si* $U \subset E$ *es abierto, entonces* $TU \subset F$ *es abierto.*

Corolario 1.1.4. *Si* E, F *son espacios de Banach y* $T \in \mathcal{B}(E, F)$ *es biyectivo, entonces la inversa* $T^{-1} : F \to E$ *es continua. Es decir* T *es un isomorfismo topológico de espacios de Banach.*

Teorema 1.1.5 (Teorema del gráfico cerrado). *Si* E, F *son espacios de Banach y* $T : E \to F$ *es lineal, entonces* $T \in \mathcal{B}(E, F)$ *si y sólo si*

$$Gr(T) = \{(v, Tv) : v \in E\} \subset E \times F$$

es un subespacio cerrado.

El siguiente resultado debido a Banach y Steinhaus es conocido como *principio de acotación uniforme* o por su sigla en castellano *PAU*.

Teorema 1.1.6 (Teorema de Banach-Steinhaus). *Sea* E *un espacio de Banach y* F *un espacio normado. Sea* $\mathfrak{F}$ *una familia de operadores acotados de* E *en* F. *Supongamos que para cada* $x \in E$, *el conjunto*

$$\{\|Tx\| : T \in \mathfrak{F}\}$$

es acotado. Entonces el conjunto $\{\|T\| : T \in \mathfrak{F}\}$ *es acotado.*

El Teorema del gráfico cerrado y el de la función abierta son equivalentes, y todos son consecuencia del teorema de categoría de Baire. Todos estos resultados del análisis funcional pueden verse en la Sección III.5 del libro de Reed-Simon [80].

1.2. Diferenciabilidad en espacios de Banach

Sean E, F espacios de Banach, y $f : E \to F$ una función. Diremos que f es diferenciable en $v \in E$ si existe un operador lineal acotado $L_v \in \mathcal{B}(E, F)$ tal que

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{1}{\|h\|} \|f(v + h) - f(v) - L_v h\| = 0. \tag{1.1}$$

Notemos que la noción de diferenciabilidad depende de las topologías de los espacios de Banach E, F, ya que el cálculo de límites depende las topologías. Sin embargo, E, F tienen dimensión finita, todo operador lineal es acotado así que esa condición

puede omitirse. También podemos cambiar la convergencia en E, F por cualquier otra convergencia dada por sendas normas, ya que todas las normas en son equivalentes.

En ese caso al operador L_v lo denotaremos Df_v ó f_{*v}, usualmente leído como *diferencial de* f *en* v. Observemos que, si f es diferenciable en $v \in E$, entonces

$$L_v x = \lim_{t \to 0} \frac{f(v + tx) - f(v)}{t}$$

para todo $x \in E$.

Toda función diferenciable es continua. Si f es diferenciable en todo $v \in U$ para algún abierto $U \in E$, diremos que f *es diferenciable en* U.

Observación 1.2.1. Si E, F son de dimensión finita los podemos asimilar mediante isomorfismos lineales a los espacios k^n, k^m respectivamente. Entonces si escribimos a los vectorse en coordenadas, o sea $x = (x^1, \cdots x^n) \in k^n$, podemos escribir $f = f(x^1, \cdots, x^n)$; por otro lado como f llega a k^m debe ser $f = (f_1, \ldots, f_m)$ con $f_i : k^n \to k$. Esto es lo que habitualmente llamamos un campo de k^n en k^m. Podemos ver que cada derivada parcial de cada f_i es exactamente la diferencial de f_i en la dirección de $v = e_i$. Luego podemos asimilar al operador diferencial Df_x con una matrix cuyas entradas son $\frac{\partial f_i}{\partial x^j}$, Multiplicando esta matriz por un vector de k^n (escrito en coordenadas de la base canónica) nos devuelve el vector $Df_x v$, escrito en coordenadas de la base canónica de k^m.

Si $f : E \to F$, $g : F \to G$ son funciones diferenciables, entonces es fácil ver que $g \circ f : E \to G$ es una función diferenciable y que vale *la regla de la cadena*:

$$D(g \circ f)_v = Dg_{f(v)} Df_v.$$

Observación 1.2.2. Si $f : E \to F$ es lineal y continua (es decir si $f \in \mathcal{B}(E, F)$), entonces es fácil verificar que $Df = f$, es decir f es diferenciable en todo E y además $Df_v(w) = f(w)$ para todo $v, w \in E$.

Observación 1.2.3. Si $f : E \to F$ es diferenciable y $T \in \mathcal{B}(F, G)$ (con G otro espacio de Banach), entonces un caso particular de la regla de la cadena de muy fácil demostración es la siguiente identidad:

$$D(T \circ f) = TDf.$$

Para poner un poco en contexto la definición (1.1), se suele decir que f es *diferenciable Fréchet* (por Maurice Fréchet). Hay nociones más débiles de diferenciabilidad, como por ejemplo ser *diferenciable Gâteaux* en $v \in E$ (por René Gâteaux), que significa que para todo $h \in E$, existe el límite

$$d_x f(h) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{|t|} \{f(v + th) - f(v)\},$$

y en este caso $d_x f(h)$ no tiene por qué ser lineal en h (ni acotado). En el caso complejo el límite se toma cambiando $t \in \mathbb{R}$ por $z \in \mathbb{C}$ y haciendo $z \to 0$.

Volviendo al caso que nos interesa (1.1), si f es diferenciable entonces tiene sentido preguntarse sobre la continuidad de la función $Df : E \to \mathcal{B}(E, F)$ dada por

$$Df(v) = Df_v,$$

es decir a la función que a cada vector le asigna la diferencial de f. Esta función, aunque su imagen consiste de operadores lineales, es usualmente no lineal (salvo que f sea una forma cuadrática, ver la próxima sección). Cuando Df es continua en un abierto $U \subset E$, decimos que f *es* C^1 *en* U.

Como $G = \mathcal{B}(E, F)$ es un espacio de Banach, nos podemos preguntar si la función $Df : E \to G$ es diferenciable en U. Si lo es, diremos que su diferencial $D(Df) = D^2 f$ es la *diferencial segunda de* f. Observemos que

$$D^2 f : U \to \mathcal{B}(E, G) = \mathcal{B}(E, \mathcal{B}(E, F)) \simeq \mathcal{B}^2(E \times E; F) = \mathcal{B}^2(E^2; F),$$

donde el último término indica los operadores bilineales de $E \times E$ en F. La identificación está dada por $\Phi(T)(e_1, e_2) = (Te_1)(e_2)$ para $e_1, e_2 \in E$, que es de hecho un isomorfismo isométrico. Denotaremos

$$D^2 f_p(v, w) := (D^2 f_p v)(w).$$

Una función es C^2 si la asignación $p \mapsto D^2 f_p$ es continua de E en $\mathcal{B}^2(E^2; F)$. En el caso clásico $E = \mathbb{R}^2$, que exista la diferencial segunda es más fuerte que decir que existen las derivadas parciales segundas, de hecho la existencia de la diferencial segunda garantiza que además de existir *sean iguales* las derivadas cruzadas[1]: ver por ejemplo el libro de T. Apostol [12], Teorema 12.12.

Observación 1.2.4. Si $f : U \to F$ es una función dos veces diferenciable en $p \in U$, entonces $D^2 f_p$ es un operador bilineal *simétrico*. Es decir, para todo $v, w \in E$ se tiene

$$D^2 f_p(v, w) = D^2 f_p(w, v).$$

En efecto, que es bilineal surge de la propia definición. Para ver que es simétrico, sean $v, w \in E$. Consideremos, para cada $\varphi \in F'$, la función auxiliar

$$g(x, y) = \varphi(f(p + xv + yw)).$$

La función $g : B \to k$ está definida en algún entorno abierto B de $(0, 0) \in k \times k$. Por hipótesis, existen $Dg_{(0,0)}$, $D^2 g_{(0,0)}$. Entonces $D^2 g_{(0,0)}$ es una forma bilineal simétrica. Esto nos dice que las derivadas cruzadas de g en el punto $(0, 0)$ son iguales

$$\varphi((D^2 f_p w)v) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \varphi((D^2 f_p v)w).$$

Como la identidad es cierta para cualquier $\varphi \in F'$, se tiene la conclusión.

[1] Gracias a Marcos Cossarini por hacerme notar este hecho

Definición 1.2.5. Una función que tiene k diferenciales sucesivas en $U \subset E$ -y la de orden k es una función continua- es una *función* C^k *en* U, y directamente anotaremos $f \in C^k(U)$; como antes, consideramos a $D^k f$ como un operador multilineal, es decir $D^k f_v \in \mathcal{B}^k(E^k; F)$ para $v \in E$. Por lo recién observado, es un operador multilineal simétrico.

Una función es C^∞ cuando sus diferenciales de todos los órdenes existen (también es usual decir que f es *suave*).

El producto y las suma de funciones C^k, donde $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ es de clase C^k, con una demostración clásica que omitiremos. También la composición de funciones C^k es de clase C^k, y vale la regla de la cadena usual.

Observación 1.2.6. Observemos que si $f \in \mathcal{B}(E, F)$ entonces $Df = f$ es constante, es decir para todo $v \in E$ se tiene $Df_v = f$. Luego todas las derivadas de orden superior son nulas, $D^2 f = D^3 f = \cdots = 0$.

1.2.1. Operadores bilineales y cuadráticos

Dados E, F espacios de Banach, sea $\beta \in \mathcal{B}^2(E^2; F)$ un operador bilineal. Entonces el *operador cuadrático* Q *asociado a* β está dado por

$$Q(v) = \beta(v, v)$$

para todo $v \in E$. Observemos que $Q(tv) = t^2 Q(v)$ para todo $v \in E$, $t \in k$.

En general, dado $n \in \mathbb{N}$, una función $f : E \to F$ tal que $f(tv) = t^n f(v)$ para todo $t \in k$, $v \in E$ se dice *homogénea de grado* n.

La definición de objeto cuadrático que usaremos es la siguiente: diremos que $Q : E \to F$ es un *operador cuadrático* si

$$\beta(v, w) := \tfrac{1}{2}[Q(v + w) - Q(v) - Q(w)]$$

es bilineal. En particular $Q(tv) = t^2 Q(v)$ para todo $v \in B$, $t \in k$, pero esta condición *no* es suficiente. Es fácil ver que Q es continuo si y sólo si β es continuo, pues $Q(v) = \beta(v, v)$ para todo $v \in E$.

Observación 1.2.7. Todo operador cuadrático continuo es acotado, es decir existe una constante $C \geq 0$ tal que

$$\|Q(v)\| \leq C\|v\|^2$$

para todo $v \in E$. Esto tiene una prueba directa: supongamos que Q es continua y no está acotada. Dado $n \in \mathbb{N}$ existe entonces $v_n \in E$ tal que $\|Q(v_n)\| > n^2 \|v_n\|^2$. Como $Q(0) = 0$, debe ser $v_n \neq 0$ para todo n. Luego

$$\left\| Q\left(\frac{v_n}{n\|v_n\|}\right) \right\| > 1$$

para todo n. Como Q es continua, haciendo tender n a infinito se tiene una contradicción.

La conclusión de la observación anterior también es consecuencia del siguiente resultado:

Lema 1.2.8. *Si $\beta : E \times E \to F$ es bilineal y continua en cada variable por separado, entonces existe $C \geq 0$ tal que, para todo $v, w \in E$ se tiene*

$$\|\beta(v,w)\| \leq C\|v\|\|w\|.$$

En particular β es continua.

Demostración. Supongamos que $x \mapsto \beta_y(x) := \beta(x,y)$ ($y \in E$ fijo) es un operador acotado, y lo mismo ocurre con $y \mapsto \beta_x(y) := \beta(x,y)$, ahora con $x \in E$ fijo. Consideremos la familia $\{\beta_x : \|x\| \leq 1\}$. Entonces, para cada $y \in E$, se tiene

$$\|\beta_x(y)\| = \|\beta(x,y)\| = \|\beta_y(x)\| \leq C_y\|x\| \leq C_y.$$

Luego, por el principio de acotación uniforme (Teorema 1.1.6), el conjunto $\{\|\beta_x\| : \|x\| \leq 1\}$ es acotado. Esto quiere decir que existe una constante $C \geq 0$ tal que

$$\sup_{\|y\|\leq 1} \|\beta_x(y)\| = \|\beta_x\| \leq C$$

para todo $x \in E$ tal que $\|x\| \leq 1$. Esto nos dice que, para todo x, y tales que $\|x\| \leq 1$ y $\|y\| \leq 1$, se tiene $\|\beta(x,y)\| \leq C$. Usando la bilinealidad de β se tiene la conclusión. □

Definiciones y consideraciones análogas se tienen para formas cúbicas, cuárticas, etc. es decir para formas que provienen de operadores multilineales simétricos de orden $k \in \mathbb{N}$.

1.3. Integración

Sea $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo, y $f : I \to E$ una función. Diremos que f es una función *elemental* si existe una partición de I en finitos intervalos disjuntos $I_j \subset I$ y una colección de vectores $\{v_j\}_{j=1\ldots n} \subset E$ tales que $f|_{I_j} = v_j$, es decir, si f es constante en cada intervalo de la partición. En ese caso definimos la integral de f sobre I como

$$\int_I f = \sum_{j=1\ldots n} v_j \mu(I_j)$$

donde μ denota la medida usual en $\mathbb{R}$.

Diremos que una función $f : I \to E$ es *reglada* si f es límite uniforme de funciones elementales, es decir si existe una sucesión de funciones elementales $f_n : I \to E$ tales que, dado $\epsilon > 0$, se tiene

$$\|f_n - f\|_I := \sup_{t \in I} \|f_n(t) - f(t)\| < \epsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0(\epsilon).$$

No es difícil probar que toda función continua $f : I \to E$ es una función reglada. La integral de una función reglada se define como el límite (en E) de las integrales

$$\int_I f_n.$$

Este límite no depende de la sucesión elegida para aproximar f.

Una propiedad fundamental de la integral es la siguiente: si $T \in \mathcal{B}(E, F)$ entonces

$$T\left(\int_I f\right) = \int_I (T \circ f).$$

La verificación es sencilla para funciones elementales, y luego se sigue de la continuidad de T la propiedad general.

Esta propiedad es particularmente útil para reducir el problema a valores reales o complejos si usamos funcionales del dual, es decir si usamos $\varphi \in E' = \mathcal{B}(E, k)$ donde $k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ según el contexto. Así, por ejemplo, si

$$\int_I (\varphi \circ f) = 0$$

para toda $\varphi \in E'$, se deduce por el teorema de Hahn-Banach que $\int_I f = 0 \in E$. Supongamos que f es C^1, entonces tomando $g(t) = \varphi(f(t))$ para $\varphi \in E^*$, vemos que g también es C^1 y que $g' = \varphi(f')$, luego

$$\varphi(\int_a^b f') = \int_a^b g' = g(b) - g(a) = \varphi(f(b) - f(a)),$$

y entonces

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Esta conclusión también es válida si sólo pedimos que $f : I \to E$ sea absolutamente continua.

Observación 1.3.1. Otra propiedad útil es la siguiente. Sea $f : [a, b] \to E$ reglada y $\|f(t)\| \leq M$, entonces

$$\|\int_I f\| \leq \int_I \|f(t)\| dt \leq (b - a)M.$$

En efecto, esta propiedad es simplemente la desigualdad triangular cuando la función es elemental, y se extiende a regladas tomando límite.

1.4. Aproximaciones, acotaciones

Veamos algunos resultados útiles que combinan diferenciación e integración.

Definición 1.4.1. Si E es un espacio vectorial, un conjunto $C \subset E$ es *convexo* si dados $v, w \in C$, entonces el segmento

$$tv + (1-t)w, \qquad t \in [0,1]$$

esta íntegramente contenido en C.

Proposición 1.4.2 (Teorema del valor medio)**.** *Sean* E, F *espacios de Banach,* $U \subset E$ *abierto convexo y* $f : U \to F$ *una función* C^1*. Dados* $x, y \in U$*, pongamos*

$$M = \max_{t\in[0,1]} \|Df_{tx+(1-t)y}\|.$$

Entonces

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|.$$

Demostración. Sea $g(t) = f(tx + (1-t)y)$, $g : [0,1] \to F$. Observemos que g es en realidad C^1 en un entorno abierto del intervalo $[0,1]$. Entonces $g' : [0,1] \to F$ es una función continua, con lo cual es fácil ver que

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt.$$

Para convencernos, se puede considerar, dada $\varphi \in F'$, la aplicación real $t \mapsto \varphi(g(t))$ para la cual vale claramente la propiedad, y como φ es arbitraria, se tiene la propiedad enunciada para vectores de F (para más detalles ver la prueba del Teorema de Taylor a continuación). Pasando en limpio

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 Df_{tx+(1-t)y}(x-y)dt.$$

Usando la propiedad de la Observación 1.3.1 tenemos la conclusión. □

1.5. Fórmula de Taylor

Recordemos que si $f : E \to F$ es C^k y $v \in E$, pensamos a $D^k f_v$ $(k \in \mathbb{N})$ como una forma multilineal simétrica. Para $h \in E$, usemos la notación $h^{(k)} = (h, \cdots, h) \in E^k$. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.5.1 (Fórmula de Taylor). *Sean* E, F *espacios de Banach,* $U \subset E$ *un abierto convexo y* $f : U \to F$ *una función* C^k *en* U. *Entonces dados* $v, v+h \in U$ *se tiene*

$$f(v+h) = P^k(v,h) + R^k_v(h),$$

donde $P^k(v,h)$ *es el polinomio de Taylor de grado* k *centrado en* v *y evaluado en* h *dado por*

$$P^k(v,h) = f(v) + Df_v h + \tfrac{1}{2}D^2 f_v h^{(2)} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}D^{k-1} f_v h^{(k-1)},$$

y la fórmula del resto está dada por

$$R^k_v(h) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (1-t)^{k-1} D^k f_{v+th} h^{(k)}\, dt.$$

Demostración. Por el teorema de Hahn-Banach, basta probar el teorema después de componer con cualquier funcional $\varphi \in F'$, por la propiedad mencionada en la Observación 1.2.3. O en el caso de dimensión finita, basta probarlo en cada coordenada (tomando φ_i las funcionales lineales coordenadas). En ese caso el problema se reduce al Teorema de Taylor aplicado a la función real $g : [0,1] \to R$ dada por $g(t) = \varphi\left(f(v+th)\right)$, es decir

$$\begin{aligned} g(1) &= g(0) + g'(0) + \tfrac{1}{2}g''(0) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}g^{(k-1)}(0) \\ &\quad + \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (1-t)^{k-1} g^{(k)}(t)\, dt. \end{aligned}$$

□

Observación 1.5.2 (Expresiones de orden k para curvas suaves). Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo real, E un espacio de Banach y $\beta : I \to E$ una curva de clase C^k. En general es falso que $\beta_{t+s} = \beta_t + s\beta'_t + \cdots + \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\beta^{(k-1)}_t + \frac{s^k}{k!}\beta^{(k)}_c$ con c entre t y $t+s$, aún en dimensión finita (salvo que $E = \mathbb{R}$). Sin embargo, el teorema de Taylor recién probado permite escribir la fórmula integral del resto para tal curva y por eso es legítimo escribir

$$\beta_{t+s} = \beta_t + s\beta'_t + \cdots + \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\beta^{(k-1)}_t + o(s^k).$$

Observación 1.5.3. Si $Q : E \to F$ es un operador cuadrático, se sigue que $Q(v) = \beta(v,v)$ para algún operador bilineal simétrico. Supongamos que Q es continuo, entonces β es continuo y por lo señalado en la Observación 1.2.7, existe una constante $C \geq 0$ tal que

$$\frac{\|Q(h)\|}{\|h\|} = \|Q(h/\|h\|)\|\|h\| \leq C\|h\|$$

para todo $h \neq 0$. Entonces, como $Q(x+h) - Q(x) - 2\beta(x,h) = Q(h)$ para todo $x, h \in E$, se deduce que Q es diferenciable pues

$$\frac{\|Q(x+h) - Q(x) - 2\beta(x,h)\|}{\|h\|} = \frac{\|Q(h)\|}{\|h\|} \to 0$$

cuando $h \to 0$.

Observemos que la diferencial de Q es $DQ_x = 2\beta(x,\cdot)$ que es en efecto un operador acotado. Como la asignación $x \mapsto DQ_x = 2\beta(x,\cdot)$ es un operador lineal y acotado, se deduce que Q es dos veces diferenciable con $\frac{1}{2}D^2Q_x = \beta$, es decir D^2Q es constante, con lo cual $D^nQ = 0$ para todo $n \geq 3$. Por último, se deduce que para todo $x \in E$ la expansión de Taylor de Q es simplemente su polinomio de orden 2, es decir

$$Q(x+h) = Q(x) + 2\beta(x,h) + Q(h)$$

para todo $h \in E$, lo que prueba que Q es C^ω en E.

Observación 1.5.4 (Polinomios). En general, dado un operador $P \in \mathcal{B}^k(E^k;F)$ (es decir P proviene de una forma multilineal simétrica evaluada en la diagonal), diremos que P es un *polinomio homogéneo* de grado k en el espacio E. Y un *polinomio* en E es una suma finita de polinomios homogéneos, posiblemente de distintos grados. Entonces el Teorema de Taylor se puede pensar como un teorema de aproximación de funciones por polinomios.

Observación 1.5.5 (Polarización). Dado P_k polinomio homogéneo de grado k, se puede probar (queda como ejercicio para el lector) que la única forma multilineal simétrica $M_k : E^k \to F$ tal que $M_k(v^k) = P_k(v)$ está dada por ejemplo por la fórmula de polarización

$$M_k(x_1,\ldots,x_k) = \frac{1}{2^k k!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k P_k(\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i). \tag{1.2}$$

Así como definimos la norma de un operador lineal, vamos a definir la norma de un operador multilineal simétrico $M : E^k \to F$ como

$$\|M\| = \sup_{\|v_i\| \leq 1} \|M(v_1, v_2, \cdots, v_k)\|,$$

de esta manera dados $v_1, \cdots, v_k \in E$ cualesquiera, se tiene

$$\|M(v_1, \cdots, v_k)\| \leq \|M\| \, \|v_1\| \cdots \|v_k\|.$$

Por otro lado definimos la norma de un polinomio homogéneo como

$$\|P\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|P(v)\|,$$

de manera tal que $\|P(v)\| \leq \|P\|\|v\|$ para todo v. Es claro que si $P_k(v) = M_k(v, \cdots, v)$, entonces por la fórmula de polarización (1.2) se tiene

$$\|P_k\| \leq \|M_k\| \leq \frac{k^k}{k!}\|P_k\|. \tag{1.3}$$

Observación 1.5.6 (Derivadas de un polinomio homogéneo). Si P_k es un polinomio homogéneo de grado k entonces denotando con M_k a la forma multilineal simétrica inducida, podemos usar la fórmula multinomial

$$P_k(v+h) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} M_k(h^j, v^{k-j}).$$

De aquí es fácil ver que

$$(DP_k)_v(h) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_k(v+ht) - P_k(v)) = \lim_{t\to 0} \sum_{j=1}^{k} t^{j-1} \binom{k}{j} M_k(h^j, v^{k-j}) = kM_k(v^{k-1}, h),$$

o sea que la diferencial de un polinomio homogéneo de grado k, que ahora es una función a valores en $B(E,F)$, es un polinomio de grado $k-1$.

Entonces también es claro que la diferencial de un polinomio es un polinomio (de grado menor), que todo polinomio es de clase C^∞, y que diferenciando una cantidad finita de veces un polinomio obtenemos la función nula.

Lema 1.5.7. *Sea $f : E \to F$ dos veces diferenciable, y homogénea de grado 2, es decir $f(tv) = t^2 f(v)$ para todo $v \in E$, $t \in k$. Entonces f es un operador cuadrático y en particular es C^∞.*

Demostración. Sea $v \in E$. Como $f(tv) = t^2 f(v)$, diferenciando respecto de t tenemos, por la regla de la cadena, $Df_{tv}((tv)') = 2tf(v)$, es decir $Df_{tv}(v) = 2tf(v)$. Diferenciando nuevamente respecto de t se tiene

$$\left(D^2 f_{tv} v\right)(v) = 2f(v).$$

Evaluando en $t = 0$ se deduce que

$$f(v) = 1/2(D^2 f_0 v)(v)$$

lo que prueba que f proviene del operador bilineal (y simétrico) β dado por

$$\beta(v,w) = 1/4\left[(D^2 f_0 v)(w) + (D^2 f_0 w)(v)\right].$$

□

Observación 1.5.8. Obviamente el lema se generaliza para todo $k \in \mathbb{N}$ de manera natural, luego un polinomio homogéneo continuo de grado k está dado por una función homogénea $f : U \subset E \to F$ de grado k -o sea $f(tv) = t^k f(v)$- que es k veces diferenciable en un entorno de 0. Pues entonces f coincide *en* U con un polinomio homogéneo, de hecho $f(v) = \frac{1}{k!} D^k f_0(v)$ allí.

1.6. Funciones analíticas

Sea $U \subset E$ abierto de un espacio de Banach, sea $f : U \to F$ con F espacio de Banach. Supongamos que existe una familia de polinomios $\mathbb{R}$-homogéneos $(P_k)_{k=0}^{\infty}$ con P_k de grado k, tales que

$$f(p+v) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_k(v)$$

puntualmente en la bola abierta $B_R(p)$. Dos observaciones son importantes:

Observación 1.6.1 (Convergencia puntual). Sean $x_k \in F$, $P_k : U \subset E \to F$ como antes.

1. Si una serie $\sum_{k\geq 0} x_k$ converge, entonces sus términos están acotados: si $x = \sum_k x_k x$

$$\|x_k\| = \|\sum_{j=0}^{k} x_j - \sum_{j=0}^{k-1} x_j\| \leq \|\sum_{j=0}^{k} x_j - x\| + \|x - \sum_{j=0}^{k-1} x_j\| \to 0$$

2. Si la serie $\sum_{k\geq 0} P_k(v)$ converge, entonces converge absolutamente en $\|v\| < R$: Tomando $h = v(1+\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, tenemos también $\|h\| < r$ y podemos escribir $v = th$ con $0 < t < 1$. Ahora bien $\|P_k(h)\| \leq C$ por la convergencia puntual, luego

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|P_k(v)\| = \sum_{k=0}^{+\infty} \|P_k(th)\| = \sum_{k=0}^{+\infty} \|P_k(h)\| t^k \leq C \sum_{k=0}^{+\infty} t^k < \infty.$$

   En particular converge incondicionalmente y podemos reordenarla como querramos sin modificar su convergencia.

Supongamos que $f(p+v) = \sum_k P_k(v)$ para $v \in B_R(p)$.

Lema 1.6.2 (Convergencia uniforme)**.** *Son equivalentes:*

1. *Para cada* $0 < r < R$, *existe* $c_N(r) > 0$ *con* $\lim_N c_N = 0$ *tal que* $\|\sum_{k\geq N} P_k(v)\| \leq c_N$ *para todo* $\|v\| \leq r$.

2. *Para cada* $0 < r < R$ *existe* $C(r) > 0$ *tal que* $\|P_k(v)\| \leq C(r)$ *para todo* $\|v\| \leq r$.

3. $\limsup_{k\to\infty} \|P_k\|^{1/k} \leq R^{-1} < \infty$.

En este caso diremos que la serie converge uniformemente en $B_R(p)$. *El número*

$$\rho = \frac{1}{\limsup_k \|P_k\|^{1/k}} \geq R$$

es el radio de convergencia en p *de* f.

Demostración. Si vale 1., razonando como en la observación previa tenemos que si $\|v\| \leq r$ entonces

$$\|P_k(v)\| \leq c_k(r) + c_{k+1}(r) \to 0$$

luego $\|P_k(v)\| \leq C(r)$ para todo $k \geq 0$ y esto prueba 2.. Si vale 2., eentonces para $\|w\| = 1$ se tiene

$$\|P_k(w)\| = \|P_k(wr)\|\frac{1}{r^k} \leq \frac{C(r)}{r^k}$$

y entonces $\|P_k\| \leq \frac{C(r)}{r^k}$. Luego $\limsup_{k\to\infty} \|P_k\|^{1/k} \leq 1/r$. Como $0 < r < R$ es arbitrario, se tiene que vale 3.. Finalmente, si vale 3., dado $0 < r < R$ tomemos $\delta > 0$ con $0 < r + \delta < R$ y tomemos N tal que $\|P_k\| < (r+\delta)^{-k}$ para $k \geq N$. Con esto si $\|v\| \leq r$ tenemos

$$\|\sum_{k\geq N} P_k(v)\| \leq \sum_{k\geq N} \|P_k\|\|v\|^k \leq \sum_{k\geq N} \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^k = c_N(r) \to 0$$

cuando $N \to \infty$, y esto prueba 1. □

Definición 1.6.3. Diremos que $f = \sum_k P_k$ es *analítica real* en $p \in U$ si la serie converge uniformemente en $B_R(p)$. Diremos que f es *analítica real* en U -denotado $f \in C^\omega(U)$- si f es analítica real en cada punto de U. Es fácil ver que todo polinomio en E es una función analítica en E.

Si E, F son $\mathbb{C}$-espacios vectoriales y cada P_k es k-homogéneo sobre $\mathbb{C}$ diremos que f es *analítica compleja* u *holomorfa*. Un ejemplo simple de una función analítica real que no es analítica compleja es la conjugación $z \mapsto \bar{z}$, para $z \in \mathbb{C}$.

En el siguiente teorema e denota el número de Euler.

Teorema 1.6.4. *Si* $f : U : E \to F$, $p \in U$ *y* f *es analítica en* p *con radio de convergencia al menos* $R > 0$, *entonces* f *es analítica en* $B_{R/e}(p)$.

Demostración. Sea $x \in B_{R/e}(p)$, sea $r = \frac{R}{e} - \|x-p\|$, notemos que si $\|h\| \leq r$ entonces $\|h+x-p\| \leq \|h\| + \|x-p\| \leq r + \|x-p\| = R/e < R$, luego tomando $v = h + x - p$ vemos que

$$f(x+h) = f(p+h+x-p) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_k(h+x-p)$$

converge uniforme y absolutamente por las observaciones previas. Por la Observación 1.5.4 y la convergencia incondicional podemos reagrupar la serie como

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}M_k(h^j,(x-p)^{k-j}).$$

Ahora para cada j sea

$$Q_j^x(h) = \sum_{k=j}^{+\infty}\binom{k}{j}M_k(h^j,(x-p)^{k-j}) = \sum_{n\geq 0}\binom{n+j}{n}M_{n+j}(h^j,(x-p)^n).$$

Como

$$\limsup_n \sqrt[n]{\binom{n+j}{n}\|M_{n+j}\|} = \limsup_n \|M_n\| = R^{-1}$$

y además $r < R$, la serie que define Q_j converge uniformemente en $B_r(p)$. En particular si polarizamos cada M_{n+j} vemos que

$$M_j(h_1,\ldots,h_j) = \sum_{n\geq 0}\binom{n+j}{n}M_{n+j}(h_1,\ldots,h_j,(x-p)^n) \leq C(j)\|x-p\|^n\|h_1\|\cdots\|h_j\|$$

es la forma j-multilineal que polariza Q_j y así Q_j es un polinomio homogéneo de grado j. Usando la convergencia incondicional podemos sumarlos sobre j y así recuperamos $f(x+h)$, esto es

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{+\infty} Q_j(h)$$

para $\|h\| \leq r$. Para terminar queremos ver que $\limsup_j \|Q_j\|^{1/j} < \infty$ para concluir que f es analítica en x. Llamando $x_{j,k} = \binom{k}{j}\|M_k(h^j,(x-p)^{k-j}\|$, notemos que si pensamos a los $x_{j,k}$ como una matriz infinita, y por la convergencia absoluta e incondicional, para cada $N \geq 0$ podemos reordenar

$$\sum_{k\geq N}\sum_{j=0}^{k} x_{j,k} = \sum_{j\geq N}\sum_{k\geq j} x_{j,k}.$$

Entonces, si $\|h\| \leq r_0 < r$, se tiene

$$\begin{aligned}\|\sum_{j\geq N} Q_j(h)\| &\leq \sum_{j\geq N}\|Q_j(h)\| \leq \sum_{j\geq N}\sum_{k\geq j} x_{j,k} = \sum_{k\geq N}\sum_{j=0}^{k} x_{j,k}\\ &\leq \sum_{k\geq N}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\|M_k\| r_0^j \|x-p\|^{k-j} = \sum_{k\geq N}\|M_k\|(r_0+\|x-p\|)^k\\ &\leq \sum_{k\geq N}\frac{k^k}{k!}\|P_k\|(r_0+\|x-p\|)^k = \sum_{k\geq N} a_k t^k,\end{aligned}$$

donde usamos la desigualdad (1.3). Ahora bien, por la fórmula de Stirling tenemos que

$$\limsup_k \sqrt[k]{a_k}t = \limsup_k \frac{k}{\sqrt[k]{k!}}\|P_k\|^{1/k}(r_0+\|x-p\|) = eR^{-1}(r_0+\|x-p\|) < eR^{-1}\frac{R}{e} = 1.$$

Esto nos dice que la serie $\sum_{k\geq 0} a_k t^k$ es convergente; entonces $c_N(r_0) = \sum_{k\geq N} a_k t^k \to 0$ cuando $N \to \infty$. Luego por el Lema 1.6.2 la serie converge uniformemente en $B_r(x)$ así que f es analítica en x. □

Observación 1.6.5. En el caso complejo, se puede probar que no hace falta achicar el radio de la bola $B_R(p)$ para poder desarrollar en serie en otros puntos; esto es una consecuencia de la fórmula integral de Cauchy. Por otro lado, para el caso real, el factor $1/e$ no es óptimo: por ejemplo en [75] del año 2016 se probó que basta tomar el factor $1/\sqrt{2}$, y se conjetura que no hace falta tomar ningún factor, como en el caso complejo. Este factor se conoce como *radio de analiticidad*.

Lema 1.6.6. *Si f es analítica en p con radio de convergencia $R > 0$, entonces f es C^∞ en $B_{R/e}(p)$. Además para $\|v\| < R$ y cada $n \geq 1$ se tiene*

$$Df^n(p+v) = n!\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{n} M_{k+n}(v^k, \cdot).$$

Demostración. Como la convergencia es uniforme en bolas más chicas, podemos diferenciar dentro de la serie, esto es

$$Df_{p+v}(h) = \sum_{k=0}^{\infty}(DP_k)_v(h) = \sum_{k=0}^{\infty} kM_k(v^{k-1}, h)$$

donde usamos la Observación 1.5.4. Luego

$$Df(p+v) = \sum_{k=0}^{\infty}(DP_k)_v(h) = \sum_{k=0}^{\infty} kM_k(v^{k-1}, \cdot) = \sum_{k\geq 0}^{\infty}(k+1)M_{k+1}(v^k, \cdot).$$

El factor k no altera el límite de la raíz k-ésima, así que Df es analítica en p (aunque ahora Df toma valores en $B(E,F)$). Razonando inductivamente vemos que $D^k f$ es diferenciable para todo k; así también se obtienen las diferenciales sucesivas. El mismo argumento se pude hacer en cualquier $x \in B_{R/e}(p)$, por el teorema anterior. □

Corolario 1.6.7. *Sea* $f : B \to F$ *con* $B \subset E$ *de clase* C^∞ *en una bola centrada en* p. *Supongamos que el resto en* p *converge uniformemente a* 0 *en algún entorno de* p.*Entonces* f *es analítica en* p. *Recíprocamente, si* f *es analítica en* p, *entonces* $R_p^k(v) \to 0$ *uniformemente en algún entorno de* p.

Demostración. Notemos que si $P^N(p,v) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} Df_p^k(v^{(k)})$ es el polinomio de Taylor de f en p en grado N, entonces

$$\| \sum_{k=N}^{N+M} \frac{1}{k!} Df_p^k(v^{(k)}) \| = \|P^{N+M}(p,v) - P^N(p,v)\| = \|R_p^{N+M}(v) - R_p^N(v)\| \to 0$$

uniformemente cuando $N \to +\infty$. Luego la sucesión de sumas parciales de los polinomios homogéneos $P_k = \frac{1}{k!} Df_p^k$ es (uniformemente) de Cauchy, y por ende converge uniformemente. Como $f(p+v) = \sum_{k=0}^N P_k(v) + R_p^N(v)$ luego tomando límite $N \to \infty$ vemos que

$$f(p+v) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(v),$$

con convergencia uniforme, luego f es analítica en p. La afirmación recíproca se deduce de la convergencia uniforme y el lema previo, queda como ejercicio para el lector. □

Ejemplo 1.6.8 (Inversión en álgebras de Banach). Sea F un álgebra de Banach, esto es un espacio de Banach con un producto continuo. Entonces $F^\bullet$, el conjunto de inversibles de F, es abierto en F, y la inversión $a \mapsto a^{-1}$ es una función analítica allí. Esto tiene una prueba bastante elemental que pasa por la siguiente observación: si a es inversible, y $\|b-a\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, entonces b es inversible con inversa

$$b^{-1} = a^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - ba^{-1})^n,$$

ya que $\|1 - ba^{-1}\| = \|aa^{-1} - ba^{-1}\| \leq \|a-b\|\|a^{-1}\| < 1$. Esto prueba que el conjunto de inversibles es abierto. Supongamos ahora que a es inversible, y tomemos la bola de radio $r = \|a^{-1}\|^{-1}$ centrada en a; reemplazando b por $a+h$ en la serie anterior, con $\|h\| < r$ notamos que $a+h$ es inversible y

$$(a+h)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-1}(-1)^n (ha^{-1})^n$$

que es una serie de polinomios homogéneos en h. Luego $f(a) = a^{-1}$ es analítica (de hecho, si F es un espacio complejo, la inversión es analítica compleja).

Ejemplo 1.6.9. El ejemplo clásico de una función C^∞ que no es analítica, es el de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

Es claro que f es C^∞ para $t \neq 0$, y también es fácil ver que todas las derivadas de f existen en $t = 0$ y son nulas, esto es $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k, luego todos los polinomios de Taylor son nulos en $t = 0$. Pero entonces no hay ningún intervalo alrededor de $t = 0$ donde valga $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)$, así que f no es analítica en $t = 0$. Es fácil ver sin embargo, que f es analítica en cualquier intervalo que no contenga $t = 0$.

Proposición 1.6.10. *Supongamos que* $f, g : U \subset E \to W \subset F$ *son analíticas, y que* $h : W \to G$ *es analítica. Entonces*

1. fg, $f + g$, *son analíticas en* U.
2. $h \circ f$ *es analítica en* U.
3. *Si* F *es un álgebra de Banach e* $\mathrm{im}(f)$ *está dentro de los inversibles de* F, *entonces* $1/f$ *es analítica en* U *(aquí* $(1/f)(p) = (f(p))^{-1}$.

Demostración. Como las series convergen absolutamente en bolas, el producto y la suma de las series se puede reordenar para obtener una nueva serie de polinomios homogéneos (agrupando los términos de igual grado); el radio de convergencia no cambia y esto prueba la primer afirmación. Para la composición, recordemos la fórmula multinomial para números

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_N)^k = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_N=k} \frac{k!}{n_1!n_2!\ldots n_N!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_N^{n_N}.$$

Dado $p \in U$, sea $f(p + v) = \sum_{j\geq 0} P_j(v)$ la serie de f en algún entorno de p, y sea $h(f(p) + x) = \sum_k H_k(x)$ la serie de h en algún entorno en $f(p)$. Sea h_k el operador multilineal simétrico inducido por H_k. Entonces por la convergencia absoluta de las series, podemos escribir

$$\begin{aligned}(h \circ f)(p + v) = h(f(p) + \sum_{j=1}^{+\infty} P_j(v)) &= \sum_{k=0}^{\infty} H_k(\sum_{j=1}^{\infty}(P_j(v)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{n_1+\cdots+n_N=k} \frac{k!}{n_1!\ldots n_N!} h_k(P_1(v)^{n_1}, \ldots, P_N(v)^{n_N}).\end{aligned}$$

Ahora notemos que $q(v) = h_k(P_1(v)^{n_1}, \dots, P_N(v)^{n_N})$ es un polinomio homogéneo (de grado $j = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots + Nn_N$). Entonces, reagrupando la serie podemos escribir $(h \circ f)(p + v)$ como una serie de polinomios homogéneos en v, y así $h \circ f$ es analítica (que hay un radio de convergencia uniforme queda a cargo del lector verificarlo). La última afirmación es inmediata de la anterior y el Ejemplo 1.6.8. □

El caso analítico complejo es más simple, como muestran los siguientes dos resultados.

Lema 1.6.11 (Sobre $\mathbb{C}$, convergencia puntual implica analiticidad)**.** *Si E, F son $\mathbb{C}$-espacios de Banach y $f(p+v) = \sum_{k\geq 0} P_k(v)$ con convergencia puntual en $B_R(p)$, entonces f es analítica en p.*

Demostración. Por la observación anterior, tenemos convergencia absoluta en $B_r(p)$, $0 < r < R$. Entonces si consideramos

$$E_n = \{v \in \overline{B_r(p)} : \|P_k(v)\| \leq n \quad \forall k \geq 0\},$$

entonces $X = \overline{B_r(p)} = \cup_n E_n$, ya que cada $\{\|P_k(v)\|\}_k$ está acotado. Como X es un espacio métrico completo, por el teorema de Baire hay algún E_n con interior no vacío. Es decir existen $n_0 \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$, $\delta > 0$ tales que $B_\delta(x_0) \cap X \subset E_{n_0}$. Trasladando y achicando, podemos suponer que $B_\delta(x_0) \subset B_r(p)$. Entonces si $\|x - x_0\| \leq \delta$ se tiene $\|P_k(x)\| \leq n_0$ para todo $k \geq 0$. Afirmamos que $\|P_k(v)\| \leq n_0$ para todo $k \geq 0$, ahora para $\|v\| \leq \delta$, esto es consecuencia de la fórmula de Cauchy para P_k que dejamos como ejercicio:

$$P_k(v) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=1} \frac{P(x_0 + \lambda v)}{\lambda^{k+1}} d\lambda.$$

Pero entonces si $\|z\| \leq 1$, se tiene

$$\|P_k(z)\| = \|P_k(\delta z)\| \frac{1}{\delta^k} \leq n_0 \frac{1}{\delta^k},$$

con lo cual $\|P_k\| \leq \frac{n_0}{\delta_k}$ y así $\limsup_k \|P_k\|^{1/k} \leq \frac{1}{\delta}$. □

Corolario 1.6.12. *Sean E, F sendos $\mathbb{C}$-espacios de Banach. Si $f : U \subset E \to F$ es C^∞ con todas sus diferenciales $\mathbb{C}$-lineales, y para cada $p \in U$ el resto de Taylor tiende puntualmente a 0, entonces f es analítica en U.*

Al igual que en funciones de dos variables reales, una función diferenciable con diferencial $\mathbb{C}$-lineal es analítica.

Teorema 1.6.13. *Sea $f : B_R(p) \subset E \to F$ diferenciable. Si E, F son $\mathbb{C}$-espacios de Banach, y Df_x es $\mathbb{C}$-lineal para cada $x \in B_R(p)$, entonces f es analítica compleja en $B_R(p)$.*

Dejamos la prueba de este corolario como un ejercicio guiado por pasos, más abajo.

1.7. Funciones Inversa e Implícita

Los teoremas que vamos a enunciar en esta sección son esencialmente versiones sin coordenadas de los teoremas clásicos, por lo tanto las pruebas las omitimos (se pueden ver en la sección [I, §5] del libro de Lang [58]).

1.7.1. Función Inversa

Salvo que se aclare lo contrario, un *isomorfismo* $T : E \to F$ entre espacios de Banach es un operador $T \in \mathcal{B}(E, F)$ biyectivo y bicontinuo. En realidad -siempre que el dominio de T sea todo E- sólo hace falta chequear que sea acotado y biyectivo, pues el Teorema de la función abierta (Teorema 1.1.3) nos garantiza que la inversa será continua.

Teorema 1.7.1 (Teorema de la función inversa)**.** *Sean* E, F *espacios de Banach,* $U \subset E$ *abierto y* $f : U \to F$ *una función* C^k*, con* $k \geq 1$*. Supongamos que para algún punto* $v \in U$ *se tiene que* $Df_v : E \to F$ *es un isomorfismo de espacios de Banach.*

Entonces f *es un isomorfismo local de clase* C^k *alrededor de* v*. Es decir, existen abiertos* $A \subset U \subset E$ *y* $B \subset F$ *entornos de* v *y* $f(v)$ *respectivamente, tales que* $f|_A : A \to B$ *es un difeomorfismo de clase* C^k*.*

Observación 1.7.2. Con la notación del teorema previo,

- En particular, Df_x es inversible para todo $x \in A$, es más si $f^{-1} : B \to A$ denota la inversa de $f|_A$, entonces por la regla de la cadena

$$(Df_x)^{-1} = Df^{-1}_{f(x)}$$

  para todo $x \in A$.

- El teorema no dice que tan grandes son los abiertos A, B pero esto en ciertos casos se puede estimar si uno conoce explícitamente Df (ver el Lema 5.4 en [I,§5] del libro de Lang [58]).

1.7.2. Función Implícita

Vamos a presentar varias versiones (equivalentes) de este teorema, vamos a comenzar por una formulación que es muy útil para probar que ciertos subconjuntos son subvariedades (ver el próximo capítulo).

Algunas aclaraciones: si E, F, G son espacios de Banach y $f : E \times F \to G$ es diferenciable, podemos considerar las *derivadas parciales* de f:

- Para $y \in F$ fijo, consideramos la función $f_1 : E \to G$ dada por $f_1(x) = f(x, y)$. Entonces esta función es diferenciable y a su diferencial en $x \in E$ en la dirección de $v \in E$ la denotamos $D_1 f_{(x,y)} v$.
- Para $x \in E$ fijo, consideramos la función $f_2 : F \to G$ dada por $f_2(y) = f(x, y)$. Entonces esta función es diferenciable y a su diferencial en $y \in F$ en la dirección de $w \in F$ la denotamos $D_2 f_{(x,y)} w$.

Lema 1.7.3. *Sean $U \subset E$, $V \subset F$ abiertos. Entonces $f : U \times V \to G$ es de clase C^k en $U \times V$, con $k \geq 1$, si y sólo si existen las dos derivadas parciales $D_1 f, D_2 f$ y son de clase C^{k-1}. Además*

$$D_1 f_{(x,y)} v = Df_{(p,q)}(v, 0) \qquad D_2 f_{(x,y)} w = Df_{(p,q)}(0, w).$$

Demostración. Cambiando f por $D^{k-1} f$ basta probar el resultado para $k = 1$. Si f es C^1, entonces f_1, f_2 son C^1 con lo cual $D_i f = Df_i$ son continuas para $i = 1, 2$. Recíprocamente, si $D_i f$ existen y son continuas, probemos que f es diferenciable y que

$$Df_{(p,q)}(v, w) = D_1 f_{(p,q)} v + D_2 f_{(p,q)} w, \tag{1.4}$$

para todo $(p, q) \in U \times V$, $(v, w) \in E \times F$. En ese caso estará claro que Df es continua por ser una suma y composición de funciones continuas, es decir

$$Df = D_1 f \circ pr_1 + D_2 f \circ pr_2.$$

Para ver que vale (1.4), tenemos el candidato a Df; escribimos la diferencia

$$f(p + v, q + w) - f(p, q) - [D_1 f_{(p,q)} v + D_2 f_{(p,q)} w].$$

Separamos en dos términos, sumando y restando $f(p, q + w)$, $D_1 f_{(p,q+w)} v$; por ejemplo el primer término queda, acotando

$$\|f(p + v, q + w) - f(p, q + w) - D_1 f(p, q + w)v\| + \|[D_1 f_{(p,q+w)} - D_1 f_{(p,q)}]v\|.$$

Observando que $\|(v, w)\| = \|v\| + \|w\| \geq \|v\|$, el primer término tiende a cero al dividirlo por $\|(v, w)\|$ por la existencia de $D_1 f$, y el segundo por la continuidad de $D_1 f$. La parte que queda, involucra $D_2 f$, y su acotación es similar, así que hemos probado (1.4). Por último, como $Df_{(p,q)}$ es lineal, tenemos que

$$Df_{(p,q)}(v, 0) + Df_{(p,q)}(0, w) = Df_{(p,q)}(v, w) = D_1 f_{(p,q)} v + D_2 f_{(p,q)} w,$$

y haciendo $w = 0$ primero, y luego $v = 0$ tenemos la afirmación sobre las derivadas parciales. □

Observación 1.7.4 (Inversas por bloques). Supongamos que $A : E_1 \to E_2$ es un operador lineal acotado y que $B : E_2 \to E_2$ es un isomorfismo lineal. Si M es la matriz por bloques

$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{E_1} & 0 \\ A & B \end{pmatrix},$$

podemos pensar a M como operador lineal de $E_1 \times E_2$ en $E_1 \times E_2$ de la manera usual (actúa en $(v, w) \in E_1 \times E_2$ poniendo a este como columna a la derecha y haciendo la multiplicación). Es inmediato que todo operador lineal de esta forma es inversible, y su inversa es

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{E_1} & 0 \\ -B^{-1}A & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

Observación 1.7.5 (Diferenciales por bloques). Sea $G : F_1 \times F_2 \to F_1 \times F_2$ dada por $G(x, y) = (g(x, y), h(x, y))$. Entonces su diferencial se puede identificar con el operador por bloques

$$DG_{(x,y)} = \begin{pmatrix} D_1 g_{(x,y)} & D_2 g_{(x,y)} \\ D_1 h_{(x,y)} & D_2 h_{(x,y)} \end{pmatrix} = M.$$

En efecto, si aplicamos esta matriz al par columna (v, w), por el lema anterior obtenemos

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} &= (D_1 g_{(x,y)} v + D_2 g_{(x,y)} w, D_1 h_{(x,y)} v + D_2 h_{(x,y)} w) \\ &= (Dg_{(x,y)}(v, w), Dh_{(x,y)}(v, w)) = DG_{(x,y)}(v, w). \end{aligned}$$

Usaremos esta idea para verificar si una cierta diferencial es inversible, meidante la observación anterior.

Definición 1.7.6. Diremos que un subespacio cerrado $F_1 \subset F$ de un espacio de Banach F *parte a* F si existe otro subespacio cerrado $F_2 \subset F$ tal que

$$F = F_1 \oplus F_2.$$

En ese caso diremos que F *se parte* o es partido por el subespacio F_i.

Teorema 1.7.7 (Teorema de la Función implícita v1). *Sea $U \subset E$ abierto de un espacio de Banach, sea $f : U \to F$ de clase C^k, sea $N = f^{-1}(q) \subset E$. Supongamos que para todo $p \in N$, Df_p es un epimorfismo cuyo núcleo parte E. Entonces existe un subespacio cerrado S que parte E (isomorfo a todos los $\ker Df_p$), y para cada $p \in N$ existen: un abierto $U_p \subset U$ entorno de p, un abierto $V_S \subset S$ entorno de 0_S, y un difeomorfismo $\varphi : U_p \to \varphi(U_p) \subset E$ de clase C^k, tal que $\varphi(U_p \cap N) = V_S \oplus 0 = \varphi(U_p) \cap S$.*

Demostración. Tenemos $E = \ker Df_p \oplus F_p$ para todo $p \in N$, y en cada caso F_p es un subespacio de Banach de E. Como Df_p es epimorfismo, debe ser $F \simeq E/(\ker Df_p) \simeq F_p$ para cada p, luego todos los F_p son isomorfos, así que todos los $\ker Df_p$ son isomorfos. Fijamos p_0 y definimos $S = \ker Df_{p_0}$ como espacio de Banach que modelará N. Ahora, dado $p \in N$, sea T un isomorfismo entre $S \times F$ y $\ker Df_p \oplus F_p = E$ que sea la identidad en cada sumando. Notemos que $(v, w) \mapsto T(v, w) + p$ envía $(0, 0)$ a p y es continua, luego hay algún entorno $W \subset S \times F$ de $(0, 0)$ de manera que su imagen cae dentro de U. Podemos considerar entonces $G : W \subset S \times F \to S \times F$ dada por $G(v, w) = (v, f(T(v, w) + p))$. Esta función es de clase C^k. Calculamos su diferencial en $(0, 0)$, obtenemos

$$DG_{(0,0)}(v, w) = (v, Df_p T(v, 0) + Df_p T(0, w)).$$

Ahora bien, notemos que si $i_F : F \to \{0_S\} \times F$ es la inclusión, $Df_p T(0, w) = Df_p T\, i_F(w)$. Por la observación previa al teorema,

$$DG_{(0,0)} = \begin{pmatrix} Id_S & 0 \\ * & Df_p T\, i_F \end{pmatrix}.$$

Como $Df_p T\, i_F = Df_p|_{F_p}$ es un isomorfismo de F en F, por la Observación 1.7.4, vemos que $DG_{(0,0)}$ es un isomorfismo de $F \times S$ en si mismo. Restrigiendo W adecuadamente, G es un difeomorfismo con su imagen $G(W)$; como $G(0, 0) = (0, q)$ podemos suponer que $G(W)$ es de la forma $V_S \times V_F \subset F \times S$, con V_S entorno de 0_S, y V_F entorno de q. Sea $h : V_S \times V_F \to E$ dada por $h(x, y) = TG^{-1}(x, y) + p$, es claro que es un difeomorfismo y como $h(0, q) = p$, tenemos que $U_p = h(V_S \times V_F)$ es un entorno abierto de p en E. Sea T_0 un isomorfismo entre $S \times F$ y $S \oplus F_{p_0}$ que sea la identidad en cada sumando; definimos $\varphi : U_p \to E$ como

$$\varphi(z) = T_0(h^{-1}(z) - (0, q)).$$

Es claro que φ es un difeomorfismo con su imagen. Veamos que tiene la propiedad requerida. Escribimos $G^{-1}(x, y) = (\tilde{g}(x, y), g(x, y))$, entonces de

$$(x, y) = GG^{-1}(x, y) = (\tilde{g}(x, y), f(T(\tilde{g}(x, y), g(x, y)) + p)$$

deducimos que $\tilde{g}(x, y) = x$ y que $f(T(x, g(x, y)) + p) = y$ para todo $(x, y) \in V_S \times V_F$. Luego $G^{-1}(x, y) = (x, g(x, y))$ y entonces $h(x, y) = T(x, g(x, y)) + p$. Notemos ahora que $z = h(x, y) \in U_p = h(V_S \times V_F)$ está en $N = f^{-1}(q)$ si y solo si $f(z) = q$, o equivalentemente si $q = f(z) = f(h(x, y)) = f(T(x, g(x, y)) + p) = y$. Luego $z \in U_p \cap N$ si y solo si $z = h(x, q)$, es decir $h(V_S \times \{q\}) = U_p \cap N$. Entonces

$$\varphi(U_p \cap N) = T_0(h^{-1}(U_p \cap N) - (0, q)) = T_0(V_S \times \{q\} - (0, q)) = T_0(V_S \times \{0\}) = V_S \oplus 0.$$

Por otro lado

$$\varphi(U_p) = T_0(V_S \times V_F - (0,q)) = T_0(V_S \times (V_F - q))$$
$$= V_S \oplus T_0(\{0\} \times (V_F - q)) \in S \oplus F_{p_0} = E,$$

luego

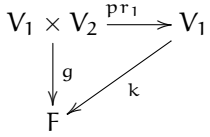
$$\varphi(U_p) \cap S = V_S \oplus 0 = \varphi(U_p \cap N).$$

□

Observación 1.7.8. Una hipótesis relevante del teorema es el hecho de que el núcleo de Df_p parte al espacio total. Esto está garantizado en dimensión finita, y también por ejemplo si F_1 es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert. Como veremos más adelante, en muchos casos no es tan sencillo garantizar esta condición (ver también el Teorema 1.7.17).

Observación 1.7.9 (Valor regular). Sea $f : U \subset E \to F$ de clase C^1, decimos que $q \in F$ es un *valor regular* de f si para todo $p \in f^{-1}(q)$ se verifica que Df_p es un epimorfimo cuyo núcleo parte al espacio E. Por esta denominación, al teorema anterior tambie? se lo conoce como *Teorema del valor regular*.

Definición 1.7.10. Dado un producto $A \times B$ llamaremos $pr_1 : A \times B \to A$ a la proyección a la primera coordenada, análogamente definimos pr_2. Si V_i $(i = 1, 2)$ son abiertos en espacios de Banach, diremos que $g : V_1 \times V_2 \to F$ es una *proyección* si existe un difeomorfismo k de V_1 en un abierto de F, $k : V_1 \to k(V_1) \subset F$ tal que $g = k \circ pr_2$. Esto es



De aquí en más, si $E = F_1 \oplus F_2$, identificaremos sin más $F_1 \oplus F_2$ con $F_1 \times F_2$. Veamos ahora que en un valor regular, toda función es localmente una proyección:

Corolario 1.7.11 (Teorema de la función implícita v2). *Sea $U \subset E$ abierto y $v \in U$. Supongamos que $f : U \to F$ es una función C^k $(k \geq 1)$ tal que Df_v es un epimorfismo y su núcleo parte a E.*

Entonces existen: un abierto $U_0 \subset U$ que contiene a v, abiertos V_1, V_2 en espacios de Banach, y un difeomorfismo de clase C^k, $h : V_1 \times V_2 \to U_0$, tales que $f \circ h$ es una proyección.

Demostración. Si seguimos la demostración de la primera versión, y definimos $h(x,y) = TG^{-1}(x,y) + p = T(x, g(x,y)) + p$, vimos que $f \circ h(x,y) = y = pr_2(x,y)$. □

El teorema de la función implícita se puede reformular si ya asumimos al espacio de salida "partido" como un producto de espacios de Banach, para poder pensar (al menos localmente) a la superficie de nivel de una función $f(x,y) = cte$ como *gráfico* de otra función g, es decir que

$$\{(x,y) : f(x,y) = c\} = Gr(g) = \{(x, g(x))\}$$

al menos localmente.

Corolario 1.7.12 (Teorema de la función implícita v3)**.** *Sean* E, F, G *espacios de Banach,* $U \subset E, V \subset F$ *abiertos,* $f : U \times V \to G$ *una función* C^k *con* $k \geq 1$*. Sean* $(v,w) \in U \times V$ *y* $z \in G$ *tales que* $f(v,w) = z$ *y supongamos que*

$$D_2 f_{(v,w)} : F \to G$$

es un isomorfismo de espacios de Banach.

Entonces existen: un abierto $U_0 \subset U$ *entorno de* v *y una (única) función* $g : U_0 \to V$ *de clase* C^k *con* $g(v) = w$ *tales que*

$$f(x, g(x)) = z$$

para todo $x \in U_0$*, y esta función* g *parametriza el conjunto* $\{(x,y) : f(x,y) = z\} \subset U \times V$ *en algún entorno abierto de* (v,w)*.*

Por esta última versión es que el teorema lleva su nombre; la función implícita es la función g cuyo gráfico recorre (localmente) el conjunto de nivel de f. La demostración queda como ejercicio.

Ahora veamos que toda f cuya diferencial es monomorfismo, puede verse localmente como una inclusión de espacios de Banach:

Teorema 1.7.13 (Imagenes localmente planas)**.** *Sea* $f : U \subset E \to F$*, supongamos que para todo* $p \in U$ *se tiene que* Df_p *es monomorfismo y el rango parte* $F = E \oplus K$*. Entonces para todo* $p \in U$ *existe un entorno* $U_p \subset E$*, y un difeomorfismo* $\psi : W \subset F \to W \subset F$ *tal que* $f(U_p) \subset W$ *y*

$$\psi \circ f(x) = (x, 0) \qquad \forall\, x \in U_p.$$

Demostración. Podemos suponer que $p = 0$, que $f(0) = (0,0)$ y que $E = Ran(Df_0)$ así que Df_0 es la identidad de E. Consideramos $g : U \times K \to E \oplus K$ dada por $g(x,y) = f(x) + (0,y)$. Diferenciando tenemos que $Dg_{(0,0)} = Df_0 + (0, Id_K) = (Id_E, Id_K) = Id_F$. Entonces g es localmente inversible en un entorno W de $0 \in F = E \oplus K$; tomamos U_p dentro de $f^{-1}(W)$ entorno de 0 y $f(U_p) \subset W$, por otro lado como $g(x,0) = f(x)$, es evidente que $g^{-1}f(x) = g^{-1}(x,0) = (x,0)$, así que tomando $\psi = g^{-1}$ tenemos demostrado el teorema. □

Por último, damos una versión general del teorema del rango constante que incluye algunos de los casos anteriores en dimensión finita:

Definición 1.7.14. Sea $f : U \subset E \to F$ de clase C^k, decimos que f tiene *rango constante* si existe un espacio de dimensión finita H que parte F tal que para todo $p \in U$, el núcleo de Df_p parte al espacio E y además $\mathrm{Ran}(Df_p) \simeq H$.

Observación 1.7.15. Notemos que si Df_p es epimorfismo y su núcleo parte a E para todo $p \in U$, entonces f tiene rango constante, ya que todos los rangos son isomorfos a F. Veamos ahora que ocurre cuando f tiene rango constante pero es un subespacio propio de F de dimensión finita; en ese caso hay un subespacio $H \subset F$ tal que todos los rangos son isomorfos a H. Veremos que esencialmente f es una proyección seguida de una inclusión de espacios de Banach.

Teorema 1.7.16 (Teorema del rango constante)**.** *Sea $f : U \subset E \to F$ de clase C^k y de rango constante $r < \infty$, con $H \oplus K = F$ subespacios tales que $\mathrm{Ran}(Df_p) \simeq H$ para todo $p \in U$. Entonces si $S = \ker Df_{p_0}$, tenemos que $E = H \oplus S$, y para cada $p \in U$ existen difeomorfismos $\varphi : U_p \to \varphi(U_p) \subset E$, $\psi : V_p \to \psi(V_p) \subset F$ alrededor de p y $f(p)$ respectivamente, de manera tal que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(h, s) = (h, 0_K)$.*

Demostración. Para cada $p \in U$, tenemos que hay subespacios cerrados tales que $E = T_p \oplus \ker Df_p$ y $F = \mathrm{Ran}(Df_p) \oplus K_p$. Como $Df_p|_{T_p}$ es un isomorfismo con su imagen, después de un isomorfismo lineal podemos suponer que $E = H_p \oplus \ker Df_p$. Sea $S = \ker Df_{p_0}$, sean $H = H_{p_0}$, $K = K_{p_0}$. Luego de sendas traslaciones, podemos suponer que $p_0 = (0, 0)$, $f(p_0) = (0, 0)$. Tenemos entonces que $f : E = H \oplus S \to F = H \oplus K$ se escribe como $f(x, y) = (q(x, y), r(x, y))$, y por hipótesis $Df_{(0,0)}(x, y) = (x, 0_K)$, luego debe ser $Dq_{(0,0)}(x, 0) = x$, es decir $D_1 q_{(0,0)} = \mathrm{Id}_H$. Sea

$$\varphi : U \subset H \oplus S \to E = H \oplus S, \qquad \varphi(x, y) = (q(x, y), y),$$

tenemos que

$$D\varphi_{(0,0)} = \begin{pmatrix} D_1 q_{(0,0)} & D_2 q_{(0,0)} \\ 0 & \mathrm{Id}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_H & * \\ 0 & \mathrm{Id}_S \end{pmatrix}$$

así que φ es un difeomorfismo local; restringiendo podemos suponer que $\varphi : U_0 \to \varphi(U_0) = V_H \oplus V_S$ con V_H, V_S sendos entornos de $0_H, 0_S$ en H, S respectivamente. Luego de computar $(x, y) = \varphi \circ \varphi^{-1}(x, y)$ vemos que φ^{-1} es de la forma $\varphi^{-1}(x, y) = (a(x, y), y)$ y que $q(a(x, y), y) = x$. Notemos que $f \circ \varphi^{-1}(x, y) = (x, q(a(x, y), y))$ también es de rango constante, con el mismo rango r ya que φ^{-1} es un difeomorfismo. Denotemos $Q(x, y) = q(a(x, y), y)$, si calculamos

$$D(f \circ \varphi^{-1})_{(x,y)}(h, s) \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_H & 0 \\ * & D_2 Q_{(x,y)} \end{pmatrix},$$

la única manera de que tenga rango r (ya que la dimensión de H es r) es que $D_2Q_{(x,y)} = 0$ para todo $(x,y) \in U_0$. Esto nos dice que Q no depende de y, luego $Q(x,y) = Q(x,0) = K(x)$. Tenemos así que $f \circ \varphi^{-1}(x,y) = (x, Q(x,0)) = (x, K(x))$. Ahora $f(U_0) = f \circ \varphi^{-1}(V_H \oplus V_s) = V_H \oplus K(V_H)$, y definimos $\psi : V_H \oplus K(V_H) \to F$ como $\psi(h,k) = (h, k - K(h))$; este es un difeomorfismo con inversa $\psi^{-1}(h,s) = (h, s + K(s))$. Por último,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x,y) = \psi(x, K(x)) = (x, K(x) - K(x)) = (x, 0).$$

□

1.7.2.1. Subespacios sin suplemento

Mencionamos aquí un resultado reciente (2009) concerniente a teoremas de la función implícita sin suplementos, que puede encontrarse en el trabajo [3] de Jinpeng An y Karl-Hermann Neeb.

Teorema 1.7.17. *Sean* E, F, G *espacios de Banach,* $U \subset E$, $V \subset F$ *entornos abiertos del cero. Sean* $f : U \to V$, $g : V \to G$ *funciones* C^1. *Supongamos que*

- $f(0) = 0$, $g(0) = 0$,
- $g \circ f \equiv 0$,
- $\operatorname{ran} Df_0 = \ker Dg_0$,
- $\operatorname{ran} Dg_0 \subset G$ *es un subespacio cerrado.*

Entonces existe un entorno $W \subset V$, *alrededor de* 0 *en* F, *tal que*

$$g^{-1}(0) \cap W = f(U) \cap W.$$

Observación 1.7.18. El teorema no pide que el rango de Dg_0 parta a F, pero si pide que sea un subespacio cerrado. Por otra parte, se deduce del teorema que

$$f : f^{-1}(f(U) \cap W) \cap U \to g^{-1}(0) \cap W$$

parametriza localmente la superficie de nivel $N = g^{-1}(0) \subset V$.

1.A. Problemas

1.I. Probar que si F es un espacio de Banach y E es un espacio normado, entonces $\mathcal{B}(E,F)$ es un espacio de Banach.

1.II.* Dados $p, q \in [1, +\infty]$ tales que $1/p + 1/q = 1$, y $\mathrm{Tr} : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ la traza usual, se define la norma p de matrices como

$$\|A\|_p = \mathrm{Tr}((A^*A)^{p/2})^{1/p}.$$

Probar la *desigualdad de Hölder*:

$$|\mathrm{Tr}(AB)| \leq \mathrm{Tr}|AB| \leq \|A\|_p \|B\|_q$$

donde $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

1.III. Dado $1 \leq p < \infty$ probar la *desigualdad de Minkowski*:

$$\|A + B\|_p \leq \|A\|_p + \|B\|_p$$

y concluir que las normas p son efecto normas sobre el espacio de matrices. Sugerencia: aplique la desigualdad de Hölder del ejercicio previo a la identidad

$$\begin{aligned} \|A+B\|_p^p &= \mathrm{Tr}\left[|A+B|^{p-1}|A+B|\right] = \mathrm{Tr}\left[|A+B|^{p-1}U^*(A+B)\right] \\ &= \mathrm{Tr}\left[|A+B|^{p-1}U^*A\right] + \mathrm{Tr}\left[|A+B|^{p-1}U^*B\right] \end{aligned}$$

donde $A + B = U|A + B|$ es la descomposición polar de $A + B$.

1.IV. **Desigualdades de Clarkson**

- Sean $x, y \in \mathbb{C}$ y $p \geq 2$, probar la siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} (|x+y|^p + |x-y|^p)^{1/p} &\leq (|x+y|^2 + |x-y|^2)^{1/2} \\ &\leq 2^{1/2}\{2^{(p-2)/p}((|x|^p + |y|^p)^{2/p})\}^{1/2} \\ &= 2^{1/q}(|x|^p + |y|^p)^{1/p} \end{aligned} \tag{1.5}$$

  donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (considerar las desigualdades de Jensen y Hölder).

- Sean $x, y \in \mathbb{C}$ y $1 < p \leq 2$, la idea de este ejercicio es probar que:

$$|x+y|^q + |x-y|^q \leq 2(|x|^p + |y|^p)^{q-1} \tag{1.6}$$

  - Probar que (1.6) se reduce a

$$|1+c|^q + |1-c|^q \leq 2(1+|c|^p)^{q-1} \tag{1.7}$$

    con $|c| \leq 1$.

  - Considerando $c = \rho e^{i\theta}$, mostrar que es suficiente considerar $\theta = 0$, es decir $0 \leq c \leq 1$. Además como (1.7) es trivial para $c = 0$ y $c = 1$, sólo es necesario considerar $0 < c < 1$.

- Mediante la transformación $c = \frac{1-z}{1+z}$ con $0 < z < 1$, reducir (1.7) a

$$S = \tfrac{1}{2}[(1+z)^p + (1-z)^p] - (1+z^q)^{p-1} \geq 0.$$

- Expandiendo cada término de S en su serie de Taylor, probar que:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2-p)(3-p)\dots(2k-p)}{(2k-1)!} z^{2k} f(z,k,p)$$

donde

$$f(z,k,p) = \left[\frac{1-z^{(2k-p)/(p-1)}}{(2k-p)/(p-1)} - \frac{1-z^{2k/(p-1)}}{2k/(p-1)}\right].$$

- Usando que la función $(1-z^t)/t$, para $t > 0$ y $0 < z < 1$ es no decreciente como función de t, establecer la desigualdad (1.7).

- Probar las desigualdades de Clarkson: si $x, y \in l_p$ con $p > 1$ entonces

$$\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \leq 2^{p-1}(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p), \quad \text{si} \quad p \geq 2, \tag{1.8}$$

$$\|x+y\|_p^q + \|x-y\|_p^q \leq 2(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)^{q-1}, \quad \text{si} \quad 1 < p \leq 2. \tag{1.9}$$

Sugerencia: Utilizar (1.5), (1.6) y la desigualdad de Minkowski

$$(\sum A_i^s)^{1/s} + (\sum B_i^s)^{1/s} \leq (\sum (A_i + B_i)^s)^{1/s}$$

para $A_i, B_i \geq 0$ y $0 < s = \frac{p}{q} \leq 1$.

1.V. Un espacio de Banach $(X, \|.\|)$ se dice uniformemente convexo si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|x\| = \|y\| = 1, \qquad \|x-y\| \geq \epsilon$$

implican $\frac{1}{2}\|x+y\| \leq 1 - \delta(\epsilon)$. Probar que l_p es uniformemente convexo si $p > 1$ y estimar $\delta(\epsilon)$ en términos de p.

1.VI.* Probar que $(M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|_p)$ es uniformemente convexo para $1 < p < \infty$.

1.VII. Probar que toda función diferenciable $f : E \to F$ entre espacios normados es continua.

1.VIII. Sean E, F, G espacios normados. Si $f : E \to F$ es diferenciable y $T \in \mathcal{B}(F, G)$, entonces

- $DT_x = T$ para todo $x \in F$.

- $D(T \circ f)_p = T \circ Df_p$ para todo $p \in E$.

1.IX. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Probar que si $x \neq 0$, entonces f es diferenciable en x y vale $Df_x(v) = \frac{\langle x,v\rangle}{\|x\|}$.

1.X. Consideremos $\mathcal{B}^2(E^2; F)$ con la norma

$$\|\beta\| = \sup_{\|v\|\leq 1, \|w\|\leq 1} \|\beta(v, w)\|.$$

Probar que $\Phi : \mathcal{B}(E, \mathcal{B}(E, F)) \to \mathcal{B}^2(E^2; F)$ dada por $\Phi(T)(v, w) = (Tv)(w)$ es un isomorfismo isométrico sobreyectivo.

1.XI. Probar que si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es dos veces diferenciable, entonces

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y)$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1.XII. Probar que si $U \subset E$ es un abierto conexo y $f : U \to F$ es diferenciable con $Df \equiv 0$, entonces f es constante.

1.XIII. Probar que si $\alpha : [a, b] \to E$ es continua, entonces es reglada.

1.XIV. Probar que $\| \int_I f(t)dt\| \leq \int_I \|f(t)\|dt$ para toda $f : I \to E$ reglada.

1.XV. Probar que si $f : I \to E$ es reglada y $T \in \mathcal{B}(E, F)$, entonces

$$T\left(\int_I f\right) = \int_I (T \circ f).$$

1.XVI. Sea $\mathcal{A}$ álgebra de Banach asociativa, sea (α_n) sucesión de números reales o complejos, sea $T \in \mathcal{A}$.

1. Probar que si la serie $\sum_{n\geq 0} \alpha_n T^n$ es convergente en A, entonces $f(T) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n T^n$ es una función analítica (real si A es real, compleja si A es compleja).

2. Sea $\exp(A) = \sum_{n\geq 0} {}^1\!/_{n!} A^n$, analítica en $\mathcal{A}$, y sea

$$\log(A) = \sum_{n\geq 0} {}^{(-1)^{n+1}}\!/_n \, (A - 1)^n,$$

analítica en $\|A - 1\| < 1$. Probar que $\exp \circ \log = id_U$ y que $\log \circ \exp = id$.

1.XVII. Sea $\mathfrak{g}$ algebra de Lie-Banach, sean $V, W \in \mathfrak{g}$ y (α_n) como antes. Sean $p_k(V,W)$ polinomios homogéneos en corchetes de V, W, por ejemplo $p(V,W) = [V,[V,[W,[V,W]]]]$, etc. Probar que si la serie $g(V,W) = \sum_n \alpha_n p_k(V,W)$ converge, entonces g es analítica en $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$

1.XVIII. Probar que $f : z \mapsto \bar{z}$, con $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica real, y no es analítica compleja.

1.XIX. Sea $f : B_R(p) \subset E \to F$ diferenciable. Si E, F son $\mathbb{C}$-espacios vectoriales, y Df_x es $\mathbb{C}$-lineal para cada $x \in B_R(p)$, en este ejercicio probamos que f es analítica compleja en $B_R(p)$.

- Si $\|v\| < 1/2(R - \|x - p\|)$, y $g(z) = \varphi(f(x + zv))$ (definida en $|z| < 2$), probar que g es una función analítica (holomorfa) en el sentido usual.
- Probar que $Df_x v = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(x+wv)}{w^2} dw$, donde C es una circunferencia pequeña alrededor de $z = 0$. En particular f es C^1.
- Diferenciando respecto de x las fórmulas de $Df_x v$ y $Df_x h$, en el primer caso con $x' = h$, y en el segundo con $x' = v$, probar que

$$\beta(v,h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{Df_{(x+wh)}v}{w^2} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{Df_{(x+wv)}h}{w^2} dw.$$

- Proponiendo $D^2 f_x(h,v) = \beta(v,h)$ probar que en efecto f es dos veces diferenciable, con diferencial segunda $\mathbb{C}$-lineal, y que f es C^2.
- Hemos probado que Df es C^1 con diferencial $\mathbb{C}$-lineal. Inductivamente, f es C^∞ con todas sus diferenciales $\mathbb{C}$-lineales.
- Si $R^k_x(v)$ es el resto de f en x de orden k, probar usando la fórmula de Cauchy que

$$\varphi(R^k_x(v)) = \frac{1}{2\pi(k-1)!} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-t)^{k-1} 3/2 \frac{g(3/2e^{i\theta})}{(3/2e^{i\theta} - t)^{k+1}} d\theta.$$

- Probar que $|3/2e^{i\theta} - t| \geq 1/2$ para $t \in [0,1]$ y usando que f es C^1, probar que $|g(3/2e^{i\theta})| \leq C(x,v)$. Con esto probar que $R^k_x(v) \to 0$ cuando $k \to \infty$, y concluir que f es analítica (Corolario 1.6.7).

1.XX. Probar el Teorema de la función implícita v3 (Teorema 1.7.12) usando la versión v1.

Capítulo 2

Variedades Diferenciables

> He decidido en primer lugar, abocarme a la tarea de construir la noción de una magnitud múltiplemente extendida, a partir de nociones generales de magnitud.
>
> Bernhard Riemann

Presentamos en este capítulo las nociones básicas de variedades modeladas por espacios de Banach. Haremos uso de las herramientas del cálculo diferencial e integral introducidas en el capítulo previo. También presentamos un breve repaso de grupos de Lie-Banach y sus espacios homogéneos, incluyendo algunos resultados recientes para espacios de dimensión infinita. El capítulo concluye con una rápida presentación de los grupos clásicos de matrices y sus espacios homogéneos.

2.1. Cartas y Atlas

Dado un espacio de Banach fijo E y un espacio topológico M, supongamos que tenemos una colección de abiertos $U \subset M$ que lo recubren, y una colección de mapas $\varphi : U \to E$ de manera que $\varphi(U) \subset E$ es abierto y $\varphi : U \to \varphi(U)$ es un homeomorfismo. Los pares (U, φ) se denominan *cartas* de M, y diremos que M es una *variedad topológica modelada por* E si se verifica la condición de compatibilidad siguiente: si (V, ϕ) es cualquier otra carta de M, entonces la *función de transición* $\phi \circ \varphi^{-1} : E \to E$ es continua donde está definida,

$$\phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subset E \to E.$$

Un atlas es una colección de cartas compatibles que cubre todo M.

Observación 2.1.1. Algunas veces es conveniente olvidar la topología inicial de M y dotar al espacio de una topología usando las cartas, es decir, si tenemos un cubrimiento del conjunto M por conjuntos U y funciones inyectivas φ tales que $\varphi(U) \subset E$ es un conjunto abierto, entonces decretamos que los U son abiertos en M y esto induce una topología allí (esto tiene sentido siempre que las funciones de transición sean todas continuas).

Un ejemplo sencillo de la diferencia entre las topologías que puede obtenerse es el dado por la Lemniscata ∞ en el plano $\mathbb{R}^2$: con la topología de subespacio es un conjunto compacto, mientras que con la topología que se le da al identificarlo con la recta $\mathbb{R}$ mediante una única carta, claramente es no compacto.

Definición 2.1.2 (Homeomorfismo con la imagen)**.** Sea $f : M \to N$ función entre espacios topológicos, diremos que f es un *homeomorfismo con su imagen* si f es continua, inyectiva y abierta: para todo $A \subset M$ abierto existe $U \subset N$ abierto tal que $f(A) = U \cap f(M)$. Podemos decir resumidamente que f es un homeomorfismo de M con su imagen $f(M) \subset N$.

Definición 2.1.3. Sea $(*)$ alguna de las siguentes categorías:

1. C^0 (*continua*),
2. *diferenciable*,
3. C^k $(k \geq 1)$,
4. C^∞ (*suave*),
5. C^ω (*analítica*).

Diremos que la variedad M es $(*)$ si las funciones de transición son $(*)$. Si N es otra variedad modelada por un espacio de Banach F, diremos que una función $f : M \to N$ entre variedades diferenciables es $(*)$ si para todo par de cartas (U, φ), (U', ξ) de M y N respectivamente, la función $\xi \circ f \circ \varphi^{-1} : E \to F$ es $(*)$ en el abierto $\varphi(U) \subset E$.

Antes de seguir avanzando con darle estructura adicional a una variedad diferenciable, damos algunas definiciones para funciones suaves:

Definición 2.1.4 (Sumersión, inmersión, embedding partido)**.** Sea $f : M \to N$ de clase C^1. Decimos que f es

1. *Sumersión* si para todo $p \in M$ y cartas (U, φ), (V, ψ) alrededor de $p, f(p)$ respectivamente con $f(U) \subset V$, se verifica que $D\tilde{f}_{\varphi(p)} = D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}$ epimorfismo.

2. *Inmersión* si para todo $p \in M$, se verifica que $D\tilde{f}_{\varphi(p)}$ es monomorfismo con rango cerrado.

3. *Embedding* si f es inmersión y es un homeomorfismo con la imagen.

4. *Embedding partido* si f es embedding y además $\mathrm{Ran}(D\tilde{f}_{\varphi(p)})$ es suplementado en F, el espacio que modela N.

2.2. Espacio y Fibrado tangente

En esta sección discutimos algunas maneras de presentar el fibrado tangente a una variedad diferenciable, y de qué manera las aplicaciones suaves entre variedades inducen morfismos de los fibrados.

2.2.1. Espacio tangente

Dada una variedad diferenciable, el espacio tangente T_pM en $p \in M$ se puede pensar de varias maneras equivalentes. Una bastante útil para nuestros propósitos es la siguiente:

Definición 2.2.1. Consideremos ternas (U, φ, v) donde (U, φ) es una carta de M alrededor de $p \in M$ y $v \in E$. Dos ternas $(U, \varphi, v), (V, \xi, w)$ son equivalentes en $p \in M$ si

$$D\left(\xi \circ \varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)} v = w.$$

Esto define una relación de equivalencia en aquellas ternas donde el abierto contiene al punto $p \in M$, y las clases son los elementos de T_pM.

Fijada una carta (U, φ), si $[(U, \varphi, v)]_p \in T_pM$ denota una clase, la aplicación

$$[(U, \varphi, v)]_p \mapsto v$$

es una biyección, que permite identificar T_pM con el espacio de Banach E.

Dada un curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ diferenciable definida en algún entorno de $0 \in \mathbb{R}$, tal que $\alpha(0) = p$, podemos calcular su velocidad en p usando una carta cualquiera (U, φ) alrededor de p, es decir

$$\dot{\alpha}(0) := (\varphi \circ \alpha)'(0)$$

es la velocidad de α en p. Por supuesto que muchas curvas pueden tener la misma velocidad con lo cual tenemos que hacer una identificación

Definición 2.2.2. Diremos que α, β representan el mismo vector tangente $v \in T_pM$ si $\alpha(0) = \beta(0) = p \in M$ y además

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$$

para alguna de carta (U, φ) alrededor de $p \in M$.

Esto define una relación de equivalencia entre curvas que pasan por p, y de hecho la relación *no depende de la carta elegida*. Para convencernos, sea (V, ξ) otra carta alrededor de $p \in M$, y observemos que

$$(\xi \circ \alpha)'(0) = (\xi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha)'(0) = D(\xi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(\varphi \circ \alpha)'(0).$$

Suponiendo que α y β son equivalentes, reemplazando el último término de la derecha por $(\varphi \circ \beta)'(0)$ y volviendo a agrupar se tiene

$$(\xi \circ \alpha)'(0) = (\xi \circ \beta)'(0).$$

El espacio tangente se puede pensar como el cociente por esta relación, pero como veremos, en los ejemplos usaremos una curva concreta. A la clase de una curva α la denotamos con $[\alpha]_p$. Observemos que, si ponemos

$$\beta(s) = \alpha(t + s),$$

esta es una curva en M para s suficientemente pequeño, que verifica $\beta(0) = \alpha(t)$; la clase de β la denotamos $[\alpha]_{\alpha(t)}$, o simplemente $[\alpha]_t \in T_{\alpha(t)}M$.

Observación 2.2.3. La aplicación $[\alpha]_p \mapsto [U, \varphi, (\varphi \circ \alpha)'(0)]_p$ está bien definida y da una biyección entre las clases de curvas y las clases de ternas. Le podemos dar a las curvas la estructura de espacio de Banach que hace de este mapa un isomorfismo de espacios de Banach, es decir

$$[\alpha]_p + [\beta]_p = [\varphi^{-1}(\varphi(p) + t(\varphi \circ \alpha)'(0) + t(\varphi \circ \beta)'(0))]_p$$

$$\lambda[\alpha]_p = [\varphi^{-1}(\varphi(p) + \lambda t(\varphi \circ \alpha)'(0))]_p.$$

2.2.2. Fibrado tangente

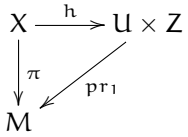
Para definir el fibrado tangente conviene introducir algunas nociones generales, comenzando por fibrados.

2.2.2.1. Fibrados

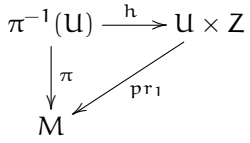
Definición 2.2.4. Un *fibrado* sobre una variedad diferenciable M consiste en una terna (X, M, π) dado por variedades diferenciables X, M y una función diferenciable $\pi : X \to M$ tal que, para cada $p \in M$,

- existe un entorno abierto U de p
- existe una variedad diferenciable Z, y un difeomorfismo $h : \pi^{-1}(U) \to U \times Z$, tales que $\pi = pr_1 \circ h$.

Es decir, localmente π es una proyección (haciendo honor a su nombre):



o más precisamente:



2.2.2.2. Fibrados vectoriales

Con algunas especificaciones más, donde el espacio X sea localmente trivializable con un espacio de Banach fijo E, obtenemos un *fibrado vectorial*. Más precisamente, sea E un espacio de Banach, entonces el fibrado (X, M, π) es un fibrado vectorial, si existen

- $\{U_i\}_{i\in I}$ cubrimiento por abiertos de M,
- para cada $i \in I$ hay una difeomorfismo $\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times E$ tal que $\pi = pr_1 \circ \tau_i$, y en particular para cada $p \in M$, si llamamos $\tau_{ip} := \tau_i|_{\pi^{-1}(p)}$, entonces
$$\tau_{ip} : \pi^{-1}(p) \to E$$
es un isomorfismo,
- para cada par $i, j \in I$, para cada $p \in M$, la función
$$\tau_{jp} \circ \tau_{ip}^{-1} : E \to E$$
es un isomorfismo de espacios de Banach (es decir es lineal, continua y biyectiva),
- para cada par $i, j \in I$, la función
$$U_i \cap U_j \ni p \mapsto \tau_{jp} \circ \tau_{ip}^{-1} \in \mathcal{B}(E)$$
es diferenciable.

Las funciones τ_i se denominan *trivializaciones* del fibrado, y la familia $\{(U_i, \tau_i)\}$ es un *cubrimiento trivializador*. Las funciones $\tau_{jip} := \tau_{jp} \circ \tau_{ip}^{-1}$ se llaman *funciones de transición* del fibrado. Una *sección* $s : M \to X$ del fibrado es una función tal que $\pi \circ s = id_M$.

2.2.2.3. Fibrado Tangente

En esta sección pegamos los espacios tangentes usando la noción de fibrado.

Definición 2.2.5. Sea $TM = \sqcup_{p\in M} T_pM$ y sea $\pi : TM \to M$ la proyección canónica que a un elemento $[\alpha]_p \in T_pM$ lo manda al punto $p \in M$. Consideremos un cubrimiento de M por cartas (U, φ) de manera tal que los U formen subbase de la topología de M, definimos

$$TU = \pi^{-1}(U) = \sqcup_{p\in U} T_pM = \{[U, \varphi, v]_p : p \in U, v \in E\},$$

y consideramos la función $\tau : \pi^{-1}(U) \to U_i \times E$ dada por

$$\tau[U, \varphi, v]_p = (p, v).$$

Fijada una carta (U, φ), notamos que τ es una biyección, le damos a TU la topología que hace de τ un homoemorfismo, y de esta manera obtenemos una topología para TM.

Notemos que con esta topología, $\pi : TM \to M$ es continua ya que los U forman una subbase de la topología de M. Mediante el mapa τ, muchas veces nos referiremos a elementos de TM como un par $V = (p, v)$, con $p \in M$, $v \in E$ (o $v \in T_pM$, dependiendo del contexto).

Lema 2.2.6. *Si M es Hausdorff, la topología de TM es Hausdorff.*

Demostración. Si $V_i = [U_i, \varphi_i, v_i]_{p_i}$ para $i = 1, 2$, hay dos posibilidades: $p_1 = p_2 = p$ en ese caso podemos tomar $U_1 = U_2$ y reemplazar V_2 por su equivalente $[U_1, \varphi_1, D(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)}w]_p$; si $V_1 \neq V_2$ debe ser $v \neq D(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)}w$, tomamos abiertos $\Omega_1, \Omega_2 \subset E$ que separen estos dos vectores y consideramos los abiertos de TM dados por $U_1 \times \Omega_1$, $U_1 \times \Omega_2$. Estos abiertos son disjuntos y contienen a V_1, V_2 respectivamente. La segunda posibilidad es que $p_1 \neq p_2$, en ese caso achicando podemos suponer que U_1, U_2 no se cortan y tienen a p_1, p_2 respectivamente; ahora separamos V_1 de V_2 en TM con los abiertos $U_1 \times E$, $U_2 \times E$. □

Definición 2.2.7 (TM como variedad diferenciable)**.** Supongamos que M es de clase C^k, con $k \geq 1$. Le damos a TM la colección de cartas (TU, φ_*) donde

$$\varphi_*([U, \varphi, v]_p) = (\varphi(p), v),$$

de manera que $\varphi_*(TU) = \varphi(U) \times E \subset E \times E$. Más adelante será importante notar que φ_* es lineal en cada $p \in U$, de hecho recupera el isomorfismo entre T_pM y E.

Lema 2.2.8. *Este es un sistema compatible de cartas que define un atlas de clase C^{k-1} para TM.*

Demostración. Si (U, φ), (V, ψ) son cartas de M, veamos que las cartas (TU, φ_*) y (TV, ψ_*) son compatibles: para $p \in U \cap V$ tomamos $[V, \psi, v]_p \in T_pM$ y notamos que es equivalente a $[U, \varphi, w]_p$ si y sólo si $D(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)} v = w$. Entonces para $(x, v) \in \psi_*(TU \cap TV)$ tenemos que

$$(\psi_*)^{-1}(x, v) = [V, \psi, v]_p = [U, \varphi, D(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)} v]_p$$

si $\psi(p) = x$. Pero entonces

$$\begin{aligned}(\varphi_* \circ \psi_*^{-1})(x, v) &= \varphi_*[U, \varphi, D(\varphi \circ \psi^{-1})_x v]_p = (\varphi(p), D(\varphi \circ \psi^{-1})_x v) \\ &= ((\varphi \circ \psi^{-1})(x), D(\varphi \circ \psi^{-1})_x v). \end{aligned} \tag{2.1}$$

De aquí es claro que las cartas son compatibles, y que si M es de clase C^k, entonces TM es de clase C^{k-1}. □

Observación 2.2.9 (TM como fibrado vectorial). Notemos que si (U_i, φ_i) es carta de M, entonces la única diferencia entre τ_i y la aplicacion $(\varphi_i)_*$ está en la segunda coordenada; dicho de otra manera $(\varphi_i)_*$ es τ_i seguido de $\varphi_i \times id_E$. Estas funciones τ_i permiten considerar a la terna (TM, M, π) como un fibrado vectorial (con fibra típica T_pM), veamos que se verifican las hipótesis.

Si $\pi = pr_1 \circ \tau_i$, tenemos que π es simplemente la proyección al punto base, luego $\pi^{-1}(p) = T_pM$, y nuestras $\tau_{ip} = \tau_i|_{T_pM}$ son la identificación entre T_pM y E, que es por definición un isomorfismo lineal. Por otro lado, es claro que por lo calculado arriba, se tiene

$$\tau_{jp} \circ \tau_{ip}^{-1}(v) = D(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_{\psi(p)} v.$$

Este es un isomorfismo de E, y además $p \mapsto D(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_{\psi(p)}$ es de clase C^{k-1}. Esto prueba que TM es un fibrado vectorial sobre M, que se trivializa con cualquier atlas de M.

2.2.3. Diferencial de una función

Dada una función diferenciable $f : M \to N$ entre variedades, denotaremos

$$f_* : TM \to TN$$

a la aplicación que, si (U, φ) y (V, ξ) son cartas de M y N respectivamente con $f(U) \subset V$, está dada por

$$f_*[U, \varphi, v]_p = [V, \xi, D(\xi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} v]_{f(p)}.$$

Es fácil ver la buena definición de esta función, y en general denotamos $f_{*p} = f_*|_{T_pM}$. Sean (TU, φ_*), (TV, ξ_*) las respectivas cartas de TM, TN introducidas en la sección

anterior, sean E, F los respectivos espacios de Banach que modelan M, N. Veamos que f_* es suave: tomemos $p \in U \cap V$, $v \in E$, llamemos $x = \varphi(p) \in \varphi(U)$, entonces $\xi_* f_* \varphi_*^{-1} : U \times E \to V \times F$ tiene la expresión

$$\begin{aligned}\xi_* f_* \varphi_*^{-1}(x, v) &= \varphi_* f_* [U, \varphi, v]_{\varphi^{-1}(x)} = \xi_* [V, \xi, D(\xi \circ f \xi \varphi^{-1})_x v]_{f(\varphi^{-1}(x))} \\ &= ((\xi \circ f \circ \varphi^{-1})(x), D(\xi \circ f \circ \varphi^{-1})_x v).\end{aligned}$$

De aquí es evidente que ue nuevamente es de clase C^{k-1} siempre que M, N, f sean de clase C^k (con $k \geq 1$). Notemos que si $\tilde{f} = \xi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es la expresión local de f, entonces la expresión local de f_* es simplemente $(\tilde{f}, D\tilde{f})$.

Pensando en términos de clases de curvas, hay otra manera útil de presentar f_* que es la siguiente: si $[\alpha]_p \in T_p M$ es una clase con un representante $\alpha : I \to M$ tal que $\alpha(0) = p$, entonces $f \circ \alpha : I \to N$ es una curva que pasa por $f(p)$, y no es difícil ver que

$$f_{*p}([\alpha]_p) = [f \circ \alpha]_{f(p)}.$$

Ahora podemos escribir en términos de f_* las clases de funciones suaves dadas en la Definición 2.1.4:

Definición 2.2.10 (Sumersión, inmersión, embedding partido)**.** Sea $f : M \to N$ de clase C^1. Decimos que f es

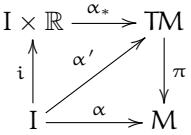
1. *Sumersión* f_{*p} es epimorfismo para todo $p \in M$.
2. *Inmersión* f_{*p} es monomorfismo con rango cerrado para todo $p \in M$.
3. *Embedding* si f es inmersión y es un homeomorfismo con la imagen.
4. *Embedding partido* si f es embedding y además $\mathrm{Ran}(f_* p)$ es suplementado en $T_{f(p)} M$.

2.3. Levantadas de una curva

Si $\alpha : I \to M$ es una curva C^k con $I \subset \mathbb{R}$ abierto, se la puede pensar como una curva entre variedades (el fibrado tangente a I se identifica naturalmente con $I \times \mathbb{R}$). La diferencial $\alpha_* : TI = I \times \mathbb{R} \to TM$ es una aplicación C^{k-1}. Pero en realidad es conveniente pensar a esta diferencial como otra curva, pero a valores en TM, de la siguiente manera: el fibrado $\pi : I \times \mathbb{R} \to I$ tiene una sección canónica i dada por $i(t) = (t, 1)$. Entonces definimos

$$\alpha' := \alpha_* \circ i : I \to TM$$

que es la *levantada canónica* de α, que verifica $\pi \circ \alpha' = \alpha$,



Esta es una curva C^{k-1} a valores en TM. Notemos que en una carta local (U, φ) de M, la expresión para α' es

$$\alpha'(t) = ((\varphi \circ \alpha)(t), \dot{\alpha}(t)),$$

donde $\dot{\alpha}(t)$ denota el vector de E dado por $(\varphi \circ \alpha)'(t)$.

Definición 2.3.1. En general, diremos que $\mu : I \to TM$ es una *levantada* de $\alpha : I \to M$ (o también que μ es un campo a lo largo de α) si $\pi\mu = \alpha$ o equivalentemente si $\mu(t) \in T_{\alpha(t)}M$ para todo $t \in I$.

2.4. Subvariedades

Supongamos que M es una variedad C^k modelada por el espacio de Banach E, y que este espacio se descompone como $E = F_1 \oplus F_2$ con F_i espacios de Banach.

Definición 2.4.1 (Subvariedad partida)**.** Sea $N \subset M$ un subconjunto al cual le damos la topología de subespacio, y supongamos que para cada $n \in N$ hay una carta (U, φ) de M que induce un isomorfismo de U con un producto de abiertos $A_1 \times A_2 \subset F_1 \times F_2$, de manera tal que

$$\varphi(U \cap N) = A_1 \times \{0\}.$$

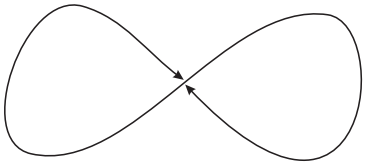
Diremos que $N \subset M$ es una *subvariedad partida*.

Observación 2.4.2 (Una subvariedad partida es una variedad diferenciable cuya topología coincide con la de subespacio de M). Llamando $\varphi_N = pr_1 \circ \varphi \circ i = pr_1 \circ \varphi|_{U \cap N}$, tomamos $(U \cap N, \varphi_N)$ como sistema de cartas de N, tenemos que $\varphi_N(U \cap N) = A_1$ es un abierto de F_1. Veamos que este sistema de cartas obtenido por restricción hace de N una variedad diferenciable: si $s \in A_1$, sea $i_1(s) = (s, 0)$ entonces $\varphi^{-1} i_1(s) \in U \cap N$ así que $\varphi_N \circ \varphi^{-1}(s) = pr_1 i_1(s) = s$. Luego, usando que $\varphi_N : U \cap N \to A_1$ es una biyección, vemos que $\varphi^{-1} \circ i_1(s) = (\varphi^N)^{-1}(s)$ siempre que $s \in A_1$. Y entonces si tenemos dos cartas $\varphi, \tilde{\varphi}$ de la construcción, vemos que

$$\varphi_N \circ \tilde{\varphi_N}^{-1} = \varphi_N \circ \tilde{\varphi}^{-1} \circ i_1 = pr_1 \circ \varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1} \circ i_1$$

es suave dentro de S. Como el rol de $\varphi, \tilde{\varphi}$ es intercambiable, es un difeomorfismo, así que las cartas son compatibles.

En general no es sencillo garantizar esta construcción, incluso en el caso finito dimensional (sin mencionar que en dimensión infinita puede ocurrir que un subespacio F_1 no parta a E). Un ejemplo molesto ocurre en el caso de la lemniscata, donde ningún entorno de $X = (0,0)$ se puede identificar con $\mathbb{R}$.



Otro ejemplo es el grupo a un parámetro con pendiente irracional en el toro, que tiene estructura de variedad diferenciable por ser difeomorfo con $\mathbb{R}$, pero no es una subvariedad partida del toro. Específicamente, identificamos el toro con $S^1 \times S^1$ y consideramos la subvariedad W parametrizada como $t \mapsto (e^{i\pi t}, e^{i\alpha\pi t})$ para $t \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ irracional fijo. Es fácil ver que $W \subset T$ es densa, con lo cual cualquier abierto de T, al cortarlo con W, nos devuelve infinitos segmentos. Dicho de otra forma, *no* hay manera de obtener el abierto $A \subset W$ que viene del intervalo $(0,1)$ en $\mathbb{R}$, como intersección de un abierto del toro con W. Entonces W no tiene la topología de subespacio.

Teorema 2.4.3 (Embedding partido y subvariedad partida coinciden)**.** *Sea $N \subset M$ variedad. Entonces*

1. *Si N es subvariedad partida de M, entonces $i : N \to M$ es un embedding partido.*
2. *Si $i : N \to M$ es un embedding partido, entonces $N \subset M$ es subvariedad regular.*

En ese caso si (U, φ) es una carta de N como subvariedad regular con $\varphi : U \to S \times H$, y $\varphi(U \cap N) = V_S \oplus 0 = \varphi(U) \cap S$, entonces $\varphi^N = P_S\varphi \circ i_S = P_S\varphi|_{U\cap N}$ definida en $U \cap N$ es carta de N, y toda carta de N es localmente de esta forma.

Demostración. Si N es subvariedad regular, tiene la topología de subespacio luego i es homeomorfismo con la imagen. Por otro lado si (U, φ) es una carta de M que induce $\varphi^N = P_S \circ \varphi \circ i$ carta de N por restricción (Observación 2.4.2), notemos que

$$\tilde{i}(s) = \varphi \circ (\varphi^N)^{-1}(s) = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ i_S(s) = (s, 0)$$

por la misma observación, así que es claro que i es inmersión partida. Esto prueba que i es embedding partido. Recíprocamente, supongamos que i es embedding partido, la topología de N es la de subespacio, veamos que N es subvariedad partida. Sea $p \in N$, sea (V, ϕ) carta de N alrededor de p, sea (U, ξ) carta de M alrededor de $p = i(p)$,

notemos que $V = \tilde{U} \cap N$ para algún abierto $\tilde{U}$ de M, intersecando podemos suponer que $V = U \cap N$. Por hipótesis $\tilde{i} = \xi \circ i \circ \phi^{-1}$ es inmersión partida. Entonces por el Teorema 1.7.13 existe un difeomorfismo $\psi : \xi(U) \to V_S \oplus V_H$ tal que $\psi \circ \tilde{i}(s) = (s, 0)$ para todo $s \in \phi(U \cap N)$. Pero entonces definiendo $\varphi = \psi \circ \xi$, vemos que

$$\varphi \circ i \circ \phi^{-1}(s) = (s, 0)$$

así que φ tiene las propiedades deseadas. Por otro lado $P_S \varphi \circ i \circ \varphi^{-1}(s) = s$ para todo $s \in \phi(U \cap N)$, y esto prueba que $P_S \varphi \circ i = \phi$. Entonces $\varphi^N = P_S \varphi \circ i = P_S \varphi|_{U \cap N} = \phi$ es carta de N, y todas son de esta forma. □

Un criterio útil para decidir si $N \subset M$ es una subvariedad partida es el siguiente:

Proposición 2.4.4 (Teorema del valor regular)**.** *Sea $f : M \to Z$ una función C^k ($k \geq 1$) entre variedades diferenciables. Sea $z_0 \in Z$ y $N = f^{-1}(z_0) \subset M$. Supongamos que f es una sumersión y que para todo $p \in N$ el núcleo $\ker f_{*p}$ parte a T_pM. Entonces N es cerrado y es una subvariedad partida de M de clase C^k, con $T_pN \simeq \ker f_{*p} \simeq \ker Df_{*p_0}$ para todo $p, p_0 \in N$.*

Demostración. Que N es cerrado es trivial, supongamos que es no vacío. Dado $p \in N$, si el espacio de Banach que modela M es E, tomamos una carta (U, ψ) de M y llamamos $\tilde{U} = \psi(U) \subset E$, $\tilde{N} = \psi(U \cap N)$. Tomemos ahora otra carta (W, ξ) de Z, y llamemos $\tilde{f} = \xi \circ f \circ \psi^{-1}$. Es fácil ver que $\tilde{N} = \tilde{f}^{-1}(\xi(z_0))$. También que $\tilde{f} : \tilde{U} \to F$ verifica las hipótesis del Teorema 1.7.7; sea $S = \ker Df_{p_0}$ para algún $p_0 \in N$. Entonces para cada $x = \psi(p) \in \psi(U)$ existe $\tilde{U_p} \subset \tilde{U} \subset E$ abierto entorno de x, y un difeomorfismo $\tilde{\varphi} : \tilde{U_p} \to E$ de manera tal que $\tilde{\varphi}(\tilde{U_p} \cap \tilde{N}) = \tilde{\varphi}(\tilde{U_p}) \cap S$. Llamemos $U_p = \psi^{-1}(\tilde{U_p})$, $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi : U_p \to E$, que es una carta de M. Veamos que cumple las hipótesis para que N sea subvariedad: en primer lugar

$$\varphi(U_p \cap N) = \tilde{\varphi}(\tilde{U_p} \cap \tilde{N}) = \tilde{\varphi}(\tilde{U_p}) \cap S = \varphi(U_p) \cap S.$$

Por la Observación 2.4.2, esta es una subvariedad partida de M. □

La utilidad de este criterio se termina cuando no podemos hallar un suplemento para el núcleo de f_*. Sin embargo, en dimensión finita, en espacios de Hilbert, y en ejemplos puntuales de espacios de Banach, es utilizable.

Observemos que la definición de subvariedad partida es demasiado estricta para espacios de Banach. Si un subespacio $E \subset F$ de un espacio de Banach no tiene suplemento topológico, entonces no será subvariedad partida. Podemos relajar esta condición para que si lo sea:

Definición 2.4.5 (Subvariedad embebida)**.** Si E es el espacio de Banach que modela M y $N \subset M$ es un subconjunto, diremos que N es *subvariedad embebida* de M si N tiene la topología de subespacio, y existe un subespacio cerrado $S \subset E$ tal que para todo punto $p \in N$ existe una carta (U, φ) de M que contenga a p tal que $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap S$ (en particular es un abierto de S).

El problema ahora es encontrar buenos criterios que permitan probar la existencia de una estructura de subvariedad, ya que el teorema de la función inversa y sus derivados *requieren* -según discutimos- de la existencia de suplementos lineales para núcleos o imágenes de las diferenciales de las funciones involucradas. Un corolario no trivial del Teorema 1.7.17 de la función implícita de Ann y Neeb que se halla en el mismo trabajo [3] es el siguiente:

Teorema 2.4.6. *Sea $f : M \to Z$ una función C^k, $k \geq 1$ entre variedades diferenciables, y dado $z_0 \in Z$ pongamos*

$$N = f^{-1}(z_0).$$

Supongamos que

- Df_p *es un epimorfismo para cada* $p \in N$.
- *Existe un espacio de Banach E de manera que para todo punto $p \in N$, existe un entorno abierto $U_p \subset E$ del cero y una función C^k, $g^p : U_p \to N \subset M$, de manera que $g^p(0) = p$, $(Dg^p)_0$ es un monomorfismo y $\operatorname{ran}(Dg^p)_0 = \ker Df_p$.*

Entonces N tiene una estructura de variedad diferenciable modelada por $E \simeq \ker Df_p$, que la hace una subvariedad embebida de M.

Discutamos ahora las subvariedades inmersas, que son nuestros contraejemplos favoritos (la lemniscata, la curva densa en el toro):

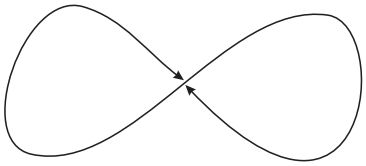
Definición 2.4.7 (Subvariedad inmersa)**.** Si M es variedad y $N \subset M$ es una variedad diferenciable, diremos que N es subvariedad inmersa si $i : N \to M$ es una inmersión. En ocasiones a un par $f : N \to M$ con f inmersión le decimos subvariedad inmersa: denotando $g = f : N \to f(N)$, y le damos a $f(N)$ la estructura de variedad que hace de f un difeomorfismo local, de $f = i \circ g$ tenemos $f_* = i_* \circ g_*$, y como f_*, g_* son monomorfismos con rango cerrado, también i_* lo es, luego $i : f(N) \to M$ es una inmersión.

El siguiente criterio no dice que $f(X) \subset Y$ es una subvariedad embebida, sino inmersa.

Proposición 2.4.8. *Sea* $f : X \to Y$ *una función* C^k *entre variedades, y supongamos que* f *es una inmersión partida, es decir* $f_{*p} : T_pX \to T_{f(p)}Y$ *es monomorfismo con rango cerrado que parte la imagen. Entonces para cada* $p \in X$ *existe un abierto* $U \subset X$ *entorno de* p *tal que*

- $f(U)$ *es una subvariedad embebida de* Y.
- $f|_U : U \to f(U)$ *es un* C^k *difeomorfismo.*

Demostración. Fijado $p \in X$, como $T_{f(p)}Y = \mathrm{Ran}(f_{*p}) \oplus K_p = T_pX \oplus K_p$ y f_{*p} es monomorfismo, por el Teorema 1.7.13, para cada $p \in X$ podemos escribir localmente $\tilde{f}(x) = (x, 0)$ a menos de un difeomorfismo. Luego en una carta adecuada (W, φ) de M vemos que $\varphi(W \cap f(U)) = \varphi(W) \cap f(U))$ y lo mismo para cada abierto dentro de U, y esto prueba las afirmaciones. □



Localmente, la imagen de la parametrización, en pedazos pequeños, es una subvariedad embebida. Pero si tomamos un abierto del espacio más grande que sea entorno del punto de intersección, y lo cortamos con la imagen de la parametrización, no conseguimos una carta de la subvariedad.

Hecha esta aclaración, si uno puede probar de alguna otra forma que $Z \subset Y$ es una subvariedad topológica, el teorema previo da una forma de darle estructura diferenciable compatible con la de M: hay que encontrar el espacio X y la función $f : X \to Y$ tal que $f(X) = Z$, que verifique las hipótesis del teorema.

Volveremos a tocar el tema de estructuras diferenciables y subvariedades embebidas con cierta generalidad cuando estudiemos espacios homogéneos de grupos de Lie-Banach, en la Sección 3.5. De particular interés es un criterio para estudiar cuando un espacio homogéneo $G/K \subset X$ es subvariedad de X, que presentamos en el Lema 3.5.11.

2.4.1. Subvariedades de un espacio de Banach

Cuando $M \subset F$ con F un espacio de Banach, podemos presentar de forma "concreta" la estructura de subvariedad, las curvas, los espacios tangentes, los campos y otros objetos que introduciremos luego.

Como la inclusión $i : M \to F$ es una función de clase C^k, podemos usar las inversas de las cartas (U, φ) de M, que por definición son aplicaciones de clase C^k,

$\Phi := i \circ \varphi^{-1} : W \to F$ con $W \subset E$ abierto en el espacio de Banach E que modela M. Son inyectivas y con diferencial $D\Phi_x$ inyectiva en cada $x \in W$, cuyo rango es un subespacio cerrado de F que identificamos con $T_{\Phi(x)}M$ de la siguiente manera

$$[(U, \varphi, v)]_p \mapsto D\Phi_x v,$$

o equivalentemente si $\alpha(t) = \Phi(tv)$ es una curva en M con $\alpha(0) = p$, identificamos

$$[\alpha]_p \mapsto v = (i \circ \alpha)'(0).$$

Es necesario para ser subvariedad embebida que todo punto $p \in M$ tenga alguna bola abierta $U \subset F$ de manera que $U \cap M$ esté parametrizado por alguna carta (W, Φ). En el caso más restrictivo de subvariedad partida, necesitamos que el rango de $D\Phi_x$ se parta en F.

Supongamos que M se presenta como superficie de nivel de una función suave g, es decir: sean F, G espacios de Banach y sea $g : F \to G$ una función C^k $(k \geq 2)$, consideremos el subconjunto

$$M = \{v \in F : g(v) = 0\}.$$

Suponemos que para cada $p \in M$, Dg_p es un epimorfismo, y el espacio tangente T_pM se identifica con el subespacio cerrado $\ker Dg_p \subset F$, que a su vez se identifica con el espacio de Banach E que modela M. Esto ocurre por ejemplo si Dg_p es un epimorfismo con núcleo que se parte para todo $p \in M$. En esta presentación, si $\Phi : W \subset E \to F$ es una parametrización local de M (la inversa de una carta), se tiene $g \circ \Phi = 0$ con lo cual

$$Dg_{\Phi(x)} D\Phi_x = 0$$

para todo $x \in W$.

Observación 2.4.9. Dada una curva $\alpha : I \to M \subset F$, está claro que $\dot{\alpha}(0) \in T_pM$ cuando $\alpha(0) = p$, pero en general no es cierto que $\ddot{\alpha}(0) \in T_pM$.

Un problema similar ocurre con la diferencial de una función $X : M \to TM$, que en este caso concreto se puede pensar como una aplicación $X : W \subset E \to F$ tal que $X(x) \in T_{\Phi(x)}M$ para todo $p \in W$; hay que pensar dónde yace $X_{*p}v$ para cada $v \in E$. Estos problemas los retomaremos en la sección de derivada de Lie y luego cuando introduzcamos el segundo fibrado tangente $TTM = T(TM)$.

2.4.1.1. La esfera de un espacio de Hilbert

En este texto, denotaremos con $\mathcal{H}$ a un espacio de Hilbert separable, a su producto interno con $\langle , \rangle$, y con $\| \cdot \|$ a la norma asociada. En caso de que la dimensión de $\mathcal{H}$ sea finita, identificaremos $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$.

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 49

Para simplificar la discusión de esta sección, supongamos que $\mathcal{H}$ es real. Consideremos $S \subset \mathcal{H}$ la esfera unitaria,

$$S = \{v \in \mathcal{H} : \|v\|^2 = 1\},$$

con lo cual S es una superficie de nivel de la función analítica $H(v) = \|v\|^2$, $H : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, cuya diferencial está dada por

$$DH_p = 2\langle p, \cdot \rangle$$

y su diferencial segunda es -constantemente- la forma bilineal simétrica

$$D^2H_p = 2\langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Observemos que la diferencial primera $DH_p : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ es un epimorfismo para cada $p \in S$, y además que $\ker DH_p = span(p)^\perp$ es un hiperplano cerrado, con lo cual es un subespacio que se parte (un suplemento natural es $span(p) \subset \mathcal{H}$). Luego $S \subset \mathcal{H}$ es una subvariedad de codimensión 1 en $\mathcal{H}$, con

$$T_pS = span(p)^\perp$$

para todo $p \in S$. Estos subespacios se identifican todos, es decir, para $p, q \in S$ se tiene

$$E := T_pS \simeq \mathcal{H}/span(p) \simeq T_qS \simeq \mathcal{H}/span(q).$$

Si el espacio de Hilbert es complejo, la funcional que se obtiene es la parte real del producto interno, es decir $DH_p = 2Re\langle p\cdot, \cdot \rangle$, y se puede hacer un razonamiento análogo.

2.5. Campos

Un *campo vectorial en* M es una función diferenciable $X : M \to TM$ que es una *sección* del fibrado en el sentido siguiente: $X(p) \in T_pM$. Resumiendo, si $\pi : TM \to M$ es la aplicación al punto base, entonces un campo verifica $\pi \circ X = id_M$.

2.5.1. Flujo de un campo

Dado un campo cualquiera X y un punto $p \in M$, tiene sentido plantearse el problema de hallar una curva $\alpha : (a, b) \to M$ tal que

$$\begin{cases} \alpha'(t) = X(\alpha(t)) \\ \alpha(0) = p \end{cases} . \tag{2.2}$$

Observación 2.5.1. Esta es una ecuación que se traduce usando cartas a una ecuación diferencial ordinaria en el espacio de Banach E, de la siguiente manera: si $p \in M$, sea

(U, φ) carta de M alrededor de p con $\varphi(p) = 0$, sea $E \supset \varphi(U)$ el espacio normado que modela M. Escribimos la expresión local

$$X(p) = [U, \varphi, \nu(p)]_p$$

y de la Definición 2.2.7 sabemos que $\nu = pr_2\varphi_* X$ es suave si y solo si X lo es. Sea $F : \varphi(U) \to E$ el campo en E dado por $F = \nu \circ \varphi^{-1}$; entonces podemos considerar la ecuación diferencial

$$\begin{cases} x_p'(t) = F(x_p(t)) \\ x_p(0) = 0 \end{cases} . \tag{2.3}$$

cuya solución (de existir) será una curva $x_p : I \to \varphi(U) \subset E$ con I un intervalo abierto alrededor de $t = 0$.

Ahora bien, es un hecho conocido (ver por ejemplo el Capítulo 1 del libro de Lang [58]) que si F es C^k $(k \geq 1)$ esta solución existe, es C^k y es única en algún intervalo maximal J que contiene $t = 0$. Luego si X es C^k entonces F será C^k y la solución será C^k.

Lema 2.5.2. *La curva $x_p : I_p \to \varphi(U)$ es solución de (2.3) si y sólo si la curva $\alpha_p = \varphi^{-1}x_p$ es solución de (2.2).*

Demostración. Puesto que la levantada horizonal α_p' involucra la diferencial entre variedades, tendremos que escribir las ecuaciones teniendo esto en cuenta (una de las desventajas de la presentación intrínseca). Entonces pensemos a la curva $x_p : I \to \varphi(U)$ de la misma manera, como una aplicación entre variedades. Notemos que con esa manera de pensarla, tenemos también $x_p'(t) = pr_2(x_p)_{*(t,1)}$. Supongamos que α_p es solución del problema en M, entonces derivando $x_p = \varphi\alpha_p$ obtenemos

$$\begin{aligned}(x_p)_{*(t,1)} &= \varphi_{*\alpha_p(t)}(\alpha_p)_{*(t,1)} = \varphi_{*\alpha_p(t)}\alpha_p'(t) = \varphi_{*\alpha_p(t)}X(\alpha_p(t)) \\ &= \varphi_{*\varphi^{-1}x_p(t)}X(\varphi^{-1}x_p(t)).\end{aligned}$$

Entonces mirando la segunda coordenada vemos que

$$x_p'(t) = pr_2(x_p)_{*(t,1)} = pr_2\varphi_{*\varphi^{-1}x_p(t)}X(\varphi^{-1}x_p(t)) = F(x_p(t))$$

ya que como dijimos, $F = pr_2\varphi_* X \circ \varphi^{-1}$. Entonces x_p es solución del problema en E. Si ahora en cambio suponemos que x_p es la solución, en particular es suave y $\alpha_p = \varphi^{-1}x_p$ será suave, y podemos hacer un razonamiento parecido ahora comenzando con la otra hipótesis. □

Observación 2.5.3. Entonces si X es C^k $(k \geq 1)$, para cada $p \in M$, el problema (2.2) tiene una única solución de $\alpha_p : I_p \to M$ de clase C^k y definida en algún intervalo maximal $I_p = (t_p^-, t_p^+)$, donde permitimos que $t_p^+ = +\infty$ y $t_p^- = -\infty$.

Definición 2.5.4 (Flujo de un campo)**.** Llamemos $D(X) \subset \mathbb{R} \times M$ al dominio (t, p) tales que $t \in I_p$. Entonces el *flujo* del campo X es la función $\alpha : D(X) \to M$ que para cada $p \in M$ da la solución de la ecuación diferencial, es decir

$$\alpha(t, p) = \alpha_p(t) = \alpha_t(p)$$

donde la notación es intercambiable según la conveniencia. Fijado t, denotaremos $D_t \subset M$ al conjunto de puntos de M tales que $(t, p) \in D(X)$, esto es

$$D_t = \{p \in M : t \in I_p\} = \mathrm{Dom}(\alpha_t),$$

este conjunto puede ser vacío para t grande, pero $D_0 = M$ siempre. Notemos que $t \in I_p$ si y sólo si $p \in D_t$ si y sólo si $(t, p) \in D(X)$.

Volviendo al estudio de la solución del campo en su versión local en una carta, en la ecuación (2.3), el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecucaciones diferenciales para espacios normados nos dice (ver [58, Teorema 1.14]):

Teorema 2.5.5. *Sea $F : W \to E$ de clase C^k con $W \subset E$ abierto en el espacio normado E. Para cada $z \in W$ existe un intervalo J alrededor de $t = 0$ y un bola $B \subset W$ alrededor de z, tal que el flujo x de F está definido en $J \times B$ y además $x : J \times B \to U$ es de clase C^k.*

Entonces para cada $p \in M$, tomando una carta (U, φ) alrededor de p, consideramos $W = \varphi(U)$, y achicando tal vez U, vemos que el flujo $\alpha(t, p) = \varphi^{-1}(x(t, p))$ es de clase C^k en $(-\delta, \delta) \times U$.

Teorema 2.5.6. *Si X es C^k con $k \geq 1$, entonces $D(X)$ es un entorno abierto de $\{0\} \times M$ en $\mathbb{R} \times M$, y cada D_t es abierto en M. El flujo $\alpha : D(X) \to M$ es una función de clase C^k.*

Demostración. Sea $p \in M$, sea I^* el conjunto de los $t \in I_p$ tales que existe $r > 0$ y un abierto U alrededor de p tales que $\alpha((t - r, r + r) \times U) \subset D(X)$ y α restringido a ese producto cartesiano es de clase C^k. Vemos que $0 \in I^*$ por el teorema de existencia local, y también es fácil ver que I^* es abierto en I_p. Veamos que I^* es cerrado; sea s en la clausura relativa, en particular $s \in I_p$. Tomemos un intervalo J alrededor de 0 y un abierto W alrededor de $\alpha_s(p)$ tal que X tiene un flujo β de clase C^k en $J \times W$, con $\beta(0, q) = q$ para todo $q \in W$ (ver la observación previa al teorema). Tomemos $t_1 \in I^*$ tal que $s - t_1 \in J$ y que $\alpha_{t_1}(p) \in V$. Existe $r_1 > 0$ y un entorno abierto U_1 de p tales que $(t_1 - r_1, t_1 + r_1) \times U_1$ cae dentro de $D(X)$ y α es suave allí. Por la continuidad de α, achicando U_1 si es necesario, podemos suponer que $\alpha(t_1, x) \in V$ para $x \in U_1$. Para $t \in J + t_1$, $x \in U_1$, sea

$$\rho(t, x) = \beta(t - t_1, \alpha(t_1, x)),$$

entonces $\rho(t_1, x) = \alpha(t_1, x)$ y es fácil ver derivando que ρ es flujo del campo. Entonces ρ_x es una continuación de α_p a un intervalo mayor y este intervalo contiene a s pues $s - t_1 \in J$. Tomemos $\delta > 0$ tal que $(s-\delta, s+\delta) \subset J + t_1$, entonces $(s-\delta, s+\delta) \times U_1 \subset (J + t_1) \times U_1$ y allí está definido ρ que es flujo de X y es de clase C^k. Entonces $s \in I^*$, y esto prueba que es cerrado, luego $I^* = I_p$. Pero entonces si $(t, p) \in D(X)$, por lo recién probado hay una caja abierta en el producto cartesiano que contiene (t, p) y tal que la caja está dentro de $D(X)$, y esto prueba que $D(X)$ es abierto.

Ahora fijemos t, y si D_t no es vacío tomemos $p \in D_t$, entonces $(t, p) \in D(X)$. Existe entonces un abierto básico $J \times Z$ dentro de $D(X)$ que contiene (t, p). Notamos que $Z \subset D_t$ y entonces D_t es abierto. □

También puede probarse que $D(X) = \mathbb{R} \times M$ cuando M es compacta; si uno tiene alguna manera de controlar el tamaño del vector X (aunque M no sea compacta), puede probarse lo mismo (ver el Corolario 2.4 y la Proposición 2.5 de [58, IV,§2]). Veremos que el flujo de los campos invariantes a izquierda en un grupo de Lie G también siempre está definido en $\mathbb{R} \times G$.

Observemos que $\alpha_0 = \mathrm{id}_M$, luego si t es suficientemente pequeño α_t será un difeomorfismo con su imagen, pero con precaución porque el dominio de α_t no es en general todo M. Con precisión, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.5.7. *Sea X campo suave en M.*

1. *Para cada $p \in M$ y cada $t \in I_p$ tenemos $I_{\alpha_t(p)} = I_p - t$. Además $s \in I_{\alpha_t(p)}$ si y sólo si $t + s \in I_p$ y en ese caso $\alpha_{t+s}(p) = \alpha_s \circ \alpha_t(p)$.*
2. *$\alpha_t(D_t) = D_{-t}$ y $\alpha_t^{-1} = \alpha_{-t}$ allí.*
3. *Fijados $p_0 \in M$, $t \in I_{p_0}$, existe un entorno abierto $U_0 \subset M$ de p_0 tal que $t \in I_p$ para todo $p \in U_0$, y además $\alpha_t : p \mapsto \alpha(t, p)$ es un difeomorfismo de U_0 con un entorno abierto de $\alpha(t, p_0)$.*

Demostración. Consideramos $s \mapsto \alpha_{s+t}(p)$ y $s \mapsto \alpha_s \circ \alpha_t(p)$. Ambas curvas comienzan en $\alpha_t(p)$ y son soluciones de la ecuación diferencial $\beta' = X(\beta)$, luego tienen el mismo dominio de definición y son iguales. El dominio de definición de la segunda curva es $I_{\alpha_t(p)}$, y por otro lado s está en el dominio de definición de la primer curva si y sólo si $s + t \in I_p$, o sea que el dominio de definición de la primer curva es $I_p - t$. Luego $I_{\alpha_t}(p) = I_p - t$ y además $\alpha_{t+s} = \alpha_s \circ \alpha_t$ para $s, t, s + t \in I_p$.

Ahora notemos que como $I_{\alpha_t}(p) = I_p - t$ para $t \in I_p$, vemos que $-t \in I_{\alpha_t(p)}$ y además $\alpha_{-t} \circ \alpha_t(p) = \alpha_0(p) = p$. Entonces: si $q \in \alpha_t(D_t)$, tenemos que $q = \alpha_t(p)$ con $t \in I_p$ y como $-t \in I_q$ vemos que $q \in D_{-t}$. Recíprocamente, si $q \in D_{-t}$ entonces $-t \in I_q$ y por lo ya probado $I_{\alpha_{-t}(q)} = I_q + t$ luego $t \in I_{\alpha_{-t}(q)}$. Esto nos dice que

$\alpha_{-t}(q) \in D_t$ y además que $q = \alpha_t(\alpha_{-t}(q)) \in \alpha_t(D_t)$. Luego los conjuntos coinciden y de ahí ver que $\alpha_{-t} = \alpha_t^{-1}$ es inmediato por todo lo dicho.

Fijemos $p_0 \in M$, $t \in I_{p_0}$ entonces $p_0 \in D_t$ y en particular este es abierto y no vacío; tomamos $U_0 = D_t$ y este cumple todo lo requerido (el entorno de $\alpha_t(p_0)$ es D_t). □

2.5.2. Campos f-relacionados

Sean $f : M \to N$ diferenciable, $X : M \to TM$, $Y : N \to TN$ campos. Supongamos que para cada $p \in M$, se tiene

$$f_{*p}(X(p)) = Y(f(p)).$$

En ese caso diremos que X, Y están f-*relacionados* y lo anotamos $Y = f_*X$. Si f es un difeomorfismo y X es un campo en M, entonces podemos definir

$$f_*X := f_* \circ X \circ f^{-1}$$

que resulta un campo en N, y de hecho X, f_*X están f-relacionados. Más en particular y si f es suave e inyectiva en $U \subset M$, dado $X \in \mathfrak{X}(U)$ podemos definir $f_*X \in \mathfrak{X}(f(U))$ como

$$f_*X(f(p)) = Df_p(X_p).$$

Observación 2.5.8 (Campo tangente a una subvariedad). Un caso importante de campos f-relacionados es cuando f es una inmersión, es decir cuando $f = i$ es la inclusión de una subvariedad inmersa. Si un campo X en M está i-relacionado con un campo en N es porque proviene de un campo en N (esto lo dejamos como ejercicio), que denotaremos $X|_N$. El flujo α del campo original X en puntos de N es el flujo ρ del campo $X|_N$ en N, así que para cada $p \in N$ hay un pequeño intervalo tal que los flujos coinciden, y en particular el flujo α_t de X preserva la subvariedad para t pequeño. Esta restricción de dominio es importante porque las curvas pueden salirse eventualmente de N. El siguiente ejemplo muestra como el dominio del campo restringido puede ser mucho más chico que el del campo original.

Ejemplo 2.5.9. Sea $N = (-\infty, 0) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, es claro que N es subvariedad embebida de $M = \mathbb{R}^2$. Sea $X(p) = E_1 = (1, 0)$, el campo canónico, su flujo en $\mathbb{R}^2$ es $\alpha(t, p) = p + t(0, 1)$. Vemos que $D(X) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times M$. Por otro lado es claro que este flujo no preserva N, por ejemplo si $p = (-1, 0) \in N$ entonces α_p se sale de N para $t \geq 1$. Sin embargo, podemos considerar el campo restringido $X|_N$, que es claramente un campo en N, ahora su flujo tiene la misma fórmula restringida es decir $\rho_t(p) = (p_1, 0) + t(1, 0) = (p_1 + t, 0)$ para $p_1 < 0$, pero su dominio ahora es

$$D(X|_N) = \{(t; (p_1, 0)) : t < -p_1\}$$

que no es todo $\mathbb{R} \times N$ (es un cono alrededor del eje negativo de las x).

2.5.3. Derivaciones

Es útil pensar que todo campo $X : M \to TM$ define una derivación $C^k(M) \to C^{k-1}(M)$ de la siguiente manera: si $f \in C^k(M)$ -es decir, si $f : M \to \mathbb{R}$ es C^k-, e identificamos $T_p\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}$ como es habitual, ponemos

$$(Xf)(p) = f_{*p}(X(p)) \in \mathbb{R}$$

Es decir, pasando a una carta $Xf(p)$ es simplemente la derivada direccional de f en el punto p en la dirección del vector X_p.

Que esto manda funciones C^k en C^{k-1} es evidente, la linealidad y la propiedad de derivación

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

se deducen pasando por una carta. Una propiedad relevante de esta acción es la siguiente: si $U \subset M$ es abierto y $X : U \to TU$ es campo C^k con $X \neq 0$ (o sea X no es idénticamente nulo), entonces existe $f \in C^k(U)$ tal que $X(f) \neq 0$. Esto queda como ejercicio. Se deduce de esta propiedad que un campo *queda definido si se lo piensa como derivación.*

2.6. El corchete de Lie

Dada M variedad C^{k+1} y $X, Y : M \to TM$ campos C^k, estos permiten definir un nuevo campo $[X, Y]$, de clase C^{k-1}, con las siguientes propiedades:

- $[X, Y] = -[Y, X]$
- $[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (identidad de Jacobi).

El corchete $[X, Y]$ tiene el sentido de derivada direccional de Y a lo largo de X -o al revés, salvo un signo-. Uno estaría tentado de definir la derivada direccional de Y a lo largo de X como

$$p \mapsto (Y_{*p})(X_p)$$

pero observemos que $Y : M \to TM$, entonces $Y_{*p} : T_pM \to T_{Y(p)}TM$, con lo cual $Y_{*p}(X_p)$ no es un vector tangente en $p \in M$.

El corchete de Lie de campos en la esfera

Este problema que parece puramente formal, se entiende mejor cuando uno piensa en subvariedades de un espacio de Banach. Empecemos con un ejemplo concreto, a saber la esfera unitaria S de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Un campo $S \to TS$ lo podemos

identificar claramente con una función $X : S \to \mathcal{H}$ con la condición adicional de que $X_p \in T_pS$ para todo $p \in S$, es decir

$$\langle X_p, p\rangle = 0$$

para todo $p \in S$. Si componemos con una carta $\Phi : W \subset E \to \mathcal{H}$, donde $E \simeq \mathcal{H}/\mathbb{R}$ es el espacio de Hilbert que modela S, tenemos la identidad

$$\langle X_{\Phi(x)}, \Phi(x)\rangle = 0$$

para todo $x \in W$. Supondremos sin pérdida de generalidad que $0 \in W$, $\Phi(0) = p \in S$. Tomemos una curva $\beta \subset W$ tal que $\beta(0) = 0$ de manera de obtener una curva $\alpha = \Phi \circ \beta \subset S$ que pasa por p, y reemplazando x por β, derivamos en $t = 0$ para obtener (suponiendo que $\dot\alpha(0) = v \in T_pS$)

$$\langle DX_p v, p\rangle + \langle X_p, v\rangle = 0. \tag{2.4}$$

En particular, si tomamos $v = X_p \in T_pS$, se deduce que

$$\langle DX_pX_p, p\rangle = -\|X_p\|^2.$$

¡Pero entonces, si suponemos que $DX_pX_p \in T_pS = span(p)^\perp$, obtenemos que $X_p = 0$! Es decir que $X_{*p}X_p$ no es en general un elemento en T_pM y por eso no tiene sentido pensarlo como derivada direccional.

Para aclarar un poco más lo que acabamos de decir, volvamos a la relación (2.4), y ahora consideremos otro campo cualquiera $Y : S \to TS$. ¿Qué tiene que ocurrir para que

$$X_{*p}(Y_p) = DX_p(Y_p)$$

sea un elemento en T_pS? Reemplazando v por Y_p obtenemos

$$\langle X_p, Y_p\rangle = -\langle DX_pY_p, p\rangle = 0$$

con lo cual X_p debe ser ortogonal a Y_p que es el caso trivial que no tiene ningún interés. Es decir que en general $X_{*p}(Y_p)$ no es un elemento de T_pM.

Pero las cuentas que acabamos de hacer nos dan una pista: observemos la simetría de la ecuación

$$\langle X_p, Y_p\rangle + \langle DX_pY_p, p\rangle = 0.$$

Si intercambiamos X_p por Y_p y restamos (ahora sólo suponemos que X, Y son campos en S), se cancelan los productos escalares y obtenemos

$$\langle DY_pX_p - DX_pY_p, p\rangle = 0,$$

relación que nos dice que el vector

$$DY_pX_p - DX_pY_p$$

si es un vector tangente a la esfera en p. Esto nos permite obtener un campo $[X, Y] : S \to TS$ a partir de dos campos cualesquiera, que definiremos como

$$[X, Y](p) := DY_p X_p - DX_p Y_p$$

para $p \in S$.

2.6.1. El corchete de Lie en superficies de nivel

El hecho de que $DY_p X_p - DX_p Y_p \in T_p S$ para cada $p \in S$ no es fortuito, es decir, no guarda relación con la estructura de la esfera. Por ejemplo, si

$$M = \{v \in F : H(v) = 0\}$$

es la superficie de nivel de una función $H : F \to G$ suficientemente suave, dijimos que $T_p M$ se identifica con $\ker DH_p$ para $p \in M$. Luego si $X : M \to TM$ es un campo, lo podemos identificar con una función $X : M \to F$ con la condición adicional de que

$$DH_p(X_p) = 0$$

para todo $p \in M$. Supongamos que $p \subset M$ es una curva con $p_0 = p$ y $\dot{p}_0 = v \in T_p M$. Diferenciando esta relación obtenemos

$$D^2 H_p(v, X_p) + DH_p\,(DX_p v) = 0.$$

Dado otro campo cualquiera Y, como $Y_p \in T_p M$ podemos reemplazar para obtener

$$D^2 H_p(Y_p, X_p) + DH_p\,(DX_p Y_p) = 0 \tag{2.5}$$

para todo $p \in M$. Pero si suponemos que $DX_p Y_p \in T_p M$, entonces el segundo término se anula con lo cual debe guardarse la relación particular

$$D^2 H_p(X_p, Y_p) = 0$$

que como vimos en el ejemplo anterior es arbitraria, con lo cual $DX_p Y_p$ *no es un elemento de* $T_p M$ en general. Sin embargo, apelando nuevamente a la simetría -y como $D^2 H_p$ es simétrica si existe-, intercambiando X con Y en la ecuación (2.5) y restando, se obtiene

$$DH_p\,(DY_p X_p - DX_p Y_p) = 0$$

lo que nos indica que

$$[X, Y](p) := DY_p X_p - DX_p Y_p \in T_p M.$$

2.6.2. Derivada de Lie

Volviendo al caso general, la expresión recién computada nos da la definición de $[X,Y]$: se construye $[X,Y]$ por medio de una carta sus representantes en una carta (U,φ). Explícitamente: si $\tilde{Y},\tilde{X}$ son las expresiones locales en la carta, esto es $\tilde{X}(\varphi(p)) = pr_2\varphi_{*p}X(p)$ y lo mismo con Y, entonces definimos

$$[X,Y](p) = \varphi_{*p}^{-1}(D\tilde{Y}_{\varphi(p)}(\tilde{X}_{\varphi(p)}) - D\tilde{X}_{\varphi(p)}(\tilde{Y}_{\varphi(p)}). \tag{2.6}$$

Observación 2.6.1. Veamos que esta cuenta no depende de la carta. Para eso vamos a pensar al corchete $[X,Y]$ como derivada de Lie de Y en la dirección de X. Si α denota el flujo del campo X de clase C^k, observemos que fijado $p \in M$, $\alpha_t : U \to V$ es un difeomorfismo para t suficientemente pequeño y U,V abiertos de M con U entorno de p. En consecuencia $(\alpha_{-t})_{*q} : T_qM \to T_{\alpha(-t,q)}M$ es de clase C^{k-1} y tiene sentido calcular

$$g(t) = (\alpha_{-t})_*Y(\alpha_t(p)) \in T_pM$$

para t suficientemente pequeño. Esto es, evaluamos Y a lo largo de las trayectorias del campo X, luego lo traemos hacia atrás para que vuelva a ser un vector de T_pM. Observemos que $g(0) = Y_p = Y(p)$, y que por construcción para t pequeño $g(t) \in T_pM$. Su derivada en $t = 0$ (que corresponde a pasar por el punto p con las trayectorias del campo X) será entonces un vector de T_pM, que denotaremos así:

$$\mathcal{L}_XY(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\alpha_{-t})_*Y(\alpha_t(p)).$$

Lema 2.6.2. *Para todo par de campos X,Y se verifica $\mathcal{L}_XY = [X,Y]$.*

Demostración. Pasando a coordenadas locales, operaremos en el espacio normado E que modela M. Sea (U,φ) carta de M, sean $\tilde{X},\tilde{Y}$ dichos campos en E, sea ρ el flujo de $\tilde{X}$. Por lo discutido anteriormente en esta seccion $\rho = \varphi\circ\alpha$, luego $\rho(t,\varphi(p)) = \varphi\alpha(t,p)$. Derivando respecto de p vemos que $\varphi_{*\alpha_t(p)}(\alpha_t)_{*p} = (\rho_t)_{*\varphi(p)}\varphi_{*p}$, luego

$$(\alpha_t)_{*p}^{-1}\varphi_{*\alpha_t(p)} = \varphi_{*p}^{-1}(\rho_t)_{*\varphi(p)}^{-1}.$$

Entonces

$$g(t) = (\alpha_t)_{*p}^{-1}\varphi_{*\alpha_t(p)}^{-1}\varphi_{*\alpha_t(p)}Y(\alpha_t(p)) = \varphi_{*p}^{-1}(\rho_t)_{*\varphi(p)}^{-1}\tilde{Y}_{\rho_t(p)} = \varphi_{*p}^{-1}f(t).$$

Como $g'(0) = \varphi_{*p}^{-1}f'(0)$, basta calcular la derivada en $t = 0$ de f, que es la expresión local g. Omitiremos las tildes en los campos X,Y para no sobrecargar la notación, ahora estos son los campos en E y el flujo de X es ρ. Escribimos $z = \varphi(p)$ y tenemos

$$(\rho_t)_{*z}^{-1}Y_{\rho_t(z)} = A_tv_t,$$

donde $A_t = (D_z\rho_t)^{-1}$ es un operador lineal inversible de E en E, mientras que $v_t = Y_{\rho_t(z)}$ es un vector de E. Recordemos que la inversión es suave y que si T_t es una curva de operadores inversibles, entonces $(T_t^{-1})' = -T_t^{-1}T_t'T_t^{-1}$. Notemos que $A_0 = \mathrm{Id}_E$ ya que $\rho_0 = \mathrm{id}$ y que $v_0 = Y(z)$. Entonces

$$A_0' = \frac{d}{dt}|_{t=0}(D_z\rho_t)^{-1} = -A_0\frac{d}{dt}|_{t=0}(D_z\rho_t)A_0 = -\frac{d}{dt}|_{t=0}D_z\rho_t.$$

Por otro lado, como ρ_t es el flujo de X, tenemos que $\rho_0'(z) = X(z)$, luego

$$\frac{d}{dt}\big|_{t=0}D_z\rho_t = D_z\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\rho_t = D_zX = DX_z.$$

Entonces $A_0' = -\frac{d}{dt}\big|_{t=0}D_z\rho_t = -DX_z$, puesto que $\rho_0 = \mathrm{id}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big|_{t=0}A_t(p)v_t(p) &= A_0'(p)v_0(p) + A_0(p)v_0'(p) = -DX_zY_z + DY_zX_z\\ &= -DX_{\varphi(p)}Y_{\varphi(p)} + DY_{\varphi(p)}X_{\varphi(p)}\end{aligned}$$

puesto que ρ_t es el flujo de X. Si recordamos que en realidad estos son los campos con la tilde, vemos por la ecuación (2.6) que define el corchete, que $g'(0) = \varphi_{*p}^{-1}f'(0) = [X,Y](p)$. □

Observación 2.6.3. Además de representar una derivada direccional, el corchete de Lie de dos campos es una medida de conmutación, como tal vez puede apreciarse en la última presentación usando flujos. De hecho, hay varios resultados en esta dirección, mencionamos algunos. Sean X, Y campos en M; ahora α, β denotan los respectivos flujos.

- Dado X, Y campos, puede verse que $f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))$ define una derivación, que se puede identificar con el corchete de Lie $[X,Y]$ de los campos.
- Se tiene $[X,Y] = 0$ si y sólo si los flujos conmutan, es decir

  $$\alpha(t, \beta(s,p)) = \beta(s, \alpha(t,p))$$

  y donde existe una expresión, existe la otra y son iguales (queda como ejercicio).
- Sean $X_1, \ldots, X_d$ campos l.i. en un abierto U de M, con $d = \dim(M)$. Entonces los corchetes son nulos $[X_i, X_j] = 0$ en U si y sólo si existe una carta (U, φ) de M tal que $X_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial\varphi^i}$. Si existe una carta es un ejercicio directo ver que los corchetes de los ganchos son nulos; el teorema de Frobenius nos dice que esa condición es suficiente para la existencia de una carta.

- Si G es un grupo de Lie conexo y $[X, Y] = 0$ para todo X, Y campos invariantes a izquierda entonces G es un grupo conmutativo (lo veremos en la próxima unidad sobre grupos de Lie).

Lema 2.6.4 (Push forward del corchete de Lie). *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ y sea $f : U \to M$ de clase C^2 e inyectiva; supongamos que f_*X, f_*Y están f-relacionados con X, Y respectivamente en $f(U)$. Entonces $[f_*X, f_*Y]$ está f-relacionado con $[X, Y]$.*

Demostración. Si ϕ_t es el flujo de X entonces $f_*Y(f(\phi_t(p))) = Df_{\phi_t(p)}Y_{\phi_t(p)}$ luego derivando en $t = 0$ tenemos

$$D(f_*Y)_{f(p)}(f_*X)_{f(p)} = D(f_*Y)_{f(p)}Df_pX_p = D^2f_p(X_p, Y_p) + Df_pDY_pX_p.$$

Con un razonamiento análogo para el flujo de Y obtenemos

$$D(f_*X)_{f(p)}(f_*Y)_{f(p)} = D^2f_p(Y_p, X_p) + Df_pDX_pY_p.$$

Restando ambas expresiones y usando la ecuación (2.6), obtenemos

$$\begin{aligned}[f_*X, f_*Y](f(p)) &= D(f_*Y)_{f(p)}(f_*X)_{f(p)} - D(f_*X)_{f(p)}(f_*Y)_{f(p)} \\ &= Df_pDY_pX_p - Df_pDX_pY_p = Df_p([X, Y](p)) = f_*[X, Y](f(p)).\end{aligned}$$

□

Corolario 2.6.5. *Si $N \subset M$ es subvariedad inmersa, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ son tangentes a N, entonces $[X, Y]$ es tangente a N.*

Si $E \subset TM$ es un subfibrado, decimos que E es *integrable* si existe una subvariedad inmersa $N \subset M$ tal que $TN = E$. Decimos que $X \in \mathfrak{X}(M)$ es *un campo en* E si la imagen de X está contenida en E.

Teorema 2.6.6 (Frobenius). *El subfibrado $E \subset TM$ es integrable si y solo si $[X, Y] \in E$ para todo par de campos X, Y en E.*

Demostración. Por ahora, ver el Capítulo VI del libro de Lang [58] para una prueba del teorema de Frobenius. □

Observemos que el teorema de Frobenius es una generalización a dimensiones mayores del teorema de existencia de curvas integrales. La topología de N puede ser más fina que la de M, como puede observarse en nuestro inseparable ejemplo de la curva densa en el toro.

2.A. Problemas

2.I. Probar que si α es irracional, entonces la imagen W de

$$\mu(t) = (e^{i\pi t}, e^{i\alpha\pi t}) \subset S^1 \times S^1$$

es densa en el toro $S^1 \times S^1$. Elegir una base conveniente de la topología del toro y calcular la intersección entre W y un elemento cualquiera de la base para probar que esta intersección tiene infinitas componentes conexas.

2.II. Probar el criterio para subvariedades de la Proposición 2.4.8.

2.III. Probar que si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, entonces $\mathcal{H}$ es difeomorfo (con un difeomorfismo de clase C^∞) a la bola unitaria

$$B = \{v \in \mathcal{H} : \|v\| < 1\}.$$

Sugerencia: considere $g(x) = x(1 - \|x\|^2)^{-1/2}$. ¿Es esta aplicación analítica?

2.IV. Sean $X, Y : M \to TM$ campos y α, β sus respectivos flujos. Probar que si $[X, Y] = 0$, entonces los flujos conmutan,

$$\alpha(t, \beta(s, p)) = \beta(s, \alpha(t, p))$$

en el siguiente sentido: donde existe una expresión existe la otra y son iguales.

2.V. Si $f, g, h \in C^k(M)$ y $X, Y, Z : M \to TM$ son campos de clase C^1, probar que

- $X(fg) = X(f)g + fX(g)$
- $[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$
- $[X, [Y, Z]] = [Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]]$.

donde $X(h)(p) = pr_2 \circ h_{*p}(X(p))$ para $h \in C^k(M)$ y $p \in M$.

2.VI. Probar la Proposición 2.5.7.

2.VII. Si $f : M \to N$ es un difeomorfismo y $f_*X := f_* \circ X \circ f^{-1}$, probar que $X : M \to TM$ y $f_*X : N \to TN$ están f-relacionados. Si X_i, Y_i $(i = 1, 2)$ están f-relacionados, con $X_i : M \to TM$ e $Y_i : N \to TN$, probar que

$$f_*[X_1, X_2] = [f_*X_1, f_*X_2]$$

y concluir que $[X_1, X_2]$ está f-relacionado con $[Y_1, Y_2]$.

2.VIII. Sea $f : M \to N$ una inmersión inyectiva. Si $Y : N \to TN$ es un campo tal que $Y_{f(x)} \in \mathrm{ran}(f_{*x})$ para todo $x \in M$, probar que existe un único campo $X : M \to TM$ tal que $f_*X = Y$.

Capítulo 3

Grupos de Lie

> Ojalá supiera cómo hacer que los matemáticos se interesen en los grupos de transformaciones y sus aplicaciones a las ecuaciones differenciales. Estoy seguro, absolutamente seguro, de que estas teorías serán, en algún momento futuro, reconocidas como fundamentales.
>
> Sophus Lie, en una carta dirigida a Adolf Mayer

Definimos un grupo de Lie-Banach G como una variedad diferenciable de clase C^2 modelada por un espacio de Banach, tal que las operaciones producto e inversa son también de clase C^2; esto se puede resumir diciendo que la función $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ es C^2 como función de $G \times G$ en G. Como veremos en este capítulo (Sección 3.1.7), todo grupo de Lie es en realidad una variedad de clase C^ω (analítica real).

Pidiendo que el producto sea C^2, se puede deducir que la inversión es C^2, ver el problema 3.II de este capítulo.

Mencionamos al pasar que si M es una variedad diferenciable cualquiera, y $\mathrm{Diff}(M)$ denota el grupo de difeomorfismos de M con la composición como la operación del grupo, este espacio no admite en general una estructura de grupo de Lie-Banach, incluso en un caso tan "sencillo" como cuando $M = S^1$.

3.1. Teoría general

Usaremos $\ell_g : G \to G$, $r_g : G \to G$, $c_g : G \to G$ para denotar los difeomorfismos

$$\ell_g : h \mapsto gh, \qquad r_g : h \mapsto hg, \qquad c_g : h \mapsto ghg^{-1}.$$

A las diferenciales de estas aplicaciones las denotamos $L_g, R_g, \mathrm{Ad}_g : TG \to TG$, aunque se suele reservar Ad_g para la diferencial de c_g en $h = 1$, y así $\mathrm{Ad}_g : T_1G \to T_1G$, se denomina *isomorfismo adjunto* o *representación adjunta*. Observemos que por la regla de la cadena, para las diferenciales se verifica

$$L_{hg} = L_h L_g, \quad R_{hg} = R_g R_h,$$

y además que como ℓ, r conmutan lo mismo ocurre con sus diferenciales:

$$L_g R_h = R_h L_g \qquad \forall\, g, h \in G.$$

Como L_g es un isomorfismo (en particular $L_g|_{T_1G}$ lo es), hay una identificación natural entre T_gG y L_gT_1G, que usaremos repetidamente (también hay una identificación con R_gT_1G que puede usarse). También se conveniente omitir el símbolo L en ocasiones y escribir directamente

$$L_g v = gv$$

ya que aunque es un abuso de notación, no conlleva a contradicciones ni mayores problemas de interpretación.

Observación 3.1.1 (Regularidad de los morfismos). Si $f : G \to H$ es un morfismo de grupos de Lie (diferenciable), y G, H son de clase C^k, entonces f es de clase C^{k-1}. Para probarlo, tomamos una curva diferenciable g_t diferenciable por la identidad de g. Se tiene $f(gg_t) = f(g)f(g_t)$, y derivando en $t = 0$ vemos que

$$f_{*g} L_g \dot{g} = L_{f(g)} f_{*1} \dot{g}$$

y entonces $f_{*g} = L_{f(g)} f_{*1} L_{g^{-1}}$. Como el lado derecho es diferenciable (pues f lo es y también lo son las operaciones en los grupos) vemos que $g \mapsto f_{*g}$ es diferenciable, en particular es continua. Luego f es de clase C^1. Ahora vemos, repitiendo el argumento, que f es en realidad tan regular como lo sean los grupos. Como veremos luego, los grupos de Lie siempre son de clase C^ω, luego todo morfismo diferenciable entre grupos de Lie es en realidad de clase C^ω.

Denotemos $m : G \times G \to G$ al producto del grupo $m(g, h) = gh$, y con $I : G \to G$ a la inversa $I(g) = g^{-1}$. Puede probarse (y lo dejamos para el lector) que (TG, m_*, I_*) es un grupo de Lie si G lo era.

Lema 3.1.2 (Derivadas del producto y la inversa). *Sean* $g, h \in G$, *sean* $\dot{g} = L_g x \in T_g G$, $\dot{h} = L_h y \in T_h G$. *Entonces para el producto se tiene*

$$m_{*(g,h)}(\dot{g}, \dot{h}) = R_h \dot{g} + L_g \dot{h}$$

o equivalentemente

$$m_{*(g,h)}(L_g x, L_h y) = L_g(R_h x + L_h y).$$

Además para la inversa se tiene

$$I_{*g}\dot{g} = -L_{g^{-1}} R_{g^{-1}} \dot{g}.$$

Demostración. Sea g_t curva en G con $g_0 = g$ y derivamos $m(g_t, h) = g_t h = r_h g_t$ en $t = 0$ para obtener $m_{*(g,h)}(\dot{g}, 0) = R_h \dot{g}$. Si h_s es otra curva con $h_0 = h$, derivando $m(g, h_s) = g h_s = \ell_g h_s$ en $s = 0$ obtenemos $m_{*(g,h)}(0, \dot{h}) = L_g \dot{h}$. Como $m_{*(g,h)}$ es un operador lineal

$$m_{*(g,h)}(\dot{g}, \dot{h}) = m_{*(g,h)}(\dot{g}, 0) + m_{*(g,h)}(0, \dot{h}) = R_h \dot{g} + L_g \dot{h}$$

y esto prueba las afirmaciones sobre el producto. Ahora escribimos $m(g, I(g)) = g g^{-1} = 1$ para la curva g_t, y derivando en $t = 0$ obtenemos

$$0 = m_{*(g,I(g))} = L_g (I(g))^{\cdot} + R_{I(g)} \dot{g}$$

por lo recién demostrado. Como $I(g)^{\cdot} = I_{*g}\dot{g}$, despejando esto de la ecuación anterior se tiene la prueba de la afirmación sobre la inversa. □

En particular $m_{*(1,1)}(x, y) = x + y$, y también $I_{*1} x = -x$, y de hecho trasladando el producto al origen vemos que en general

$$L_{g^{-1}} R_{h^{-1}} m_{*(g,h)}(L_g x, L_h y) = x + Ad_h y.$$

3.1.1. Campos invariantes

Si $v \in T_1 G$, consideremos dado la función suave

$$g \mapsto X_v(g) = L_g v = (\ell_g)_{*1} v,$$

que de hecho define un campo en G. Este campo tiene la siguiente propiedad:

$$L_g X_v(h) = (\ell_g)_{*h}(\ell_h)_{*1} v = (\ell_{gh})_{*1} v = X_v(gh) = X_v \circ \ell_g(h) \tag{3.1}$$

es decir $L_g X_v = X_v \ell_g$ para todo $g \in G$. Un campo con esta propiedad es un campo *invariante a izquierda* en G, y el conjunto de los campos invariantes a izquierda se

identifica con T_eG mediante la construcción recién mencionada y su inversa, la cual está dada, para cualquier campo $X : G \to TG$ invariante a izquierda, por

$$X \mapsto X(1).$$

De la misma propiedad de invariancia a izquierda y las definiciones, vemos que X_v está ℓ_g-relacionado consigo mismo para cada $g \in G$.

Proposición 3.1.3. *Si $X, Y : G \to TG$ son campos invariantes a izquierda, entonces el campo $[X, Y] : G \to TG$ también es invariante a izquierda.*

Demostración. Como X, Y están ℓ_g-relacionados consigo mismo, lo mismo ocurre con el corchete de Lie $[X, Y]$ por el Lema 2.6.4, y esto por definición es equivalente a que $[X, Y]$ sea invariante a izquierda. □

El *álgebra de Lie-Banach* $\mathfrak{g}$ del grupo de Lie-Banach G es el espacio tangente T_eG en la identidad provisto de la estructura de Lie dada por los campos invariantes a izquierda, esto es, si $v, w \in T_1G \simeq E$, entonces

$$[v, w] := [X_v, X_w](1).$$

En general, se puede definir un álgebra de Lie-Banach $\mathfrak{g}$ como un espacio de Banach (real o complejo), provisto de un operador denominado *corchete*, $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que es bilineal, antisimétrico y verifica la identidad de Jacobi para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0,$$

propiedad que se puede recordar teniendo en cuenta que un término se obtiene del anterior desplazando los elementos a la izquierda, de manera cícilica.

3.1.2. Grupos a un parámetro y exponencial

Si G es C^2, los campos invariantes X_v son de clase C^1, y entonces su flujo $\alpha_v(s, g)$ es único y de clase C^1. Sea $\phi_v : I_v \to G$ la función $\phi_v(t) = \alpha_v(t, 1)$, donde I_v es el intervalo maximal donde está definida la curva del flujo del campo $\alpha_v(s, 1)$ que pasa por la identidad del grupo. No es difícil ver que ϕ_v es un homomorfismo de I_v en G, es decir, si $s, t, s + t \in I_v$, entonces

$$\phi_v(s + t) = \phi_v(s)\phi_v(t) = \phi_v(t)\phi_v(s).$$

Para probarlo, basta ver que ambos lados son solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d}{ds}\mu_t(s) = X_v(\mu_t(s)),$$

lo cual es sencillo usando la definición de todos los objetos (Problema 3.IV).

Para reducir la notación, denotaremos ϕ_t al flujo $\phi_\nu(t)$, sea $J \subset I_\nu$ intervalo maximal simétrico donde ϕ_t está definido. Si $t \in J$ y $s > 0$ es pequeño, entonces $-t, t+s \in I_\nu$. Entonces

$$c_{\phi_t}\phi_s = \phi_t\phi_s\phi_t^{-1} = \phi_{t+s}\phi_{-t} = \phi_{t+s-t} = \phi_s.$$

Derivando en $s = 0$ vemos que $\mathrm{Ad}_{\phi_t}\nu = \nu$ para todo $t \in J$. Luego $R_{\phi_t}\nu = L_{\phi_t}\nu$ para todo $t \in J$.

Lema 3.1.4. *Para cada $\nu \in T_1G$, se tiene $\mathrm{Dom}(\phi_\nu) = \mathbb{R}$.*

Demostración. Supongamos que el dominio no es todo $\mathbb{R}$, sea $J = (-t_0, t_0) \subset I_\nu$ intervalo maximal simétrico donde está definido el flujo con $0 < t_0 < \infty$, afirmamos que $\mu(t) = \phi_\nu(t/2)^2$, definida en $2J$ es el flujo de X_ν, y esto nos daría una contradicción. Es claro que $\mu(0) = 1$ y que μ es suave. Por otro lado, $\mu(t) = m(\phi(t/2), \phi(t/2))$ y por la regla de derivación del producto vemos que

$$\begin{aligned}\mu'(t) &= R_{\phi(t/2)}\frac{1}{2}L_{\phi(t/2)}\nu + L_{\phi(t/2)}L_{\phi(t/2)}\frac{1}{2}\nu \\ &= L_{\phi(t/2)}L_{\phi(t/2)}\nu = L_{\phi(t/2)\phi(t/2)}\nu = L_{\mu(t)}\nu,\end{aligned}$$

por la observación previa y el hecho de que $t/2 \in J$. Esto prueba que μ es el flujo de X^ν, y así debe ser $\mathrm{Dom}(\phi_\nu) = \mathbb{R}$. □

Estas curvas ϕ_ν son conocidas como *grupos a un parámetro* en G; observemos que $\phi_\nu(0) = 1$ mientras que $\dot{\phi}_\nu(0) = \nu \in T_eG = \mathfrak{g}$. De aquí en más las denotaremos $\phi_\nu(t) = e^{t\nu}$ por obvios motivos. Si queremos el flujo por cualquier $g \in G$, tenemos las curvas a un parámetro definidas en todo $\mathbb{R}$ dadas por

$$\alpha_{g,\nu} : t \mapsto g\phi_\nu(t) = ge^{t\nu}$$

que verifican $\alpha_{g,\nu}(0) = g$, $\dot{\alpha}_{g,\nu}(0) = L_g\nu \in T_gG \simeq L_gT_eG$.

Observación 3.1.5 (Campos invariantes a derecha). ¿Qué ocurre si tomamos campos invariantes a derecha, es decir

$$X^R_\nu(g) := (r_g)_{*1}\nu = R_g\nu = \nu g$$

para $\nu \in T_eG$ y $g \in G$? Podemos volver a considerar el problema del flujo de estos campos, y afirmamos que las soluciones ahora serán las curvas $e^{t\nu}g$. Esto es porque como $L_{\phi_t}\nu = R_{\phi_t}\nu$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces $\phi_t = e^{t\nu}$ también es el flujo por la identidad del campo invariante a derecha. Y luego derivando $\mu_t = r_g\phi_t = e^{t\nu}g$ vemos que

$$\mu' = R_gR_\phi\nu = R_{\phi g}\nu = R_\mu\nu$$

así que μ es el flujo por g del campos invariante a derecha.

3.1.2.1. La exponencial del grupo

Definimos la *exponencial del grupo de Lie* G como la aplicación $\exp : \mathfrak{g} \to G$ que asigna

$$v \mapsto e^{1v}.$$

Observemos que $\exp(tv) = e^{tv}$ es el grupo a un parámetro, solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \alpha' = X_v(\alpha) \\ \alpha(0) = e \end{cases}.$$

También observemos que, como el flujo de los campos invariantes es suave, la función exp es diferenciable. Además, como

$$\exp_{*0}(v) = (e^{tv})^{\cdot} = X_v(e) = v,$$

se deduce que $\exp_{*0}$ es la identidad de $\mathfrak{g}$. Asumiendo que G es un grupo de clase de C^1 por lo menos, se deduce que para algún entorno abierto V de $0 \in \mathfrak{g}$, la restricción

$$\exp|_V : V \subset \mathfrak{g} \to \exp(V) \subset G \tag{3.2}$$

es un difeomorfismo, de clase C^{k-1} si G era C^k.

Veamos que esto nos permite formar un atlas canónico para G, el atlas exponencial. Antes observemos que por la continuidad de la multiplicación, dado un abierto W entorno de 1, podemos hallar otro abierto U más pequeño tal que $U^3 = \{xyz : x \in U\} \subset W$. En efecto, basta tomar la preimagen de W por M, tomar un entorno $Z \times Z$ dentro, tomar la preimagen de Z por m y allí dentro tomar un entorno $U \times U$. Este U es abierto alrededor de 1 y verifica $U^4 = m(m(U,U), m(U,U)) \subset m(Z,Z) \subset W$. Como $1 \in U$, en realidad tenemos $U \subset U^2 \subset U^3 \subset U^4 \subset W$. Por otro lado, tomando $U \cap U^{-1}$ podemos suponer que $U = U^{-1}$.

Teorema 3.1.6. *Sea G de clase C^k con $k \geq 2$, sea U entorno de 1 tal que $U^{-1} = U$ y $U^3 \subset \exp(V)$ con V como en (3.2). Para cada $g \in G$, consideramos la carta (gU, φ_g) dada por $\varphi_g(gu) = \varphi_g(ge^z) = z$. Este sistema de cartas forma un atlas compatible para G, de clase C^{k-1}.*

Demostración. Sea $Z = \exp^{-1}(U)$, sea $z \in Z$, notemos que todas las cartan llegan a Z. Si $g_1U \cap g_2U \neq \emptyset$ entonces $g_1u_1 = g_2u_2$ para $u_i \in U$. Tenemos que $g_2^{-1}g_1 = u_2u_1^{-1} \in U^2$ y además $g_1^{-1}g_2e^z \in U^3 \subset \exp V$, luego $z \mapsto \exp^{-1}(g_1^{-1}g_2e^z)$ es C^{k-1}. Ahora bien como $g_2e^z \in g_2U \cap g_1U$, tenemos $g_2e^z = g_1e^w$ con $w \in Z$. Luego

$$\varphi_{g_1}\varphi_{g_2}^{-1}(z) = \varphi_{g_1}(g_2e^z) = w = \exp^{-1}(g_1^{-1}g_2e^z)$$

y esto prueba que los mapas de transición son de clase C^{k-1}. □

Veremos luego que este atlas en realidad es también de clase C^k (reduciendo U), y de hecho tanto G como el atlas exponencial son analíticos.

3.1.3. La representación adjunta y morfismos

Dados $v, w \in \mathfrak{g}$, si tomamos X_v, X_w los correspondientes campos invariantes a izquierda y e^{tv}, e^{tw} los respectivos grupos a un parámetro por la identidad de G, podemos calcular

$$g : t \mapsto \mathrm{Ad}_{e^{tv}}(w) = e^{tv} w e^{-tv}.$$

Observemos que g es una función a valores en $\mathfrak{g} = T_e G$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego su derivada en $t = 0$ será un elemento de $\mathfrak{g}$, y no es difícil ver por medio de la definición de derivada de Lie de campos, que $\dot{g}(0) = [v, w] = [X_v, X_w](1)$ (Ejercicio 3.v).

Dado un espacio de Banach E, denotaremos con $\mathrm{GL}(E) \subset \mathcal{B}(E)$ a los operadores inversibles de E en E. Sea $\mathrm{Ad} : G \mapsto \mathcal{B}(\mathfrak{g})$ la aplicación que asigna a cada g el operador lineal

$$\mathrm{Ad}_g = (\ell_g)_{*e}(r_{g^{-1}})_{*e} = L_g R_{g^{-1}} = L_g R_g^{-1}.$$

Como $\mathrm{Ad}_g^{-1} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}$, vemos que la imagen de Ad está dentro del grupo de operadores inversibles de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$, denotado $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. Como este último es un abierto del álgebra de Banach $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$, y el producto y la inversa allí son operaciones analíticas (Ejemplo 1.6.8), entonces $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ es un grupo de Lie-Banach. No es difícil probar que la exponencial de este grupo está dada por la serie de potencias

$$T \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} T^n.$$

Teorema 3.1.7. *Si G es grupo de Lie-Banach, entonces* $\mathrm{Ad} : G \mapsto \mathcal{B}(\mathfrak{g})$ *es un morfismo de grupos de Lie-Banach suave.*

Demostración. Que Ad es morfismo es inmediato de las definiciones. Por otro lado usando la carta exponencial de G tenemos que estudiar la suavidad de $v \mapsto \mathrm{Ad}_{e^v}$ como función de $\mathfrak{g}$ en $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$. Pero $\mathrm{Ad}_{e^v} = (\ell_{e^v} r_{e^{-v}})_{*1}$ y el grupo es (al menos) de clase C^2 entonces esta aplicación es de clase C^1 (más adelante veremos que como en realidad G es C^ω, entonces Ad es también C^ω). □

Denotamos $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathcal{B}(\mathfrak{g})$ a la derivada del morfismo Ad en $g = 1$. Entonces tenemos que

$$\mathrm{ad}_v(w) = [v, w] = [X_v, X_w](1) = \mathcal{L}_{X_v} X_w(1).$$

3.1.3.1. Homomorfismos y la naturalidad de exp

Dados dos grupos de Lie-Banach G, K, y una aplicación diferenciable $f : G \to K$, diremos que f es un *homomorfismo* si f es un morfismo de grupos.

Lema 3.1.8. *Si f es morfismo de grupos suave, entonces* $f_{*1} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$ *es un* morfismo de álgebras de Lie.

Demostración. Notar que si $v, w \in \mathfrak{g}$ entonces

$$f(c_{e^{tv}} e^{sw}) = f(e^{tv} e^{sw} e^{-tv}) = f(e^{tv}) f(e^{sw}) f(e^{tv})^{-1} = c_{f(e^{tv})} f(e^{sw}). \tag{3.3}$$

Entonces derivando respecto de s en $s = 0$ se tiene primero

$$f_{*1} Ad_{e^{tv}} w = Ad_{f(e^{tv})} f_{*1} w$$

ya que la diferencial de c_g en $h = 1$ es Ad_g. Ahora derivamos en $t = 0$ y recordando que la diferencial de Ad en $g = 1$ es el morfismo ad, tenemos

$$f_{*1}(adv)(w) = ad(f_{*1} v)(f_{*1} w),$$

o en otras palabras

$$f_{*1}[v, w] = [f_{*1} v, f_{*1} w]. \quad \square$$

Observación 3.1.9 (Naturalidad del mapa exponencial). Denotemos con $\exp_G, \exp_K$ las respectivas exponenciales de los grupos G, K, y con $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ denotemos las respectivas álgebras de Lie-Banach. Puesto que el morfismo f manda grupos a un parámetro en grupos a un parámetro, según vimos en la Observación 3.1.8, se tiene que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{f_{*1}} & \mathfrak{k} \\ \downarrow{\scriptstyle \exp_G} & & \downarrow{\scriptstyle \exp_K} \\ G & \xrightarrow{f} & K \end{array}$$

es *conmutativo*, es decir $\exp_K \circ f_{*1} = f \circ \exp_G$.

Más rigurosamente, como f es morfismo tenemos $f(e^{(t+s)v}) = f(e^{tv} e^{sv}) = f(e^{tv}) f(e^{sv})$ y derivando en $s = 0$ tenemos

$$f_{*e^{tv}} \exp_{*tv} v = L_{f(e^{tv})} f_{*1} v = X^{f_{*1} v}(f(e^{tv})).$$

Pero entonces si consideramos la curva $\beta(t) = f(e^{tv})$ en K, esta verifica $\beta(0) = 1$ y por lo recién calculado $\beta' = X^{f_{*1} v}(\beta)$, luego β es el flujo por la identidad del campo invariante a izquierda $X^{f_{*1} v}$ en K. Por la unicidad de los flujos debe ser $\beta(t) = \exp_K(t f_{*1} v)$ y en particular en $t = 1$ obtenemos lo enunciado:

$$f(\exp_G(v)) = f(e^v) = \beta(1) = \exp_K(f_{*1} v).$$

Esta propiedad nos dice que la exponencial de grupos se comporta bien con los morfismos, y es entonces un mapa natural. Luego esta propiedad se conoce como la *naturalidad de la exponencial* en grupos de Lie.

Observación 3.1.10 (La exponencial de la representación adjunta). Usando la naturalidad de la exponencial aplicada al morfismo $\mathrm{Ad} : G \mapsto \mathcal{B}(\mathfrak{g})$ (cuya difererencial en $g = 1$ es ad), vemos que para cada $v \in \mathfrak{g}$ se tiene $\mathrm{Ad}_{e^v} = e^{\mathrm{ad}\, v}$, donde la exponencial de la derecha es la dada por la serie de operadores lineales.

Observación 3.1.11. A partir de la relación $f \circ \exp_G(tv) = \exp_K(tf_{*1}v)$ podemos ver que el núcleo del morfismo f y de su diferencial se relacionan de la siguiente manera:

$$\ker f_{*1} = \{v \in \mathfrak{g} : \exp_G(tv) \subset \ker f\}.$$

En efecto, si $v \in \ker f_{*1}$ entonces $f(e^{tv}) = e^{f_{*1}tv} = e^0 = 1$, y recíprocamente, si v es tal que $f(e^{tv}) = 1$ entonces derivando en $t = 0$ vemos que $v \in \ker f_{*1}$. Notemos que en particular, $\ker f$ es discreto si y solo si $\ker f_{*1} = \{0\}$.

Teorema 3.1.12 (Grupos a un parámetro y suavidad automática)**.** *Si G es grupo de Lie y $\gamma : \mathbb{R} \to G$ es un morfismo continuo, entonces existe $v \in \mathfrak{g}$ tal que $\gamma(t) = e^{tv}$.*

Demostración. Sea $U = -U$ entorno del origen donde exp es un difeomorfismo y tal que exp también es un difeo en $2U$. Tomamos $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma([-\varepsilon, \varepsilon]) \subset \exp(U)$ y consideramos $\Gamma(t) = \exp^{-1}(\gamma(t))$ que es una curva cuntinua en $\mathfrak{g}$ que levanta (localmente) γ con $\Gamma(0) = 0$. Para $|t| \leq \varepsilon$ es claro que

$$e^{2\Gamma(t/2)} = (e^{\Gamma(t/2)})^2 = \gamma(t/2)^2 = \gamma(t) = e^{\Gamma(t)},$$

entonces $\Gamma(t/2) = 1/2\Gamma(t)$. Inductivamente vemos que $\Gamma(t/2^n) = 1/2^n(\Gamma(t)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y en particular $\Gamma(s) \in 1/2^n U$ para $|s| \leq \varepsilon/2^n$. Ahora vamos a extender a los diadicos, tomamos $k \in \mathbb{Z}$ con $|k| \leq 2^n$ y tomamos $|t| \leq \varepsilon/2^n$, entonces $k\Gamma(t) \in k/2^n U \subset U$ y además

$$e^{k\Gamma(t)} = \gamma(t)^n = \gamma(kt) = e^{\Gamma(kt)},$$

lo que prueba que $\Gamma(kt) = k\Gamma(t)$ para $k \leq 2^n$ para estos t. Combinando la propiedad última con la de las bisecciones, obtenemos la propiedad para los diádicos

$$\Gamma(k/2^n t) = k/2^n \Gamma(t)$$

si $|t| \leq \varepsilon$ y $|k| \leq 2^n$. Ahora los diádicos $kt/2^n$ son densos en $[-t, t]$, y por la continuidad de Γ obtenemos que Γ es morfismo aditivo, esto es

$$\Gamma(t) = t/\varepsilon \Gamma(\varepsilon) = tv$$

donde $v = \varepsilon^{-1}\Gamma(\varepsilon) \in \mathfrak{v}$. Entonces localmente $\gamma(t) = e^{tv}$ (para $|t| \leq \varepsilon$) pero usando que es morfismo vemos que en realidad esto se traslada a todo $\mathbb{R}$ pues

$$\Gamma(kt) = \gamma(t)^k = (e^{tv})^k = e^{tkv}. \quad \square$$

3.1.4. La diferencial del mapa exponencial

En esta sección presentamos fórmulas explícitas para la diferencial de la función exponencial de un grupo de Lie-Banach.

Observación 3.1.13. Como los grupos a un parámetro son también son el flujo por la identidad de los campos invariantes a derecha (Observación 3.1.5), podemos concluir que

$$(e^{tv})' = L_{e^{tv}}v = R_{e^{tv}}v.$$

Si G es de clase C^2, los campos invariantes serán de clase C^1, y lo mismo es cierto para su flujo. Luego la exponencial es de clase C^1.

Lema 3.1.14. *Si* G *es de clase* C^2 *y* $v, w \in \mathfrak{g}$*, entonces*

$$\begin{aligned}\exp_{*v}(w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(v+tw) &= \int_0^1 e^{(1-t)v} w e^{tv} dt \\ &= e^v \int_0^1 Ad_{e^{-tv}} w dt = e^v \int_0^1 e^{-t\,ad_v} dt\, w \\ &= e^v F(ad_v)w = [G(ad_v)w]\, e^v.\end{aligned}$$

con $F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *las funciones enteras dadas por*

$$F(\lambda) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \qquad \text{y} \qquad G(\lambda) = \frac{e^{\lambda}-1}{\lambda}$$

respectivamente.

Demostración. Sea (U, φ) carta de G alrededor de e^v, y consideremos la curva definido alrededor de $t = 0$ dada por

$$\alpha(t) = \varphi(e^{(1-t)v} e^{t(v+w)}) = \varphi(m(e^{(1-t)v}, e^{t(v+w)}))$$

a valores en E -el espacio vectorial que modela G-. Calculamos su derivada por medio de la observación anterior y el Lema 3.1.2:

$$\alpha'(t) = \varphi_{*e^{(1-t)v}e^{t(v+w)}} R_{e^{t(v+w)}} L_{e^{(1-t)v}}(-v) + L_{e^{(1-t)v}} R_{e^{t(v+w)}}(v+w),$$

recordando también que R y L conmutan nos queda

$$\alpha'(t) = \varphi_{*e^{(1-t)v}e^{t(v+w)}} R_{e^{t(v+w)}} L_{e^{(1-t)v}} w.$$

Integramos en el intervalo $[0, 1]$ para obtener la primer fórmula

$$\varphi(e^{v+w}) - \varphi(e^v) = \alpha(1) - \alpha(0) = \int_0^1 \alpha' = \int_0^1 \varphi_{*e^{(1-t)v}e^{t(v+w)}} R_{e^{t(v+w)}} L_{e^{(1-t)v}} w\, dt.$$

Reemplazando w por sw, y dividiendo por s, se tiene

$$\frac{1}{s}(\varphi(e^{v+sw}) - \varphi(e^v)) = \int_0^1 \varphi_{*e^{(1-t)v}e^{t(v+sw)}} R_{e^{t(v+sw)}} L_{e^{(1-t)v}} w \, dt.$$

Haciendo tender $s \to 0$ se tiene

$$\varphi_{*e^v} \exp_{*v} w = \int_0^1 \varphi_{*e^v} R_{e^{tv}} L_{e^{(1-t)v}} w dt = \varphi_{*e^v} \int_0^1 L_{e^v} Ad_{e^{-tv}} w \, dt, \tag{3.4}$$

donde usamos que φ_{*e^v} es una transformación lineal continua. Usando que es un isomorfimo, se cancela de ambos lados y se obtiene la primer identidad del lema. También notamos que L_{e^v} es lineal y puede ponerse tanto dentro o fuera de la integral por su continuiudad. Como $Ad_{e^{-tv}} = e^{-t\,ad v}$, obtenemos las identidades integrales para la diferencial.

Para obtener las identidades sin integral (las que conllevan el cálculo funcional con F o con G), notamos que podemos integrar la curva de operadores $t \mapsto e^{-t\,ad v}$ y luego aplicarla a w (en otras palabras, w sale fuera de la integral a la derecha). Como

$$e^{-t\,ad v} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(-1)^n t^n (ad v)^n,$$

Integrando término a término,

$$\exp_{*v} w = L_{e^v} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n (-1)^n (ad v)^n dt \, w = e^v \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (ad v)^n w$$

se tiene la identidad con la función F, ya que

$$F(\lambda) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \lambda^n. \tag{3.5}$$

La identidad con la función G se obtiene de la ya probada para F, operando formalmente con el operador $e^{ad v} = Ad_{e^v}$. □

Como $\sigma(F(T)) = F(\sigma(T))$ para todo operador lineal T, deducimos que esta diferencial es inversible si y sólo si

$$\sigma(ad v) \cap \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}\} = \emptyset.$$

Con más precisión, como $\sigma(ad v) \subset \sigma(v) - \sigma(v)$ (Lema 4.1.1 y Corolario B.3.2), la diferencial de la exponencial será inversible siempre que $\lambda - \mu \neq 2k\pi i$ $(k \neq 0)$ para todo $\lambda, \mu \in \sigma(v)$.

Para una función entera $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, existen relaciones entre su velocidad de crecimiento y la cantidad de ceros que tiene F en regiones acotadas. Sin entrar en detalles,

mencionamos las nociones mínimas para escribir la factorización de Weierstrass de una función entera F.

Consideremos el máximo de F en un disco,

$$M(r) = \max_{|\lambda|\leq r} |F(\lambda)| = \max_{|\lambda|=r} |F(\lambda)|.$$

El *orden de crecimiento* ρ de F está dado por el límite

$$\rho = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}.$$

El orden puede ser $+\infty$. Es fácil chequear que si F, G son enteras de orden ρ_F, ρ_G respectivamente entonces

$$\rho_{F+G}, \rho_{FG} \leq \max\{\rho_F, \rho_G\}.$$

Los detalles pueden verse en la monografía [71] de Boris Levin de acceso libre en la página de la AMS. Cualquier función F de orden finito $\rho \leq 1$ tiene una expansión de Weierstrass

$$F(\lambda) = C\,\lambda^j e^{a\lambda} \prod_{k\in\mathbb{Z}} \left(1 - \frac{\lambda}{z_k}\right) e^{\frac{\lambda}{z_k}}.$$

Aquí $\{z_k\} \subset \mathbb{C} - \{0\}$ son las raíces no nulas de F y

$$C = F(\lambda)/\lambda^j\,|_{\lambda=0} \in \mathbb{C},$$

donde $j \in \mathbb{N}$ es el orden de $\lambda = 0$ como raíz de F. El producto converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ a la función F. El exponente $a \in \mathbb{C}$ se puede calcular de la siguiente manera:

$$a = \frac{d}{d\lambda} \ln(F(\lambda)/\lambda^j)\,|_{\lambda=0}\,.$$

En particular, como la exponencial $\lambda \mapsto e^\lambda$ tiene orden $\rho = 1$, lo mismo se puede decir de senos y cosenos, con lo cual es fácil hallar la expresión

$$F(\lambda) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} = e^{-\frac{1}{2}\lambda} \prod_{k\in\mathbb{Z}_{\neq 0}} \left(1 - \frac{\lambda}{2k\pi i}\right) e^{\frac{\lambda}{2k\pi i}}.$$

Corolario 3.1.15. *Si $v, w \in \mathcal{A}$, entonces*

$$\exp_{*v}(w) = e^v e^{-\frac{1}{2}a\,dv} \prod_{k\in\mathbb{Z}_{\neq 0}} \left(1 - \frac{a\,dv}{2k\pi i}\right) e^{\frac{a\,dv}{2k\pi i}}(w).$$

3.1.5. La representación local del producto

Consideremos $v, w \in \mathfrak{g}$ cercanos a 0, entonces la función $B : U \times U \to \mathfrak{g}$ definida en un entorno de 0

$$B(v, w) = \exp^{-1}(e^v e^w)$$

es una función suave. Como $e^B = e^v e^w = m(e^v, e^w)$, usando la regla de derivación del producto es fácil ver que $DB_{(0,0)}(v, w) = v + w$. Como $B(0, 0) = 0$, la fórmula de Taylor 1.5.1 nos dice que

$$B(v, w) = v + w + \int_0^1 (1 - t) D^2 B_{(tv,tw)}(v, w) dt$$

y en particular

$$\|B(v, w) - (v + w)\| \leq K\|v\|^2 \|w\|^2 \tag{3.6}$$

donde $K > 0$ es una constante que sólo depende de la norma elegida.

Esta función B es de hecho analítica en grupos de Lie-Banach, y admite un desarrollo en serie en términos de los corchetes de Lie del álgebra. En esta sección discutiremos algo más elemental: los dos primeros términos del desarrollo en serie de

$$t \mapsto B(tv, tw) = \exp^{-1}(e^{tv} e^{tw}).$$

Lema 3.1.16. *Si G es C^3, para $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño se tiene*

$$e^{tv} e^{tw} = \exp(t(v + w) + \frac{t^2}{2}[v, w] + o(t^3)).$$

Demostración. Observemos que si $f(t) = B(tv, tw)$ entonces $f_0 = \exp^{-1}(e^0 e^0) = 0$, y también que $e^{f_t} = e^{tv} e^{tw}$, luego derivamos con la regla de la cadena, y usando la fórmula de la diferencial de la exponencial se tiene

$$L_{e^{f_t}} \int_0^1 e^{-s \operatorname{ad} f_t} f_t' ds = L_{e^{tv}} R_{e^{tw}} (w + v)$$

donde para derivar el lado derecho usamos el Lema 3.1.2. Como $L_{e^{f_t}} = L_{e^{tv} e^{tw}}$, multiplicando por $L_{e^{-f_t}}$ obtenemos

$$\int_0^1 e^{-s \operatorname{ad} f_t} f_t' ds = L_{e^{-tw}} R_{e^{tw}} (w + v) = w + \operatorname{Ad}_{e^{-tw}} v = w + e^{-t \operatorname{ad} w} v \tag{3.7}$$

puesto que $\operatorname{Ad}_{e^{-tw}} w = w$ por la ecuación (3.4). Evaluando en $t = 0$, como $f_0 = 0$ vemos que $f_0' = v + w$. Escribimos entonces $f_t = t(v + w) + \frac{t^2}{2} f_0'' + o(t^3)$ mediante la

fórmula de Taylor (Observación 1.5.2). También es claro que $f'_t = v + w + tf''_0 + o(t^2)$ y entonces

$$\begin{aligned} e^{-s\mathrm{ad}_{f_t}} f'_t &= f'_t - s[f_t, f'_t] + \frac{s^2}{2}[f_t, [f_t, f'_t]] + \dots \\ &= v + w + tf''_0 + o(t^2) - s[t(v+w) + \frac{t^2}{2}f''_0, v + w + tf''_0] + o(t^2) \\ &= v + w + tf''_0 + o(t^2) \end{aligned}$$

puesto que $[t(v+w), v+w] = 0$. Integrando s en $[0,1]$ tenemos entonces de la ecuación (3.7) que

$$\begin{aligned} v + w + tf''_0 + o(t^2) &= w + e^{-t\mathrm{ad}_w} v \\ &= w + v - t[w,v] + \frac{t^2}{2}[w,[w,v]] + o(t^3) \\ &= v + w - t[w,v] + o(t^2). \end{aligned}$$

Debe ser entonces $f''_0 = -[w,v] = [v,w]$, y nuevamente con el desarrollo de Taylor de f, se tiene $f(t) = f_0 + tf'_0 + \frac{t^2}{2}f''_0 + o(t^3) = t(v+w) + \frac{t^2}{2}[v,w] + o(t^3)$ que es lo que queríamos probar. □

3.1.5.1. Fórmulas de Lie-Trotter

Las siguientes fórmulas son conocidas como fórmulas de Lie-Trotter de la función exponencial.

Lema 3.1.17. *Si $v, w \in \mathfrak{g}$, entonces*

$$\exp(v+w) = \lim_{n\to\infty} \left(e^{v/n} e^{w/n}\right)^n$$

y

$$\exp([v,w]) = \lim_{n\to\infty} \left(e^{-v/n} e^{-w/n} e^{v/n} e^{w/n}\right)^{n^2}.$$

Demostración. Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, v/n y w/n están suficientemente cerca del origen como para usar la fórmula del Lema 3.1.16. Entonces

$$\exp^{-1}(e^{v/n} e^{w/n}) = {}^1\!/_n(v+w) + \frac{{}^1\!/_2}{n^2}[v,w] + o(1/n^3)$$

de donde

$$\begin{aligned} e^{v/n} e^{w/n} &= \exp({}^1\!/_n(v+w) + \frac{{}^1\!/_2}{n^2}[v,w] + o(1/n^3)) \\ &= \exp({}^1\!/_n(v+w) + o(1/n^2)) \end{aligned} \tag{3.8}$$

y entonces

$$(e^{v/n}e^{w/n})^n = \left[\exp(1/n(v+w)+o(1/n^2))\right]^n = \exp((v+w)+o(1/n)).$$

Tomando límite para $n \to \infty$ se tiene la primer identidad. Iterando la ecuación del lema, tenemos

$$e^{-v/n}e^{-w/n}e^{v/n}e^{w/n} = \exp(A(n))\exp(B(n))$$

donde

$$A(n) = 1/n(v+w) + \frac{1/2}{n^2}[v,w] + o(1/n^3)$$

y

$$B(n) = -1/n(v+w) + \frac{1/2}{n^2}[v,w] + o(1/n^3).$$

Aplicando nuevamente la fórmula del lema,

$$\exp^{-1}(e^A e^B) = A + B + 1/2[A,B] + o(1/n^3) = 0 + \frac{1}{n^2}[v,w] + o(1/n^3),$$

luego

$$\begin{aligned}(e^{-v/n}e^{-w/n}e^{v/n}e^{w/n})^{n^2} &= \left[\exp(1/n^2[v,w]+o(1/n^3))\right]^{n^2}\\ &= \exp([v,w]+o(1/n)),\end{aligned}$$

y haciendo tender $n \to \infty$ tenemos la segunda fórmula. □

3.1.6. La serie de Baker-Campbell-Hausdorff

La *serie de Baker-Campbell-Hausdorff de* $v, w \in \mathfrak{g}$ está dada por

$$\mathrm{BCH}(v,w) = v * w = \exp^{-1}(e^v e^w),$$

para v, w suficientemente pequeños. Estos resultados que siguen, extienden los de la Sección 3.1.5.

Proposición 3.1.18 (Serie BCH). *Sea* G *de clase* C^2, *si* $v, w \in \mathfrak{g}$ *son suficientemente pequeños, entonces*

$$\mathrm{BCH}(v,w) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^1 \left(e^{t\,\mathrm{ad}v}e^{t\,\mathrm{ad}w} - 1\right)^{n-1}(v + e^{t\,\mathrm{ad}v}w)\,dt.$$

En particular $\mathrm{BCH}(v,w)$ *se obtiene iterando corchetes de* v *y* w.

Demostración. Sea $z = z(t) = \exp^{-1}(e^{tv}e^{tw})$, que como discutimos es una función suave para t suficientemente pequeño. Derivando la relación $e^{z(t)} = e^{tv}e^{tw}$ obtenemos, por la fórmula de la diferencial de la exponencial

$$[G(\mathrm{ad}z)z']e^z = ve^z + e^z w,$$

luego

$$G(\mathrm{ad}z)z' = v + e^{\mathrm{ad}z}w = v + e^{t\mathrm{ad}v}w,$$

puesto que $e^{\mathrm{ad}z}w = e^{t\mathrm{ad}v}e^{t\mathrm{ad}w}w = e^{t\mathrm{ad}v}w$. Ahora notemos que, para $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| < \log(2)$, se tiene

$$\lambda = \log(e^\lambda) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(e^\lambda - 1)^n,$$

luego

$$G(\lambda)^{-1} = \frac{\lambda}{e^\lambda - 1} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(e^\lambda - 1)^{n-1}.$$

Entonces, si t es suficientemente pequeño se verifica $\|\mathrm{ad}z\| < \log(2)$ con lo cual

$$\begin{aligned} z' &= G(\mathrm{ad}z)^{-1}\left(v + e^{\mathrm{ad}tv}w\right) \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(e^{\mathrm{ad}z} - 1)^{n-1}\left(v + e^{t\mathrm{ad}v}w\right). \end{aligned}$$

Pero si observamos que $z(0) = 0$, entonces

$$\exp^{-1}(e^v e^w) = z(1) = z(1) - z(0) = \int_0^1 z'(t)dt$$

lo que nos da la fórmula del enunciado. □

Observación 3.1.19. Reordenando la expresión integral del lema se obtiene la fórmula

$$\mathrm{BCH}(v, w) = v + \int_0^1 g(e^{t\mathrm{ad}v}e^{t\mathrm{ad}w})w dt,$$

con $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función entera dada por

$$g(\lambda) = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}(\lambda - 1)^n.$$

Mientras que si desarrollamos $(e^{t\mathrm{ad}v}e^{t\mathrm{ad}w} - 1)^{n-1}$ en serie en la expresión del lema se obtiene una famosa fórmula debida a E.B. Dynkin de la serie de Baker para v, w:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{1}{(i_1 + j_1) + \cdots + (i_n + j_n)} \frac{[v^{(i_1)}, w^{(j_i)}, \cdots, v^{(i_n)}, w^{(j_n)}]}{i_1! j_1! \cdots i_n! j_n!}$$

donde la suma es sobre las $2n$-uplas $(i_1, \cdots, i_n, j_1, \cdots, j_n)$ tales que $i_k + j_k \geq n$, y para $r \in \mathbb{N}$ se denota

$$[\cdots, v^{(r)}, \cdots] := [\cdots, \underbrace{[v, [v, [\cdots [v}_{r \text{ veces}}, [\cdots]]]].$$

Observemos que, donde está definida la serie, es una función analítica. Luego podemos desarrollar en serie alrededor del origen

$$\mathrm{BCH}(tv, tw) = \sum_{k \geq 0} t^k p_k(v, w)$$

con p_k homogéneos de grado k en (v, w). Como puede verse del desarrollo de Dynkin recién obtenido, los polinomios homogéneos son en realidad corchetes de Lie que involucran k términos en v y w. Los primeros polinomios son (comparar con el Lema 3.1.16)

$$p_0 = 0, \qquad p_1 = v + w, \qquad p_2 = {}^1\!/_2[v, w],$$
$$p_3 = {}^1\!/_{12}[v - w, [v, w]] = {}^1\!/_{12}[v, [v, w]] + {}^1\!/_{12}[w, [w, v]].$$

3.1.7. Grupos locales y la regularidad de los grupos de Lie

Veremos en esta sección como dotar a un grupo de una estructura de grupo de Lie usando la noción de grupo local. Luego, mediante la estructura de grupo local dada por la serie de Baker-Campbell-Hausdorff en un grupo de Lie, veremos que todo grupo de Lie es de clase C^ω (analítica real).

Teorema 3.1.20 (Teorema del grupo local)**.** *Sea G grupo y $V = V^{-1}$ conjunto que contiene al 1. Supongamos que U es una variedad de clase C^k ($k \geq 0$) de manera tal que valen*

- *L1 El conjunto $D = \{(x, y) \in V \times V : xy \in V\}$ es abierto en $V \times V$ y la multiplicación $m_V : D \to V$ es de clase C^k allí.*
- *L2 La inversión $I(x) = x^{-1}$ es de clase C^k en V.*
- *L3 Para todo $g \in G$ existe un entorno abierto de la identidad $V_g \subset V$ tal que $c_g(V_g) \subset V$ y c_g es suave en V_g ($c_g(h) = ghg^{-1}$ es la conjugación del grupo).*

Entonces existe una única estructura de grupo de Lie en G tal que la inclusión $U \hookrightarrow G$ es un difeomorfismo con un abierto de G. Además si V genera G, entonces la condición [L3] *no es necesario verificarla, se deduce de las otras dos.*

Demostración. Declaramos V abierto en G y con esto le damos a G la estructura de grupo topológico, declarando xV abierto en G para todo $x \in G$. Como V es difeomorfo (u homeomorfo en el peor de los casos) via un mapa $\varphi : V \to U = \varphi(V) \subset E$ a un abierto U en un espacio de Banach, la topología es Hausdorff y de base numerable. Tomamos un abierto W alrededor de 1 tal que $W = W^{-1} \subset V$ tal que $W^2 \times W^2 \subset D$, en particular $W^2 \subset V$ pues $1 \in W$. Consideramos el atlas (xW, φ_x) con $x \in G$ y $\varphi_x(xy) = \varphi(y)$, esto es $\varphi_x = \varphi \circ \ell_{x^{-1}}$. Veamos que se trata de cartas compatibles, para eso miramos una intersección $xW \cap yW$ y notamos que si $h = xg_1 = yg_2 \in xW \cap yW$ entonces $x^{-1}y = g_1 g_2^{-1} \in W^2 \subset V$, luego $x^{-1}y = \varphi^{-1}(s)$ para $s \in U$. Miramos el mapa de transición $\Phi = \varphi_x \circ \varphi_y^{-1} : \varphi_y(xW \cap yW) \to \varphi_x(xW \cap yW)$, sabemos que $h = yg_2 = \varphi_y^{-1}(z) = y\varphi^{-1}(z)$ con $z \in U$, y se tiene

$$\Phi(z) = \varphi_x \circ \varphi_y^{-1}(z) = \varphi_x(h) = \varphi_x(yg_2) = \varphi(x^{-1}yg_2) = \varphi(\varphi^{-1}(s)\varphi^{-1}(z)).$$

Esto es

$$\Phi(z) = \varphi(\varphi^{-1}(s)\varphi^{-1}(z)) = \varphi \circ m(x^{-1}y, \varphi^{-1}(z)). \tag{3.9}$$

Como $x^{-1}y \in W^2$ y $\varphi^{-1}(z) \in W \subset W^2$ entonces $(x^{-1}y, \varphi^{-1}) \in D$ donde m es suave, así que Φ es suave. Por la misma definición de las cartas, si escribimos ℓ_g en coordenadas es la identidad así que ℓ_g es un difeomorfismo de G para todo $g \in G$. Si $h = xg \in xW$, entonces es fácil ver que

$$I(h) = I(xh) = h^{-1}x^{-1} = \ell_{x^{-1}} \circ c_x \circ I\big|_W \circ \ell_{x^{-1}}(h), \tag{3.10}$$

como todas las funciones son suaves por hipótesis (cortando W con V_x si es necesario para que la conjugación c_x sea suave en un entorno de $x^{-1}h \in W$, mediante el axioma L3), se concluye que I es suave en xW y entonces es suave en todo G. Ahora veamos que cada $c_g(h) = ghg^{-1}$ también es suave fuera de U_g, de hecho un difeomorfismo pues tiene una inversa que se computa como $c_{g^{-1}}$ que resultará por ende suave también. Como $c_g \circ \ell_h = \ell_{ghg^{-1}} \circ c_g$, basta probar que c_g es suave en algún entorno de la identidad, pero eso lo tenemos como hipótesis. Ahora veamos que el producto es suave en G, tomamos $h = xg_1 \in xW$, $\overline{h} = yg_2 \in yW$, reducimos W a V_x, V_y respectivamente y notamos que

$$m(h, \overline{h}) = \ell_{xy} \circ m\big|_{V \times V} \circ (c_{y^{-1}} \times \mathrm{id}) \circ (\ell_{x^{-1}} \times \ell_{y^{-1}})(h, \overline{h}). \tag{3.11}$$

Entonces m es suave en $xV_x \times yV_y \subset xW \times yW$ y con esto es suave en G. Hemos probado que G es un grupo de Lie, y la inclusión $i : V \hookrightarrow G$ es un difeomorfismo por construcción. La unicidad de la estructura se sigue del hecho de las traslaciones deben ser difeomorfismos en ambas estrucuras diferenciables, y las dos coinciden en un entorno de la identidad.

Supongamos que V genera G. Entonces dado $g \in G$ escribimos $g = g_1 g_2 \cdots g_n$ con los $g_i \in W$, y la conjugación se descompone como $c_g = c_{g_1} c_{g_2} \cdots c_{g_n}$. Cada g_i es suave porque el producto y la inversa son suaves en V_{g_i}; cada c_{g_i} fija el 1 así que achicando los V_{g_i} podemos suponer que $c_{g_k}(V_{g_k}) \subset V_{g_{k-1}}$ para $k = 1, \ldots, n$ y así la composición c_g es suave en $V_g = V_{g_n}$. □

Recordamos que en este texto presentamos a los grupos de Lie requiriendo que sean variedades de clase C^2 con operaciones de la misma clase. Veremos a continuación como esta condición C^2 implica que la estructura diferenciable es en realidad de clase C^ω, y también que las operaciones son de clase C^ω.

Observación 3.1.21 (Las componentes de G y las traslaciones). Si G es grupo de Lie, todas las componentes conexas son isomorfas a G_1 (la componente de la identidad) via ℓ. Esto es porque si $g \in G_2$ (otra componente), entonces $\ell_g(G_1) = G_2$: $\ell_g(G_2)$ es conexo y contiene a $g = g \cdot 1$, luego $\ell_g(G_1) \subset G_2$ y razonando con $\ell_{g^{-1}}$ tenemos la otra inclusión. Es más, tomando como atlas cualquier carta alrededor de la identidad trasladad por ℓ, los mapas ℓ_g se ven como la identidad en este atlas, luego serán tan regulares o suaves como lo sea la estructura diferenciable de G. Y así, si dotamos a G_1 de una estructura de clase C^k, todas las demás componentes conexas serán igual de regulares que esta.

Teorema 3.1.22. *Todo grupo de Lie de clase C^2 es de clase C^ω, todo morfismo diferenciable entre grupos de Lie es también de clase C^ω.*

Demostración. Por la observación anterior, podemos suponer que G es conexo. Tomamos un entorno W como en el teorema del grupo local, pero lo achicamos más si es necesario para que la serie de Baker-Campbell-Hausdorff sea convergente en $U \times U$, donde $U = \exp^{-1}(W)$. Tomando como atlas las cartas trasladas por ℓ_g, tomamos $z \in \varphi_y(xW \cap yW) = \exp^{-1}(xW \cap yW)$ y el mapa de transición $\Phi = \varphi_x \circ \varphi_y^{-1}$ se ve de acuerdo a la prueba de dicho teorema (3.9) como

$$\Phi(z) = \varphi(\varphi^{-1}(s)\varphi^{-1}(z)) = \exp^{-1}(e^s e^z) = \mathrm{BCH}(s, z)$$

así que resulta de clase C^ω. En el entorno W, la inversa se ve como $v \mapsto -v$ usando la carta exponencial, así que es claramente analítica. También las traslaciones a izquierda son tautológicamente analíticas por la observación anterior. Veamos que la conjugación es analítica en un entorno de la identidad: podemos escribir $g = g_1 \ldots g_n = e^{v_1} e^{v_2} \ldots e^{v_n}$ con los $v_i \in U$ y como $c_g = c_{g_1} \ldots c_{g_n}$ basta ver que c_{e^v} lo es. Pero

$$\varphi(c_{e^v}\varphi^{-1}(z)) = \exp^{-1}(e^v e^z e^{-z}) = \mathrm{Ad}_{e^v} z = e^{\mathrm{ad} v} z$$

que es claramente analítica como función de z por ser lineal. De $c_g \circ \ell_h = \ell_{ghg^{-1}} \circ c_g$ en realidad vemos que c_g es analítica en todo G. Ahora de la identidad (3.10) podemos deducir que la inversión es entonce analítica en todo G, y de la identidad (3.11) vemos que para probar que el producto es analítico, basta verlo en un entorno de la identidad. Pero si $e^v, e^w \in W$ entonces

$$\varphi(m(e^v, e^w)) = \mathrm{BCH}(v, w)$$

y entonces el producto es de clase C^ω localmente, con el mismo argumento que en el teorema anterior, es globalmente C^ω. La afirmación sobre los morfismos es ahora consecuencia de la Observación 3.1.1. □

Observación 3.1.23 (El quinto problema de Hilbert). Puede uno preguntarse si la condición de regularidad C^2 puede relajarse, ya que como vimos, para los morfismos basta con que sean continuos para concluir que sean analíticos. Este es el quinto problema de Hilbert, que preguntaba si un grupo topológico que es a su vez una variedad de clase C^0, es entonces un grupo de Lie. En el caso de variedades en dimensión finita (de manera que G es una variedad C^0 modelada por un espacio vectorial de dimensión finita), la respuesta al quinto problema de Hilbert es afirmativa, como probaron Montgomery-Zippin [66] y Gleason [40] en los años 50. Un paso intermedio de la demostración es llegar a que hay una estructura local de clase $C^{1,1}$ en el grupo C^0, en el sentido siguiente: hay una carta (U, φ) alrededor de la identidad del grupo, donde si $x, y \in \varphi(U)$ entonces el producto tiene la regularidad siguiente

$$x * y = \varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-y}) = x + y + o(\|x\| \, \|y\|).$$

Esto es equivalente a que el producto $m : G \times G \to G$ sea de clase C^1 en algún entorno de la identidad, y además las derivadas parciales sean localmente Lipschitz allí. Por la fórmula para la diferencial de m, esta última condición es equivalente a que $g \mapsto L_g, g \mapsto R_g$ sean localmente Lipschitz en algún entorno de 1. La función φ^{-1} juega aquí el papel de la función exponencial del grupo (que a priori no existe porque el grupo no es diferenciable), y lo que tenemos es un análogo de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff.

La demostración de este primer paso, que involucra las llamadas métricas de Gleason, se rompe rápidamente en dimensión infinita, ya que el hecho de que G es localmente compacto es clave para muchos de los pasos (esta prueba puede verse en el texto de Tao [86, Secciones 1.3.3-5]).

Sin embargo, si uno parte de un grupo topológico G de clase C^0 modelado por un espacio de Banach y asume que este es de clase $C^{1,1}$ en el sentido antes explicado (el producto es C^1 en algún entorno de $g = 1$ y L, R son localmente Lipschitz allí), entonces puede munirse a G de una estructura de grupo de Lie de clase C^ω que

preserva la topología original, siguiendo los pasos explicados en el texto de Tao [86, Sección 1.2.5], sin mayores modificaciones. La idea central es probar que la operacion $x * y$ es analítica, y esto le da una estructura de grupo de Lie local C^ω a $\varphi(U)$, que se copia a U usando la carta φ. Luego es cuestión de copiar esta estructura por todo el grupo usando el teorema del grupo local.

3.2. Subgrupos de Lie-Banach

Un subgrupo de Lie-Banach es un subgrupo que es también subvariedad. Nuevamente hay que considerar distintos tipos: subvariedades inmersas (el tangente es un subespacio cerrado), embebidas (tienen la topología de subespacio pero no necesariamente se parte el tangente), embebidas-partidas (regulares). Todo subgrupo de Lie (embebido) $K \subset G$ es topológicamente cerrado en G, pues es localmente cerrado por ser subvariedad (Ejercicio 3.VI). Reservaremos el nombre *subgrupo de Lie-Banach* a aquellos subgrupos que sean subvariedades embebidas, es decir, a aquellos subgrupos que sean variedades diferenciables cuya topología coincida con la heredada. También denominaremos *subgrupo analítico* a aquel subgrupo que siendo variedad diferenciable, tenga una topología más fina o igual que la heredada, es decir que es un subgrupo inmerso.

En general, si $H \subset G$ es un subgrupo topológico de un grupo de Lie-Banach G, cerrado para la topología de subespacio, entonces si $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ denota la exponencial de G, podemos poner

$$\mathfrak{h} := \{v \in \mathfrak{g} : \exp_G(\mathbb{R}v) \subset H\}.$$

Este resulta un subconjunto cerrado de $\mathfrak{g}$. Pero no es difícil ver que se trata de hecho de un álgebra de Lie-Banach, como veremos en la Proposición 3.2.3. Por restricción se tiene una aplicación exponencial

$$\exp_H : \mathfrak{h} \to H.$$

Una consecuencia del Teorema de Frobenius (ver la Observación 2.6.3) es que si tiene suplemento, esta subálgebra es integrable, en el sentido siguiente: el grupo generado por las exponenciales de elementos de $\mathfrak{h}$, es decir

$$H_1 = \langle \exp_G(h) : h \in \mathfrak{h} \rangle,$$

tiene una estructura de grupo de Lie-Banach en la que $\mathfrak{h}$ es su álgebra de Lie-Banach y la exponencial del grupo H_1 está dada por la restricción de la exponencial de G según se explicó recién.

La inclusión $H_1 \subset G$ es una subvariedad inmersa en el sentido de que la inclusion es diferenciable y la diferencial de la inclusión es inyectiva y de rango cerrado, y

permite dar a H una estructura diferenciable que hace de éste un grupo de Lie-Banach de manera que H_1 es la componente conexa de la identidad de H. En el caso finito dimensional, H_1 es una subvariedad embebida de G y entonces la topología inducida por la estructura de variedad que se le dio a H, coincide con la topología original de éste. En el contexto de dimensión infinita, no es difícil dar un ejemplo de un subgrupo topológico cerrado H de un grupo de Lie-Banach G, cuya estructura diferenciable inducida por la construcción recién mencionada le da una topología que no coincide con la topología original de H como subespacio topológico de G (ver el Ejemplo 3.2.9).

Si comenzamos con una subálgebra de Lie suplementada (y no con un subgrupo cerrado), la construcción recién mencionada del grupo generado por las exponenciales de elementos de la subálgebra se puede hacer sin inconvenientes, pero cabe destacar que en general H_1 *no resultará* subvariedad regular (ni embebida) de G, ni siquiera en dimensión finita. Un ejemplo sencillo de esta afirmación, se obtiene considerando el ejemplo ya mentado

$$K \subset T = S^1 \times S^1$$

donde K es el grupo de Lie que integra la subálgebra de Lie generada por el elemento $(\pi, \pi a)$, y $a \in \mathbb{R}$ es un número irracional a elección del lector. Este subgrupo K resulta una curva densa en el toro, y por lo tanto no puede ser subgrupo de Lie con la topología de subespacio.

3.2.1. El álgebra de Lie de un subgrupo cerrado

Sea $K \subset G$ subgrupo de Lie inmerso. Como $i : K \to G$ es un morfismo de grupos de Lie suave, el Lema 3.1.8 nos dice que i_* es un morfismo de álgebras de Lie: para $v, w \in T_1K$, tenemos que $i_{*1}[v, w]_K = [i_{*1}v, i_{*1}w]_G$. Si identificamos T_1K con el subespacio $\mathfrak{k} = i_{*1}T_1K \subset \mathfrak{G}$, vemos que $\mathfrak{k}$ es subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Veamos como el mapa exponencial nos permite describir esta subálgebra como aquella que genera subgrupos a un parámetro en K:

Lema 3.2.1 (Subálgebra de subgrupo inmerso)**.** *Sea $K \subset G$ subgrupo inmerso, $\mathfrak{k} = T_1K$ el subespacio tangente en $k = 1$ de la subvariedad $K \subset G$. Entonces la exponencial de K es la restricción de la exponencial de G y además*

$$\mathfrak{k} = \{v \in \mathfrak{g} : e^{tv} \subset K \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Demostración. Sea S el conjunto de la derecha. Podemos caracterizar T_1K como las clases de equivalencias de curvas suaves en K por la identidad. Entonces claramente si v está en el conjunto de la derecha la curva $\alpha(t) = e^{tv}$ cumple estos requisitos y se tiene la inclusión $T_1K \supset S$. Por otro lado, consideremos el campo invariante a izquierda X_v en G. Como $T_gK = L_gT_1K$ para todo $g \in K$, vemos que X_v es tangente

a K siempre que $v \in T_1K$. Luego induce un campo $X|_K$ en K que está i-relacionado con X; existe un intervalo J alrededor de $t = 0$ tal que el flujo ϕ de $X|_K$ por $g = 1$ coincide allí con el flujo de X (Observación 2.5.8). Entonces para $t \in J$ tenemos que $\exp_K(t) = e^{tv}$, afirmamos que $J = \mathbb{R}$. Supongamos que no, sea $J = (a, b)$ maximal donde vale la igualdad con $0 < b < \infty$, tomemos $\mu(t) = (e^{tv/2})^2$. Es claro que μ está definida en 2J, que $\mu(0) = 1$ y que $\mu \subset K$ ya que K es un grupo. Ahora $\mu(t) = e^{tv}$ luego $\mu_t' = e^{tv}v = \mu_t v$, entonces μ es solución de la ecuación del flujo de $X|_K$, así que extiende la solución original, contradicción. Como $J = \mathbb{R}$, hemos probado que $e^{tv} \subset K$ para $t \in \mathbb{R}$. Esto prueba la otra inclusión y también que la exponencial de G se restringe bien al subgrupo inmerso. □

Observación 3.2.2. Si $K \subset G$ es subgrupo de Lie inmerso y cerrado, el siguiente argumento más directo muestra por qué la exponencial se restringe bien: sea $\gamma \subset K$ es una curva por 1 con $\gamma_0' = v$, la podemos levantar al tangente $\mathfrak{g}$ usando que la exponencial de G es un difeomorfismo local, $\gamma_t = \exp_G(\Gamma_t)$ y es claro que $\Gamma_0 = 0$. Vemos que $v = \gamma_0' = \exp_{*\Gamma_0} \Gamma_0' = \Gamma_0'$ y notamos que

$$\lim_n \gamma(t/n)^n = \lim_n e^{n\Gamma(t/n)} = e^{t\Gamma_0'} = e^{tv}.$$

Como K es subgrupo cerrado, el lado izquierdo está en K para todo t, luego el lado derecho también y esto prueba que $e^{tv} \subset K$.

Por otro lado, si partimos de un subgrupo topológico cerrado $K \subset G$, gracias a las fórmulas de Lie-Trotter, obtenemos la prueba de que este subgrupo cerrado tiene un álgebra de Lie-Banach asociada con la misma propiedad que en el caso anterior:

Proposición 3.2.3. *Sea* G *grupo de Lie-Banach y sea* $K \subset G$ *un subgrupo cerrado. Sea*

$$\mathfrak{k} = \{v \in \mathcal{A} : e^{tv} \in K \quad \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ *es una subálgebra de Lie-Banach real.*

Demostración. Si $v_n \to v$ en $\mathfrak{g}$ con $v_n \in \mathfrak{k}$, entonces

$$\exp(tv) = \lim_n \exp(tv_n) \in K$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, con lo cual $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ es un subconjunto cerrado. Por otra parte, si $v \in \mathfrak{k}$ entonces $sv \in \mathfrak{k}$ para todo $s \in \mathbb{R}$ por definición. Ahora supongamos que $v, w \in \mathfrak{k}$, entonces por las primer fórmula de Lie-Trotter

$$e^{t(v+w)} = e^{tv+tw} = \lim_n (e^{tv/n} e^{tw/n})^n.$$

Como $e^{tv/n} \in K$ para todo t, n (y lo mismo vale para w), y K es un grupo, el producto $e^{tv/n}e^{tw/n}$ y la potencia n-esima de este están en K; como K es cerrado el

límite también y esto prueba que $v+w \in \mathfrak{k}$. Entonces $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ es un subespacio cerrado. Ahora con la segunda fórmula de Lie-Trotter

$$e^{t[v,w]} = e^{[tv,w]} = \lim_n (e^{-tv/n} e^{-w/n} e^{tv/n} e^{w/n})^{n^2}$$

y repitiendo el argumento anterior, probamos que $\mathfrak{k}$ es una subálgebra de Lie. □

El que sigue es un resultado que caracteriza los subgrupos de Lie.

Teorema 3.2.4. *Sea G grupo de Lie, sea $H \subset G$ un subgrupo cerrado y sean $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ las respectivas álgebras de Lie-Banach. Supongamos que existe un entorno U abierto de $0 \in \mathfrak{g}$ suficientemente pequeño tal que*

$$\exp(U \cap \mathfrak{h}) = \exp(U) \cap H.$$

Entonces H tiene una única estructura de variedad diferenciable que lo hace subgrupo embebido de Lie-Banach de G.

Demostración. Como $\exp_{*0} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, existe un entorno Z del $0 \in \mathfrak{g}$ de manera que $\exp|_Z : Z \to \exp(Z) \subset G$ es un difeomorfismo. La frase *suficientemente pequeño* quiere decir que $U \subset Z$. La idea de la prueba es la siguiente: hay una inclusión

$$\exp(U \cap \mathfrak{h}) \subset \exp(U) \cap H$$

que es trivial. En el caso en el que se cumpla la inclusión no trivial, lo que obtuvimos es un cierto entorno abierto de $e \in H$ -el conjunto $W = \exp(U \cap \mathfrak{h})$- que se obtiene como intersección del abierto $\exp(U)$ de G con el subgrupo H. Esto permite utilizar la exponencial de G restringida como carta de H en un entorno de e, para obtener una subvariedad embebida, pues esta carta se traslada a todo el grupo H usando los difeomorfismos de G dados por trasladar a izquierda, usando el Teorema 3.1.20 del grupo local. □

Con este teorema podemos probar que las preimagenes de morfismos son subgrupos de Lie y caracterizar su álgebra de Lie:

Teorema 3.2.5 (Subgrupos y morfismos)**.** *Sea $f : G \to H$ morfismo de grupos de Lie y $H_1 \subset H$ subgrupo de Lie. Entonces $G_1 = f^{-1}(H_1)$ es subgrupo de Lie de G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}_1 = f_{*1}^{-1}\mathfrak{h}_1$, donde $\mathfrak{h}_1$ es el álgebra de Lie de H_1. En particular el núcleo de f es subgrupo de Lie cuya álgebra de Lie es $\ker f_{*1}$.*

Demostración. Es claro que $G_1 \subset G$ es subgrupo cerrado, tomamos $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ como en la Proposición 3.2.3, es fácil ver que $\mathfrak{g}_1 = f_{*1}^{-1}\mathfrak{h}_1$ usando la naturalidad de la exponencial. Ahora queremos ver hay un entorno abierto $U \subset \mathfrak{g}$ donde se verifica $\exp(U \cap \mathfrak{g}_1) = \exp(U) \cap G_1$. Como $H_1 \subset H$ es subgrupo de Lie existe un entorno abierto V de $0 \in \mathfrak{k}$ tal que $\exp_H(V \cap \mathfrak{h}_1) = \exp(V) \cap H_1$. Sea $U = f_{*1}^{-1}V \subset \mathfrak{g}$. Afirmamos que para este entorno se verifica la condición anterior, veamos la inclusión no trivial: si $x \in U$ y $\exp_G(x) \in G_1$ entonces $\exp_H(f_{*1}x) = f(\exp_G(x)) \in f(G_1) = H_1$, y además $f_{*1}x \in V$ luego $f_{*1}x \in \mathfrak{h}_1$. Entonces $x \in f_{*1}^{-1}\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{g}_1$ como ya mencionamos, y esto concluye la prueba. □

Será útil el siguiente lema para entender el comportamiento de los subgrupos de Lie que no están necesariamente dados por preimágenes de morfismos (la norma aquí es cualquiera compatible con la estructura de $\mathfrak{g}$):

Lema 3.2.6. *Sea $K \subset G$ subgrupo cerrado del grupo de Lie G, sea $\mathfrak{k}$ su álgebra de Lie como en la proposición anterior. Supongamos que $0 \neq \nu_n \in \mathfrak{g}$ tiende a cero y que $e^{\nu_j} \in K$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Entonces todo punto de acumulación de la sucesión normalizada $\nu_j/\|\nu_j\|$ es un vector de $\mathfrak{k}$.*

Demostración. Pasando a una subsucesión, podemos suponer que $\nu_j/\|\nu_j\| \to_j \nu$ de norma unitaria. Dado $t \in \mathbb{R}$, podemos elegir una sucesión $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $n_j\|\nu_j\| \to t$, ya que $\|\nu_j\| \to 0$ (por ejemplo $n_j = \max\{l \in \mathbb{N} : l \leq t/\|\nu_j\|$, ya que entonces $n_j\|\nu j\| \leq t \leq (n_j + 1)\|\nu_j\|$ y así $0 \leq t - n_j\|\nu\|_j \leq \|\nu_j\| \to 0$). Notemos que

$$e^{t\nu} = \lim_j \exp(n_j\|\nu_j\|\nu_j/\|\nu_j\|) = \lim_j \exp(n_j\nu_j) = \lim_j \exp(\nu_j)^{n_j}$$

y como cada $e^{\nu_j} \in K$, que es un grupo cerrado, entonces $e^{t\nu} \in K$ y se tiene $\nu \in \mathfrak{k}$. □

Los subespacios suplementados nos permiten recorrer un entorno de la identidad como un producto directo, como muestra el siguiente lema que será de utlidad luego:

Lema 3.2.7. *Sea $\mathfrak{g} = T \oplus S$ y sea $U \subset \mathfrak{g}$ entorno de 0 donde la exponencial del grupo de Lie G es un difeomorfismo con su imagen. Entonces, achicando U de ser necesario, el mapa $(t, s) \mapsto e^t e^s$ es un difeomorfismo entre U y un entorno abierto de 1 en G.*

Demostración. Observemos que $f(t + s) = e^t e^s$ es suave y tiene diferencial en $t = s = 0$ la identidad: en efecto, si escribimos $f(\lambda(t+s)) = e^{\lambda t}e^{\lambda s}$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ y derivamos en $\lambda = 0$, por el Lema 3.1.2 y la Observación 3.1.13 obtenemos $f_{*0}(t + s) = t + s$. Entonces el teorema de la función inversa nos dice que f es un difeomorfismo local. □

Teorema 3.2.8. *Sea* G *grupo de Lie-Banach,* $\mathfrak{g}$ *su álgebra de Lie-Banach. Supongamos que* $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ *es una subálgebra cerrada. Entonces*

1. *Existe un grupo de Lie-Banach conexo* $K^* \subset G$ *(subgrupo analítico) tal que el álgebra de Lie-Banach de* K^* *coincide con* $\mathfrak{k}$.
2. *Si* $K \subset G$ *es un subgrupo topológico cerrado, y* $\mathfrak{k}$ *denota el álgebra de Lie-Banach de* K*, entonces* K *tiene una estructura de grupo de Lie-Banach de manera que la topología* τ *inducida es posiblemente más fina que la de* G*. Además* $K^* = (K_1)_\tau$ *(la componente de la identidad del grupo* K *munido de la topología* τ*), y* K^* *es subgrupo de Lie-Banach normal de* K_τ.
3. *Si* $\dim(G) < \infty$*, la topología* τ *de* K *y la de subespacio coinciden.*

Demostración. Tomamos un entorno U de 0 donde la exponencial de G es un difeomorfismo y tomamos $K^* = \langle \exp(U \cap \mathfrak{k}) \rangle \subset G$. Es claro que K^* es un grupo, y también que $V = \exp(U \cap \mathfrak{k})$ es una variedad analítica pues G lo es, cuyo tangente en $k = 1$ es $\mathfrak{k}$. A partir de las fórmulas de Baker-Campbell-Hausdorff es claro que se verifican los axiomas L1, L2 del grupo local y entonces por el Teorema del grupo local 3.1.20 concluimos que K^* es grupo de Lie. El grupo K^* es conexo pues es generado por el entorno V (y esto mismo hace que no sea necesario verificar L3).

Sea ahora $K \subset G$ subgrupo cerrado, y tomamos $\mathfrak{k}$ su álgebra de Lie-Banach como en la Proposición 3.2.3. Dado $v \in \mathfrak{k}$ se tiene $e^v \in K$, luego tomando V como en el párrafo anterior, se tiene $V \subset K$ y entonces $K^* \subset K$. Notar también que si $x \in K$ y $z \in \mathfrak{k}$ entonces

$$\exp(t\mathrm{Ad}_x z) = x e^{tz} x^{-1} \in K$$

luugo por definición $\mathrm{Ad}_x z \in \mathfrak{k}$ y también por definición $c_x e^z = e^{\mathrm{Ad}_x z} \in V \subset K^*$. Como K^* está generado por los productos de e^z, $z \in U \cap \mathfrak{k}$, vemos que K^* es un subgrupo normal de K.

Declaramos V abierto en K y le damos a K la estructura diferenciable del cubrimiento $\{kV\}_{k \in K}$, como hicimos en la prueba del Teorema 3.2.4; con la misma demostración se ve que las operaciones son suaves y que K es un grupo de Lie. En particular es un grupo topológico; se tiene $K^* = \langle V \rangle \subset K$ y también sabemos que $(K_1)_\tau = \langle V \rangle$ (Ejercicio 3.VII); entonces debe ser $K^* = (K_1)_\tau$.

Si $\dim(G) < \infty$, entonces su álgebra es de dimensión finita y lo mismo es cierto para $\mathfrak{k}$ pues es un subespacio. Luego $K^* = (K_1)_\tau$ tiene dimensión finita, y lo mismo es cierto para K_τ pues todas las componentes son difeomorfas. Para ver que K es subgrupo embebido, por el Teorema 3.2.4, basta probar que hay un entorno de 0 tal que $\exp(U \cap \mathfrak{k}) = \exp(U) \cap K$. Supongamos que no es así, entonces podemos encontrar una sucesión no nula de vectores $v_j \in \mathfrak{g}$ que tiende a cero, de manera tal que $e^{v_j} \in K$

y que $v_j \notin \mathfrak{k}$ para todo j. A partir de un j todos los e^{v_j} están lo suficientemente cerca de 1 como para poder escribirlos unívocamente como $e^{v_j} = e^{k_j}e^{s_j}$ con $k_j \in \mathfrak{k}$ y $s_j \in S$, el suplemento de $\mathfrak{k}$ (Lema 3.2.7). Notemos que $s_j \neq 0$ para todo j puesto que $v_j \notin \mathfrak{k}$, y entonces pasando a una subsucesión, $s_j/\|s_j\| \to s \in S$ con $s \neq 0$. Pero $e^{s_j} = e^{-k_j}e^{v_j} \in K$ para todo j, luego $s \in \mathfrak{k}$ por el Lema 3.2.6, contradicción. □

Todo subgrupo de Lie de un grupo de Lie-Banach G resulta cerrado (Ejercicio 3.VI) y en dimensión finita todo subgrupo cerrado, como vimos recién, es subgrupo de Lie-Banach. Luego se tiene (en dimensión finita) la equivalencia entre subgrupos cerrados y subgrupos de Lie, conocida como teorema de Cartan. Como puede verse de la demostración, en realidad para garantizar que $K \subset G$ sea subgrupo de Lie (embebido), alcanza con que la codimensión del álgebra suplementada $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ sea finita.

En dimensión infinita no es difícil dar con un contraejemplo:

Ejemplo 3.2.9. Consideramos $G = L^2([0,1],\mathbb{R})$ como grupo de Lie-Banach aditivo y la topología inducida por la norma 2. Tomamos las funciones a valores en $\mathbb{Z}$, es decir $K = L^2([0,1],Z)$, que resulta un grupo de Lie-Banach aditivo, y subgrupo analítico de G. Es fácil ver que K es cerrado en G, pues se tiene convergencia en casi todo punto. Observemos que la exponencial de G es la identidad por ser G un grupo abeliano. Luego el álgebra de Lie de K está dada por

$$\mathfrak{k} = \{f \in G : tf \in K\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Esto sólo es posible si $f = 0$, luego $\mathfrak{k} = \{0\}$, y en consecuencia (en la notación del teorema previo) $K^* = \{0\}$, y luego K_τ tiene entonces que ser discreto. Pero por otra parte, dada $f \in K$, si consideramos la función continua $F : I \times K \to K$ dada por

$$F(t,f)(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq t \\ 0 & t < x \leq 1 \end{cases}$$

nos muestra que K es arco-conexo como subespacio topológico de G. Luego la topología de K como grupo de Lie-Banach no coincide con la topología de K como subespacio de G.

En este ejemplo, y con respecto a la prueba del teorema anterior, notemos que $\mathfrak{g} = \{0\} \oplus \mathfrak{g}$ y una sucesión $v_n \to 0$ con $e^{v_n} \in K$ pero $v_n \neq 0$ para todo n (o sea $v_n \notin \mathfrak{k}$) es, por ejemplo $v_n = \chi_{[0,1/n]}$, ya que el álgebra el nula pero el grupo son las funciones a valores enteros. De la sucesión normalizada $v_n/\|v_n\| = \sqrt{n}\chi_{[0,1/n]}$ no es posible extraer ninguna subsucesión convergente en L^2.

Observación 3.2.10 (Otra prueba del teorema de Cartan). Si no queremos usar las fórmulas de Baker-Campbell-Hausdorff ni el hecho de que la exponencial es un difeomorfismo local (por ejemplo, si estamos en el grupo de difeomorfimos $G = \mathrm{Diff}(M)$

de una variedad de dimensión finita M), podemos probar el teorema de Cartan usando el Teorema de Frobenius. Para eso, necesitamos pedir que además de ser cerrada, la inclusión $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ sea suplementada. La demostración es como sigue: tomamos el subfibrado de $TG \simeq G \times \mathfrak{g}$ dado por $E = \{L_g \mathfrak{k}\}_{g \in G}$. Si $X, Y \in E$, entonces existen A_g, B_g funciones suaves a valores en $\mathfrak{k}$ tales que $X_g = gA_g$, $Y_g = gB_g$. Calculamos

$$[X_g, Y_g] = Y_g'(X_g) - X_g'(Y_g) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\alpha B_\alpha - \beta A_\beta)$$

donde α es el flujo de X, es decir $\dot{\alpha} = X_\alpha = \alpha A_\alpha$, $\alpha(0) = g$, y β es el flujo de Y. Observemos que como $A_\alpha \subset \mathfrak{k}$, entonces su derivada en $t = 0$ (que denotaremos como A_0') permanece en $\mathfrak{k}$. Lo mismo se aplica a B_β. Se tiene

$$[X_g, Y_g] = g[A_g, B_g] + g[B_0', A_0'] \in g\mathfrak{k} = E$$

luego por el Teorema de Frobenius (Observación 2.6.3) el subfibrado E es integrable. Sea K^* la variedad integral conexa maximal de E que pasa por $g_0 = 1$. Primero veamos que se trata de un grupo de Lie: dado $h \in K^*$, sea $M = h^{-1}K^*$. Es claro que M es conexa y contiene a $g = 1$; por otro lado observemos que

$$\begin{aligned} T_{h^{-1}g}M &= \{[\alpha] : \alpha(t) = h^{-1}\beta(t) \text{ con } \beta_0 = g, \beta \subset K^*\} \\ &= L_{h^{-1}} T_g K^* = L_{h^{-1}} L_g \mathfrak{k} = L_{h^{-1}g}\mathfrak{k} = T_{h^{-1}g}K^*. \end{aligned}$$

Entonces M también es una variedad integral por $g = 1$ del subfibrado E, y por la maximalidad debe ser $M = h^{-1}K^* \subset K^*$ y en particular $h^{-1} = h^{-1} \cdot 1 \in M \subset K$, lo que prueba que el inverso de h es también un elemento de K^*. Con un argumento similar se prueba que si $h, k \in K$ entonces $hk \in K$. Como $K^* \subset G$ es subvariedad inmersa, las operaciones producto e inversa se restringen a operaciones suaves en K, y así resulta K^* grupo de Lie. Veamos ahora que la exponencial es la restricción de la de G: si $\nu \in \mathfrak{k}$, consideramos $\alpha(t) = e^{t\nu}$ y la variedad $S = \mathrm{im}(\alpha)$; como $T_{\alpha(t)}S = L_{\alpha(t)}\nu \subset E$, tenemos que S es es una variedad integral del subfibrado E que pasa por $g = 1$; luego $S \subset K^*$. En particular $e^\nu \in K^*$, pero además es claro que α es el flujo del campo invariante a izquierda en K^* que pasa por 1 con velocidad inicial ν, luego $\exp_K = \exp_G|_{\mathfrak{k}}$. De aquí deducimos también que $\exp(\mathfrak{k}) \subset K^*$.

3.3. Integración de morfismos y el revestimiento universal

La integración de un álgebra de Lie (en el caso que sea suplementada), puede tomarse como un caso de integración de morfismos de álgebras de Lie, es decir la búsqueda de un morfismo de grupos de Lie que lo tenga como diferencial en la identidad. Comenzamos con una equivalencia sencilla:

Lema 3.3.1 (Morfismos suaves). *Sea* $f : G \to H$ *morfismo de grupos. Si* G, H *son grupos de Lie, son equivalentes:*

1. f *es suave en un entorno de la identidad*
2. f *es suave*
3. *Existe un operador lineal continuo* $T : L(G) \to L(H)$ *tal que* $\exp_H \circ T = f \circ \exp_G$.

Demostración. Claramente $2 \Rightarrow 3$ por la naturalidad del mapa exponencial (tomando $T = f_{*1}$) y como la exponencial es un difeomorfismo local $\exp_G|_U \to \exp_G(U) = W$, si vale 3 entonces $f = \exp_H \circ T \circ \exp_G|_W^{-1}$ nos muestra que vale 1. Supongamos entonces que f es suave en un entorno W de la identidad, y veamos que es suave en todo G. Dado $g \in G$, tenemos que gW es un entorno de g, veamos que f es suave allí. Para $y \in gW$ se tiene $f(y) = f(gw) = f(g)f(w) = f(g)f(g^{-1}gw) = f(g)f(g^{-1}y)$, es decir

$$f|_{gW} = \ell_{f(g)} \circ f|_W \circ \ell_{g^{-1}} \tag{3.12}$$

y como los tres mapas son suaves, $f|_{gW}$ también lo es. □

Vimos que todo grupo de Lie es analítico en el Teorema 3.1.22. Veamos cómo influye esto en los morfismos:

Teorema 3.3.2 (Suavidad automática). *Si* $f : G \to H$ *es un morfismo continuo de grupos de Lie, entonces* f *es de clase* C^ω.

Demostración. Tomamos $v \in \mathfrak{g}$ y notamos que como f es morfimos continuo, $t \mapsto f(e^{tv})$ es un grupo a un parámetro continuo en H. Entonces, por el Teorema 3.1.12, debe ser $f(e^{tv}) = \exp_H(tz)$ para algún $z \in \mathfrak{h}$; llamemos $z = Lv$, entonces $f(e^{tv}) = e^{Ltv}$. Cambiando v por tv es inmediato de la definición de L que $Ltv = tLv$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Tomemos $v, w \in \mathfrak{g}$ y escribimos mediante la fórmula de Lie-Trotter y la continuidad del morfismo f

$$\begin{aligned} e^{L(tv+tw)} &= f(e^{tv+tw}) = f(\lim_n (e^{tv/n}e^{tw/n})^n) = \lim_n (f(e^{tv/n})f(e^{tw/n}))^n \\ &= \lim_n (e^{Ltv/n}e^{Ltw/n})^n = e^{tLv+tLw}. \end{aligned}$$

Si t es pequeño, usando la inyectividad de la exponencial vemos que $tL(v+w) = tLv + tLw$, y entonces $L(v+w) = v+w$ así que L es lineal. Como $L = \exp_h^{-1} \circ f \circ \exp_G$ en un entorno de 0, vemos que L es continuo en un entorno de 0; como es lineal se deduce que L es un operador lineal continuo. Pero entonces como $f \circ \exp_G = \exp_H \circ L$, vemos que f es analítica pues en las cartas exponenciales es lineal, y así el lema anterior (teniendo en cuenta el Teorema 3.1.22 que dice que todas las operaciones de grupo son analíticas) nos dice que f es analítica en todo G. □

Corolario 3.3.3 (Unicidad de morfismos con la misma derivada). *Si* $f, g : G \to H$ *son morfismos de grupos de Lie con* $f_{*1} = g_{*1}$ *entonces* $f = g$ *en la componente de la identidad de* G.

Demostración. Si $T = f_{*1}$, del lema previo tenemos $f = \exp_H \circ T \circ \exp_G |_W^{-1} = g$ luego coinciden en un entorno de la identidad. Como este entorno genera la componente de la identidad $G_0 = \langle e^v \rangle_{v \in U}$ y f, g son morfismos de grupo, entonces f, g coinciden en G_0:

$$f(e^{v_1} e^{v_2} \cdots e^{v_n}) = f(e^{v_1}) \cdots f(e^{v_n}) = g(e^{v_1}) \cdots g(e^{v_n}) = g(e^{v_1} e^{v_2} \cdots e^{v_n}).$$

□

Proposición 3.3.4 (Morfismos abiertos e isomorfismos). *Sea* $f : G \to H$ *morfismo de grupos de Lie, entonces*

1. f *es una función abierta si y sólo si* f_{*1} *es epimorfismo. En ese caso* $f(G_1) = H_1$.
2. *Si* H *es conexo,* f *es inyectivo y* f_{*1} *es isomorfismo, entonces* f *es un isomorfismo de grupos de Lie.*

Demostración. Si f es abierta, restringiendo adecuadamente tenemos $f_{*1} = \exp_H |_Z^{-1} \circ f \circ \exp_G |_U$ así que f_{*1} es abierta en algún entorno de 0 pues los dos mapas de los lados son difeomorfismos. Pero entonces f_{*1} es abierta y un operador lineal abierto es siempre un epimorfismo. Recíprocamente, supongamos que f_{*1} es epimorfismo, luego por el teorema de la función abierta, es abierta. Entonces $f|_W = \exp_H \circ f_{*1} \exp_G |_W^{-1}$ también lo es. Resta ver que f es abierta globalmente, pero eso es inmediato de (3.12). Como los entornos de la identidad generan la componente conexa de la identidad, se tiene que f es suryectiva entre estos. Si f es inyectiva y f_{*1} es un isomorfismo, lo recién probado, nos dice que f es un homeomorfismo con H. Restringiendo adecuadamente se tiene $f^{-1}|_{f(W)} = \exp_G \circ f_{*1}^{-1} \circ \exp_H |_{f(W)}^{-1}$, luego f^{-1} es suave en un entorno de $1 \in H$ y por el Lema 3.3.1 f^{-1} es suave en H. □

Corolario 3.3.5 (Revestimientos). *Un morfismo* $f : G \to H$ *de grupos de Lie. Son equivalentes:*

1. f *es un revestimiento (todo* $h \in H$ *tiene un entorno* U *tal que* $f^{-1}(U) = \sqcup W_i$ *es unión de abiertos disjuntos con* $f|_{W_i} : W_i \to U$ *difeomorfismo).*
2. f *es abierta con núcleo discreto*
3. f_{*1} *es un isomorfismo.*

Demostración. Supongamos que f es un revestimiento, entonces f es claramente abierta y tomando un entorno U de $1 \in H$ vemos que el núcleo es discreto. Ahora supongamos que f es abierta y con núcleo discreto, como es abierta f_{*1} es un epimorfismo por la proposición previa; por otro lado como $\ker f$ es subgrupo de Lie con álgebra de Lie $\ker f_{*1}$ (Teorema 3.2.5), es discreto si y solo si su álgebra de Lie es nula, y esto ocurre si y sólo si f_{*1} es inyectiva porque

$$\ker f_{*1} = \{v \in \mathfrak{g} : \exp_G(tv) \subset \ker f\}$$

(Observación 3.1.11). Esto prueba que f_{*1} es isomorfismo. Supongamos ahora que f_{*1} es isomorfismo, entonces f es abierta y tiene núcleo discreto, y esto a su vez implica que f es un revestimiento (dejamos los detalles de esto último para el lector). □

Observación 3.3.6 (Relaciones entre centros via morfismos). Si $f : G \to H$ es un morfismo de grupos de Lie que es un revestimiento entre grupos conexos, entonces

$$f(Z(G)) = Z(H) \text{ y } Z(G) = f^{-1}(Z(H)).$$

En efecto, como $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g)^{-1}$, derivando en $h = 1$ tenemos $Ad_{f(g)} \circ f_{*1} = f_{*1} \circ Ad_g$. Entonces como f_{*1} es un isomorfismo por el corolario previo se tiene $Z(G) = \ker Ad_G = f^{-1}Ad_H = f^{-1}(Z(H))$, y la segunda afirmación se sigue la sobreyectividad de f.

Proposición 3.3.7. *Sea $f : G \to H$ morfismo, revestimiento de grupos topológicos (G es conexo y q sobreyectivo). Si G ó H es grupo de Lie, el otro tiene una única estructura de grupo de Lie para la cual f es revestimiento de grupos de Lie.*

Demostración. Restringiendo, podemos tomar $f : U_G \to U_H$ entornos abiertos de la identidad tales que f es homoemorfismo. Supongamos primero que G es grupo de Lie, le damos a G la estructura de variedad copiada por $f|_{U_G}$ en U_H, y trasladando luego con $\{\ell_h\}_{h\in H}$. Veamos que las operaciones son suaves en este entorno de la identidad (la suavidad en todo H se hereda con las traslaciones, como en la prueba del Teorema 3.2.4). Para la inversa, dado $x \in U_H$ tenemos

$$I_H(x) = x^{-1} = f \circ f^{-1}(x^{-1}) = f \circ (f^{-1}(x))^{-1} = f \circ I_G \circ f^{-1}(x),$$

y como f es un difeomorfismo y la inversa en G es suave, vemos que la inversa en H es suave. Para el producto, consideramos la multiplicación local $m_{U_H} : \{(x, y) \in U_H^2 : xy \in U_H\} \to U_H$ y querríamos escribir

$$m_{U_H} = f \circ m_G \circ (f \times f)^{-1} = f \circ m_G \circ f^{-1} \times f^{-1}$$

con f restringido adecuadamente para concluir que m_{U_H} es suave. Para ello, tenemos que asegurarnos que si tomamos $x = f(a), y = f(b) \in U_H$ con $a, b \in U_G$ y los

multiplicamos, su producto sea exactamente $f(ab)$ con $a, b \in U_G$ (porque podría ocurrir que el único $z \in U_G$ tal que $f(z) = f(a)f(b)$ no sea ab, ya que f no es inyectiva). Pero vemos que $f(abz^{-1}) = 1$ y entonces basta reducir U_G lo suficiente, pidiendo $U_G^3 \cap \ker f = \{1\}$, para poder aseverar esto. Entonces H es grupo de Lie y es inmediato que f es un morfismo suave para esta estructura, y que es un revestimiento ya que f es abierta con núcleo discreto. Si ahora suponemos que H es grupo de Lie, podemos hacer una demostración similar para probar que G es grupo de Lie (notar que H también es conexo). □

Observación 3.3.8 (Revestimiento universal). Dado G grupo de Lie, la construcción usual del revestimiento universal $\tilde{G}$ de G como espacio topológico nos da una estructura de grupo topológico en $\tilde{G}$. Entonces el morfismo $q : \tilde{G} \to G$ es un revestimiento y la proposición anterior hace de $\tilde{G}$ un grupo de Lie simplemente conexo y de q un revestimiento de grupos de Lie. Este es el *revestimiento universal* del grupo de Lie G. Notemos que por el Corolario 3.3.5, G y $\tilde{G}$ tienen álgebras de Lie isomorfas (podemos decir que tienen la misma álgebra de Lie).

Es sabido que $\pi_1(G) \simeq \ker q$, que es subgrupo central de G. Además cuando G es grupo de Lie $\pi_1(G)$ es un subgrupo discreto por el corolario anterior, y se tiene $G \simeq \tilde{G}/\ker q$ como grupos de Lie.

Proposición 3.3.9 (Principio de monodromia). *Sea G grupo de Lie conexo, simplemente conexo y sea H un grupo. Si $V^{-1} = V$ es un entorno conexo de $1 \in G$ y $f : V \to H$ tal que $f(xy) = f(x)f(y)$ entonces exsite un único morfismo de grupos $f : G \to H$ que lo extiende. Si además H es grupo de Lie y $f : V \to H$ es suave, la extensión es suave.*

Demostración. Notemos primero que $f(1)^2 = f(1^2) = 1$ y entonces $f(1) = 1$; es más de aquí tenemos también que $1 = f(1) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1})$ luego $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ para $x \in V$. La idea de la extensión es definir $f(x_1 \dots x_k) = f(x_1) \dots f(x_k)$ para $x_i \in V$, pero no es claro que esto no dependa de la representación de $x = x_1 \dots x_k \in G$. Para lidiar con ello, vamos a usar la teoría de revestimientos. Consideramos el grupo $G \times H$ y el gráfico de f allí $U = \{(x, f(x)) : x \in V\}$, con la topología dada por la biyección $x \mapsto (x, f(x))$, con la cual U es un abierto conexo que contiene $e = 1_G \times 1_H$; es más $U = U^{-1}$ pues V es simétrico y f preserva inversas. Tomamos $S = \langle U \rangle \subset G \times H$, que resulta un grupo topológico conexo pues $(x, f(x)) \cdot (y^{-1}, f(y)^{-1}) = (xy, f(xy^{-1}))$ y tanto f como las operaciones en V son continuas. Este grupo contiene la información de G y de f. Ahora consideramos $q = p_G|_S : S \to G$ la restricción a S de la proyección a la primer coordenada. Esta función es un morfismo y un revestimiento porque su restricción a U es un homeomorfismo. Es más, como G es simplemente conexo y S es conexo, entonces q es un homeomorfismo (Ejericico 3.XII). Esta inyectividad

es la que necesitamos, porque podemos considerar $F = p_H \circ q^{-1} : G \to H$, que es un morfismo continuo, y afirmamos que extiende f. En efecto si $x \in V$ entonces $F(x) = p_H q^{-1}(x) = p_H(x, f(x)) = f(x)$. Además la extensión es única porque V genera G, ya que G es conexo. Por último, si f es suave entonces $F|_V = f$ es suave y por el Lema 3.3.1 se sigue que F es suave en G. □

Teorema 3.3.10 (Integrabilidad de morfismos de álgebras de Lie)**.** *Sean G, H grupos de Lie con G conexo y simplemente conexo. Sea $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ morfismo continuo de álgebras de Lie. Entonces existe un único morfismo de grupos de Lie $f : G \to H$ tal que $f_{*1} = \varphi$.*

Demostración. Sea U entorno de $0 \in \mathfrak{g}$ de manera tal que en $U \times U$ la serie $v * w = BCH(v, w) = \exp^{-1}(e^v e^w)$ es convergente (Proposición 3.1.18). Tomemos un entorno W de 0 donde $\exp_G|_W$ es un difeomorfismo y además (achicando U de ser necesario) se garantice $v * w \in W$ si $v, w \in U$. Como φ es morfismo continuo de álgebras de Lie, y $BCH(v, w)$ es una serie convergente en corchetes de Lie, se tiene $\varphi(v*w) = \varphi(v)*\varphi(w)$ para $v, w \in U$. Entonces definimos $f : V = \exp_G(U) \to H$ como $f(e^v) = e^{\varphi(v)}$, que es claramente suave en V, y es además $f_{*1} = \varphi$ es inmediato de la definición. Por otro lado

$$f(e^v e^w) = f(e^{v*w}) = e^{\varphi(v*w)} = e^{\varphi(v)*\varphi(w)} = e^{\varphi(v)} e^{\varphi(w)} = f(e^v) f(e^w),$$

entonces $f : V \to H$ cumple las hipótesis del teorema de monodromía, y existe un único morfismo suave $F : G \to H$ que lo extiende. □

Corolario 3.3.11. *Si G, H son grupos de Lie conexos y simplemente conexos con álgebras de Lie isomorfas, entonces G, H son isomorfos.*

Observación 3.3.12 (Revestimientos). Dado un grupo de Lie G denotamos $q : \tilde{G} \to G$ a su revestimiento universal, donde q es morfismo de grupos de Lie (Observación 3.3.8). Está claro que todo morfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ se levanta al revestimiento, tomando $\tilde{\varphi} = \varphi \circ q_{*1}$. Observemos que como q_{*1} es un isomorfismo, el levantado es esencialmente el mismo morfismo.

Por el teorema anterior entonces se puede integrar todo morfismo φ al revestimiento de manera única. Denotaremos $\tilde{f} : \tilde{G} \to H$ a este morfismo tal que $\tilde{f}_{*1} = \tilde{\varphi}$.

Corolario 3.3.13. *Dos grupos de Lie G, H conexos tienen álgebras de Lie isomorfas si y solo si sus revestimientos universales son isomorfos.*

Demostración. Si los revestimientos universales son isomorfos entonces sus álgebras son isomorfas y así las álgebras de los grupos originales son isomorfas. Recíprocamente, si sus álgebras son isomorfas lo mismo ocurre con las de los revestimientos (que son las mismas) y entonces por el corolario anterior los revestimientos son isomorfos como grupos de Lie. □

En el caso de que G no sea simplemente conexo, el siguiente criterio más fino nos permite decidir cuando un morfismo de álgebras de Lie se integra. Ver el Ejercicio 3.XVI para un ejemplo de un morfismo no integrable.

Teorema 3.3.14. *Sea* G *grupo de Lie conexo,* H *grupo de Lie y sea* $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *morfismo continuo de álgebras de Lie. Entonces* φ *es integrable si y solo si* $\pi_1(G) \subset \ker \tilde{f}$.

Demostración. Recordemos que $\pi_1(G) \simeq \ker q$, y supongamos primero que $f : G \to H$ integra φ, entonces

$$\begin{aligned} f \circ q \circ \exp_{\tilde{G}} &= f \circ \exp_G \circ q_{*1} = \exp_H \circ \varphi \circ q_{*1} \\ &= \exp_H \circ \tilde{\varphi} = \tilde{f} \circ \exp_{\tilde{G}} \end{aligned}$$

por la naturalidad del mapa exponencial con el morfismo q. Esto nos dice que (al menos en un entorno de 1_G) debe ser $\tilde{f} = f \circ q$, y entonces esto es cierto en todo G pues G es conexo. De aquí deducimos que $\ker q = \pi_1(G) \subset \ker \tilde{f}$. Supongamos ahora que $\ker q \subset \ker \tilde{f}$, entonces $f : G \simeq \tilde{G}/\ker q \to H$ dada por $f(q(x)) = \tilde{f}(x)$ está bien definida y es un morfismo continuo pues la topología de G es la final respecto de este cociente. Ahora

$$f \circ \exp_G \circ q_{*1} = f \circ q \circ \exp_{\tilde{G}} = \tilde{f} \circ \exp_{\tilde{G}} = \exp_H \circ \varphi \circ q_{*1}$$

y como q_{*1} es isomorfismo se tiene $f \circ \exp_G = \exp_H \circ \varphi$. Esto prueba que f es suave y además que f integra φ. □

3.4. Los grupos de automorfismos

Veamos ahora un teorema que nos permite identificar el grupo de isomorfismos de un grupo de Lie con un grupo lineal. Sea $L : \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ el mapa $L(f) = f_{*1}$, donde GL es el grupo de operadores lineales inversibles en $\mathfrak{g}$ (que es un abierto en el espacio de Banach $B(\mathfrak{g})$, los operadores acotados en $\mathfrak{g}$). Denotamos $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ a los isomorfismos de álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, que es un subgrupo cerrado de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, notemos que la imagen de L cae dentro de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Observación 3.4.1. Como $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \{T \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) : T[v, w] - [Tv, Tw] = 0\}$, se trata de un subgrupo algebraico. Entonces es un subgrupo de Lie embebido (ver el próximo capítulo).

Le damos a $\mathrm{Aut}(G)$ la siguiente base de entornos de la identidad: tomamos la carta exponencial $(W, \exp^{-1})$ de G y para cada $K \subset W$ cerrado y cada $U \subset W$ abierto simétrico tal que $K \subset U$ consideramos

$$N(K, U) = \{f \in \mathrm{Aut}(G) : f(x)x^{-1} \in\subset U, f(x)^{-1}x^{-1} \in U\};$$

notar que $\mathrm{id}_G \in N(K, U)$. Esto hace de $\mathrm{Aut}(G)$ un grupo topológico para la composición, trasladando estos abiertos (ver [50, Chapter III.3] para los detalles). Denotaremos esta topología como τ_G. Tiene la propiedad fundamental siguiente: la evaluación es continua, y si $\alpha : H \to \mathrm{Aut}(G)$ es un morfismo de un grupo topológico H, entonces f es continuo si y solo si $(h, g) \mapsto \alpha(h)(g)$ es continuo. En el caso de $G = E$ un espacio de Banach pensado como grupo conmutativo, la topología τ_E coincide con la usual de $\mathrm{GL}(E)$.

Teorema 3.4.2. *Sea G grupo de Lie conexo, simplemente conexo. Entonces $L : \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ es un isomorfismo, y L^{-1} es continua. Si $\dim(G) < \infty$, entonces L es un homeomorfismo.*

Demostración. Que L es sobreyectiva es claro del teorema de integrabilidad de morfismos (Teorema 3.3.10), y que es inyectiva es inmediato del hecho de que si dos morfismos tienen la misma diferencial en 1 entonces coinciden (Corolario 3.3.3). Por la regla de la cadena $L(fg) = f_{*1}g_{*1} = L(f)L(g)$ así que L es morfismo de grupos. Las afirmaciones sobre la continuidad de L^{-1}, L se prueban en [50, Chapter IX], la prueba para L^{-1} se adapta verbatim para el caso Banach. □

Observación 3.4.3. El grupo de Lie embebido $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ le da a $\mathrm{Aut}(G)$ (via L) una estructura de grupo de Lie. Como L^{-1} es continua, la topología de esta estructura es más gruesa que la original (tiene menos abiertos). Pero si el grupo G tiene dimensión finita, el teorema anterior nos dice que L es un homeomorfismo, así que la topología de la estructura de variedad coincide con la original, que era la compacto abierta.

Podemos extender este resultado a cualquier grupo conexo, si vemos que L tiene imagen cerrada. Primero un lema, sea $q : \tilde{G} \to G$ un revestimiento universal de G, recordemos que q_{*1} es un isomorfismo.

Lema 3.4.4. *Sea G conexo. Si $\overline{\theta} \in \mathrm{Aut}(\tilde{G})$ fija $\ker q$, entonces existe $\theta \in \mathrm{Aut}(G)$ tal que $q\overline{\theta} = \theta q$. Recíprocamente, para cada $\theta \in \mathrm{Aut}(G)$ existe $\overline{\theta} \in \mathrm{Aut}(\tilde{G})$ que fija $\ker q$, y tal que $q\overline{\theta} = \theta q$.*

Demostración. Si $\widetilde{\theta}$ es automorfismo del revestimiento, sea $\varphi = q_{*1}\overline{\theta}_{*1}q_{*1}^{-1}$ que automorfismo de $\mathrm{Lie}(G)$. Como $\tilde{\varphi} = \varphi q_{*1} = q_{*1}\overline{\theta}_{*1}$ es el morfismo que lo levanta, vemos que $\tilde{f} = q\overline{\theta} : \tilde{G} \to G$ es el único morfismo que integra $\widetilde{\varphi}$. Si θ fija $\ker q$ en particular $\ker q \subset \ker q\overline{\theta}$, y entonces por el Teorema 3.3.14 el automorphismo φ se integra a un automorfismo $\theta : G \to G$ tomando $\theta(q(g)) = q(\overline{\theta}(g)$. Es claro que $\theta q = q\overline{\theta}$. Recíprocamente, si θ es automorfismo de G, tomamos

$$q_{*1}^{-1}\theta_{*1}q_{*1} = \mathrm{Ad}^{-1}_{q_{*1}}\theta_{*1}$$

que es automorfismo de Lie($\tilde{G}$) así que se integra a un automorfismo $\overline{\theta}$ de $\tilde{G}$. Para cada $\nu \in$ Lie($\tilde{G}$ cerca de 0 tenemos

$$q\overline{\theta}(e^{\nu}) = q(e^{q_{*1}^{-1}\theta_{*1}q_{*1}\nu}) = e^{\theta_{*1}q_{*1}\nu} = \theta q(e^{\nu})$$

luego $q\overline{\theta} = \theta q$. □

Denotemos $K \subset \mathrm{Aut}(\tilde{G})$ al subgrupo que fija $\ker q$, este es cerrado y por lo recién discutido, si $\dim(G) < \infty$, será $\dim(\tilde{G}) < \infty$ luego $\mathrm{Aut}(\tilde{G})$ es grupo de Lie, luego K también lo es, ya que es subgrupo de Lie embebido. Por el lema anterior, podemos identificar $\mathrm{Aut}(G)$ con K y mediante esta identificación, $\mathrm{Aut}(G)$ es grupo de Lie.

Afirmamos que $L(K)$ es cerrado en $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, para ello tomemos $\overline{\theta_n} \in K$ y sea $T \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ tal que $L(\theta_n) \to T$. Tomemos $\overline{\theta}$ morfismo que integra T en $\overline{G}$, como todos los θ_n fijan $\ker q$ que es cerrado, es fácil ver que $\overline{\theta}$ fija $\ker q$.

Teorema 3.4.5. *Sea G conexo, entonces $L(\mathrm{Aut}(G))$ es cerrado en $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, y la topología que induce L en $\mathrm{Aut}(G)$ es más gruesa que τ_G. Si $\dim(G) < \infty$, entonces $L(\mathrm{Aut}(G))$ es subgrupo de Lie embebido y la topología que hace de L un difeomorfismo coincide con τ_G.*

Demostración. Mirando la prueba del lema, para $\theta \in \mathrm{Aut}(G)$ vimos que

$$\theta \mapsto \mathrm{Ad}_{q_{*1}}^{-1} L(\theta) = L(\overline{\theta})$$

es una biyección si $\overline{\theta}$ fija $\ker q$, esto es $L(\mathrm{Aut}(G)) = \mathrm{Ad}_{q_{*1}} L(K)$. Como $L(K)$ es cerrado también lo es $L(\mathrm{Aut}(G))$. Las demás afirmaciones se siguen de las consideraciones previas. □

Miremos ahora el mapa $c : G \to \mathrm{Aut}(G)$ dado por

$$c(g)(h) = c_g(h) = ghg^{-1},$$

enviamos g a la conjugación por g (claramente un automorfimo de G). Notamos que la aplicación c es un morfismo de grupos de Lie, pero no es necesariamente inyectivo:

$$\ker(c) = \{g \in G : ghg^{-1}h \quad \forall h \in G\} = Z(G).$$

Luego tenemos una inyección dada por $L \circ c$,

$$G/Z(G) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$$

mediante la cual podemos afirmar que $G/Z(G)$ es un grupo (inmerso) de operadores.

Cabe preguntarse cuándo tendrá la topologia de subespacio (cuando $G/Z(G)$ es subgrupo de Lie de $GL(\mathfrak{g})$). Por ejemplo si $G/Z(G)$ es compacto, su imagen será un subgrupo compacto (en particular cerrado) de $GL(\mathfrak{g}) \simeq M_n(\mathbb{R})$, y por el Teorema de Cartan será un grupo lineal.

Observación 3.4.6 (Representación adjunta de un álgebra de Lie y el teorema de Ado). Sea $\mathfrak{h}$ álgebra de Lie, actuando sobre si misma con la acción adjunta $\mathfrak{ad} : \mathfrak{h} \to L(\mathfrak{h})$, donde $\mathfrak{ad}(v)(w) = [v, w]$. Es fácil ver que $\mathfrak{ad}$ es una representación de $\mathfrak{h}$ (por Jacobi, $\mathfrak{ad}$ es un morfismo de álgebras de Lie, la estructura de Lie de la llegada es el conmutador usual de transformaciones lineales $[T, W] = T \circ S - S \circ T$). También es fácil ver que el núcleo de la representación adjunta es el centro del álgebra $z(\mathfrak{h})$.

Entonces toda álgebra con centro trivial "es" un álgebra de operadores, via la representación adjunta, que es fiel. Es un álgebra de matrices si tiene dimensión finita: si $\dim(\mathfrak{h}) = n$, entonces la inyección es en $M_n(\mathbb{C})$ que tiene dimensión $n \times n$.

El Teorema de Ado (que no probaremos aquí, ver Theorem 2, §7 en [20]) dice que toda álgebra de Lie de dimensión finita $\mathfrak{h}$ admite una representación fiel en un álgebra de matrices (se inyecta con un morfismo de álgebras de Lie en $M_k(\mathbb{C})$, con k en general mucho mayor a $n \times n$).

El teorema del subgrupo nos dice que entonces toda álgebra de Lie de dimensión finita es integrable a un grupo de Lie de matrices H -un subgrupo de $G = GL_k(\mathbb{C})$-.

Observación 3.4.7 (Álgebras que no se integran). Hay álgebras de Lie-Banach que no son álgebras de operadores, hay álgebras se Lie-Banach que no se pueden integrar (resultado de van Est y Korthagen de 1964 [39]).

3.5. Espacios homogéneos

Dado un grupo de Lie-Banach G y un espacio X, supongamos que tenemos una acción $\ell : g \to \ell_g$ de G en X, es decir, un aplicación $\ell : G \to \mathrm{Aut}(X)$ que es un homomorfismo en el sentido que

$$\ell_h(\ell_g(x)) = \ell_{hg}(x),$$

y que $\ell_1 = \mathrm{id}_X$. Si X es una variedad diferenciable, suponemos que ℓ_g es un difeomorfismo de X para todo $g \in G$. Denotamos al conjunto de los difeomorfismos de X con $\mathrm{Diff}(X)$.

Supongamos que la acción de G es transitiva, es decir, si $G \cdot x = \ell_G(x) = \mathcal{O}(x)$ denota la órbita de un $x \in X$ cualquiera, entonces $G \cdot x = X$. En este caso diremos que X es un *espacio homogéneo de* G.

Lema 3.5.1 (Órbitas). *Supongamos que* G *actúa en* X. *Entonces*

1. *Si existe* $x \in X$ *tal que* $G \cdot x = X$, *entonces para todo* $y_1, y_2 \in X$ *existe* $g \in G$ *tal que* $g \cdot y_1 = y_2$. *En particular* $G \cdot y = X$ *para todo* $y \in X$.
2. *Las órbitas son disjuntas, luego* $X = \sqcup_i \mathcal{O}(x_i)$ *para ciertos* $x_i \in X$. *Si* G *es conexo las órbitas son conexas.*

Demostración. Existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $g_i \cdot x = y_i$, luego $x = g_1^{-1} \cdot y_1$ y así $y_2 = g_2 \cdot x = g_2 \cdot (g_1^{-1} \cdot y_1) = g \cdot y_1$ con $g = g_2 g_1^{-1}$. Esto prueba la primer afirmación. Una cuenta similar prueba que las órbitas son disjuntas. Por último, si G es conexo, $\mathcal{O}(x) = \pi_x(G)$ es conexo porque π_x es continua. □

Definición 3.5.2 (Isotropía)**.** La *isotropía* de $x \in X$ es el conjunto

$$K_x = \{g \in G : g \cdot x = x\},$$

esto es, la fibra de x en G por la acción. Es fácil ver que este es un subgrupo cerrado de G, puesto que puede pensarse como la fibra de la aplicación $\pi_x : G \to X$ dada por $\pi_x(g) = g \cdot x$. Se denomina también por ese motivo *grupo estabilizador* de x por la acción.

Cabe preguntarse si K_x es una subvariedad de G, es decir si $K_x \subset G$ es un subgrupo de Lie-Banach, discutiremos eso luego. Ciertamente $\mathcal{O}(x) \simeq G/K_x$ como conjuntos, donde la proyección al cociente $q : G \to G/K_x$ se identifica con la proyección $\pi_x : G \to \mathcal{O}(x)$, y también

$$K_{g\cdot x} = gK_x g^{-1}.$$

Una manera más sistemática de presentar una acción (y cuidando la suavidad de los mapas involucrados) es la siguiente:

Definición 3.5.3 (Acción de un grupo en un espacio)**.** Tomamos el espacio X y una función

$$A : G \times X \to X$$

que se denota $\pi(g, x) = g \cdot x \in X$. Los axiomas de acción (a izquierda) son: $A(1, x) = x$ para todo $x \in X$, $A(gh, x) = A(g, A(h, x))$ para todo $g, h \in G$, $x \in X$.

De acuerdo a nuestra notación anterior, $\pi_x = A(\cdot, x)$, mientras que $\ell_g = A(g, \cdot)$. Los axiomas de la acción son entonces que $\ell_1 = \mathrm{id}_X$, y que $\ell_{gh} = \ell_g \circ \ell_h$.

Observemos que, como

$$\ell_g \circ \pi_x = \pi_x \circ \ell_g$$

para todo $x \in X$, $g \in G$, se verifica

$$(\ell_g)_{*x} \circ (\pi_x)_{*1} = (\pi_x)_{*g} \circ L_g. \tag{3.13}$$

Ahora ℓ_g es un difeomorfismo de G y como tal $(\ell_g)_*$ es un isomorfismo, luego

$$(\pi_x)_{*g} = (\ell_g)_{*x} \circ (\pi_x)_{*1} \circ L_{g^{-1}},$$

lo que prueba que el comportamiento de las derivadas de π_x es el mismo (independiente de $g \in G$).

Observación 3.5.4. Si $(\pi_x)_{*1}$ es un epimorfismo directo, entonces lo mismo vale para $(\pi_x)_{*g}$ para todo $g \in G$, de lo que resulta que π_x es una sumersión, y de allí que, como $K_x = \pi_x^{-1}(x)$, resulte K_x subvariedad de G por el teorema de la función implícita, Teorema 2.4.4.

En el caso de que la acción A sea suave, tenemos entonces la identificación natural siguiente:

Lema 3.5.5 (Algebra de Lie de la isotropia)**.** *Sea $A : G \times X \to X$ acción suave de un grupo de Lie en una variedad X, sea $x \in X$ y sea $K_x = \pi_x^{-1}(\{x\})$ el estabilizador de x por la acción. Entonces*

$$\mathrm{Lie}(K_x) = \ker(\pi_x)_{*1}.$$

Demostración. Como K_x es subgrupo cerrado su álgebra de Lie está caracterizada por la exponencial (Proposición 3.2.3 y el lema que le precede). Vemos la inclusión $\subset$: si $v \in \mathrm{Lie}(K_x)$, tenemos $e^{tv} \in K_x$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego $\pi_x(e^{tv}) = e^{tv} \cdot x$ para todo t y derivando en $t = 0$ vemos que $(\pi_x)_{*1} v = 0$ y así $v \in \ker(\pi_x)_{*1}$. Ahora veamos la otra inclusión $\supset$: si $(\pi_x)_{*1} v = 0$ consideremos la curva $\pi_x(e^{tv})$. Afirmamos que es constante; para ello derivamos y mediante la ecuación (3.13)

$$\frac{d}{dt}\pi_x(e^{tv}) = (\pi_x)_{*e^{tv}} L_{e^{tv}} v = (\ell_{e^{tv}})_{*x} (\pi_x)_{*1} v = 0.$$

Como la derivada es siempre nula, la curva es constante y así $\pi_x(e^{tv}) = \pi_x(e^0) = 1 \cdot x = x$. Esto prueba que $e^{tv} \in K_x$ para todo t y así $v \in \mathrm{Lie}(K_x)$. □

Recordamos que un subgrupo partido (o regular) es uno que es embebido y tal que el espacio tangente es suplementado, existe un subespacio cerrado $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ tal que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathrm{Lie}(K).$$

Teorema 3.5.6. *Sea G un grupo de Lie-Banach y $K \subset G$ un subgrupo de Lie-Banach regular (partido). Entonces existe una única estructura diferenciable en G/K que hace del mapa cociente $q : G \to G/K$ una sumersión (diferenciable, epimorfismo y con núcleo que se parte). El espacio modelo de G/K es el suplemento $\mathfrak{m}$ del álgebra de Lie de K.*

Para demostrar este teorema, seguimos los lineamientos del libro de Beltiţă [17, Teorema 4.19]. Necesitamos antes algunos preliminares, denotaremos como es habitual $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$, escribimos $\mathfrak{g} \ni z = x + y \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{k}$.

1. Tomamos $\delta_1 > 0$ tal que $z = x + y \mapsto e^x e^y$ sea un difeomorfismo con su imagen cuando $\|z\| < \delta_1$ (Lema 3.2.7) y que además $\exp|_B : B \to \exp(B) \subset G$ es un difeomorfismo, donde B es la bola en $\mathfrak{g}$ de radio δ_1.

2. Achicando δ_1, podemos suponer que $k \in K \cap \exp(B)$ implique $k = e^y$ para algún $y \in \mathfrak{k}$ (K es embebido); notemos que debe ser $y \in B$.

3. Tomamos $0 < \delta \leq \delta_1$ tal que $e^{x_1} e^{x_2} \in \exp(B)$ si $\|x_i\| < \delta$.

Sea

$$B_\delta = \{x \in \mathfrak{m} : \|x\| < \delta\},$$

y para cada $g \in G$, sea

$$W_g = \{q(ge^x) : x \in B_\delta\} \subset G/K.$$

Lema 3.5.7. *Para cada $g \in G$, $x \mapsto q(ge^x)$ es una biyección entre B_δ y W_g. Además cada W_g es abierto en G/K con la topología cociente.*

Demostración. En efecto si $q(ge^{x_1}) = q(ge^{x_2})$ entonces existe $k \in K$ tal que $qe^{x_1} = ge^{x_2}k$ es decir $e^{x_1} = e^{x_2}k$ o sea $k = e^{-x_2}e^{x_1} \in \exp(B)$, así que $k = e^z$ para algún $y \in \mathfrak{k} \cap B$. Pero entonces $e^{x_1}e^0 = e^{x_2}e^y$ implica $y = 0$ o equivalentemente $x_1 = x_2$ por la elección de δ_1. Por otro lado $U_g = \{ge^x : x \in \mathfrak{g}, \|x\| < \delta\}$ es un abierto entorno de $g \in G$, y como $W_g = q(U_g)$ entonces W_g es abierto entorno de $q(g)$ en G/K con la topología cociente. □

Definimos entonces un atlas para G/K como $\{(W_g, \varphi_g)\}_{g \in G}$ donde $\varphi_g(ge^x) = x$, notemos que $\varphi^{-1}(x) = q(ge^x)$. Este atlas tiene la topología cociente de G/K. Resta ver que es un atlas compatible, y eso es lo que sigue:

Demostración. (del Teorema 3.5.6). Notamos que

$$\varphi_g \circ q \circ L_g \circ \exp = \mathrm{id}_{B_\delta} \quad \text{and} \quad q \circ L_g \circ \exp \circ \varphi_g = \mathrm{id}_{W_g}.$$

Con esto, es claro que cada φ_g es homeomorfismo sobre su imagen con inversa $q \circ L_g \exp \circ$. Por otro lado

$$(\varphi_g \circ q)(ge^x) = x = \exp|_{B_\delta}^{-1} \circ L_g^{-1}(ge^x),$$

y en particular $\varphi_g \circ q : g\exp(B_\delta) \to B_\delta$ es suave, de hecho analítica real, con inversa $L_g \circ \exp|_{B_\delta}$. Ahora supongamos que $W_{g_1} \cap W_{g_2} \neq \emptyset$: entonces en $\varphi_{g_2}(W_{g_1} \cap W_{g_2}) \subset \mathfrak{m}$ tenemos

$$\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}^{-1} = \varphi_{g_1} \circ q \circ L_{g_2} \circ \exp|_{B_\delta} = \exp|_{B_\delta}^{-1} \circ L_{g_1}^{-1} \circ L_{g_2} \circ \exp|_{B_\delta}$$

lo que prueba la compatibilidad de las cartas, que resultan analíticas reales. La unicidad de esta estructura queda como ejercicio para el lector. □

Un corolario del teorema de la función implícita sin suplementos debido a An y Neeb [3, Cor. 4.3] es el siguiente:

Teorema 3.5.8. *Sea* G *un grupo de Lie-Banach y* $K \subset G$ *un subgrupo cerrado. Supongamos que* G/K *tiene estructura de variedad de Banach, y supongamos que el mapa cociente* $q : G \to G/K$ *es diferenciable y que, en algún punto* $g_0 \in G$, q *tiene diferencial suryectiva. Entonces* K *es un subgrupo de Lie-Banach embebido de* G.

La recíproca de este enunciado es una conjetura que por ahora no está resuelta (claro que si q se parte entonces estamos en la situación del Teorema 3.5.6). Sin embargo, si K es un subgrupo normal de G, entonces sí vale la recíproca, la prueba puede verse en un trabajo de K. Glockner y K.-H. Neeb [41].

3.5.1. Órbitas

Otro problema relacionado con el anterior es el siguiente: supongamos que G es un grupo de Lie-Banach y que M es una variedad diferenciable y que hay una acción suave $\ell : G \to \mathrm{Diff}(M)$. Si la acción *no* es transitiva, dado $x \in M$ la órbita $\mathcal{O}(x) \subset M$ es un subconjunto propio. Cabe preguntarse si $\mathcal{O}(x)$ tiene estructura de variedad diferenciable y si $\mathcal{O}(x) \subset M$ es una subvariedad -inmersa, embebida- de M.

Observación 3.5.9. Recordemos que un *mapa cociente* es una función continua y sobreyectiva $q : A \to B$ entre espacios topológicos tal que, si $U \subset B$ es tal que $q^{-1}(U) \subset A$ es abierto, entonces U era abierto.

Dada $f : A \to B$ sobreyectiva y continua, una función continua $s : B \to A$ es una *sección* si $f \circ s = \mathrm{id}_B$. En caso de existir una sección continua, f resulta un mapa cociente pues si $U \subset B$ es tal que $f^{-1}(U) \subset A$ es abierto, entonces $U = s^{-1}f^{-1}(U)$ es abierto.

Si $f : A \to B$ es continua, suryectiva y abierta (o cerrada) es fácil ver que f es un mapa cociente, pero la recíproca no es cierta. Por ejemplo si

$$A = \{(x, y) : x \geq 0, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, y) : x \leq 0, y = 0\}$$

y $q = \pi_1|_A : A \to \mathbb{R}$, entonces es fácil ver que q es una proyección porque tiene una sección continua dada por $s(x) = (x, 0)$. Sin embargo q no es abierta pues si

$$V = \{(x, y) : x \geq 0, y > 0\},$$

entonces $V \subset A$ es abierto pero $q(V) = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ no es abierto.

Sin embargo si $f : A \to B$ es de clase C^k y tiene una sección $s : B \to A$ de clase C^k ($k \geq 1$), entonces f_* es sobreyectiva y su núcleo se parte. Luego el teorema de la función implícita (Teorema 1.7.11) nos dice que f es una proyección y en particular es abierta. Los detalles están en el siguiente teorema.

Teorema 3.5.10. *Sea* $A : G \times M \to M$ *una acción suave,* $a \in M$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}(a) \subset M$ *la órbita de* a *por la acción. Si denotamos* $\pi = \pi_a : g \mapsto g \cdot a$, *supongamos que existe un abierto* $U_0 \subset M$ *entorno de* a *y una sección suave* $s : U = U_0 \cap \mathcal{O} \to G$ *tal que*

$$\pi \circ s = id_U, \quad s(a) = 1.$$

Entonces $\mathcal{O} \subset M$ *es una subvariedad de* M, $\operatorname{ran}(s_*) \subset \mathfrak{g}$ *es un espacio de Banach tal que*

$$\operatorname{ran}(s_*) \oplus \ker(\pi_*) = \mathfrak{g},$$

y $K_a = \{g \in G : g \cdot a = a\}$ *es subgrupo de Lie-Banach regular con álgebra de Lie-Banach* $\mathfrak{k} = \ker(\pi_*)$. *Además* $\pi : G \to \mathcal{O}$ *es una proyección y en particular abierta.*

Demostración. Dado $x = g \cdot a = \pi_a(g) \in \mathcal{O}$, consideramos el conjunto

$$U_x = \ell_g(U) = \{g \cdot p : p \in U\} \subset M$$

que es un entorno abierto de $x \in M$, y la sección $s_x : U_x \to gVg^{-1} \subset G$ dada por $s_x(g \cdot p) = gs(p)g^{-1}$. Entonces s_x es suave, $s_x(x) = s_x(g \cdot a) = gs(a)g^{-1} = 1$ y

$$\pi_x \circ s_x(g \cdot p) = gs(p)g^{-1}g \cdot a = g \cdot (s(p) \cdot a) = g \cdot p$$

para todo $p \in U$, es decir $\pi_x \circ s_x = id_{U_x}$. Ahora $\operatorname{ran}(s_*) \subset \mathfrak{g}$ es un subespacio cerrado pues, si $v_n = s_*(y_n) \to v \in \mathfrak{g}$ (con $y_n \in T_aM$) entonces

$$s_*\pi_*(v) = \lim s_*\pi_*(v_n) = \lim s_*(y_n) = v$$

lo que prueba que $v \in \operatorname{ran}(s_*)$. Por otra parte dado $w \in \mathfrak{g}$ tomamos $h = s_*\pi_*(w) \in \operatorname{ran}(s_*)$ y descomponemos $w = w - h + h$ con $w - h \in \ker(\pi_*)$. La suma es directa pues si $w \in \operatorname{ran}(s_*) \cap \ker(\pi_*)$ entonces $w = s_*z$ para algún $z \in T_aM$ pero

$$z = \pi_*s_*z = \pi_*w = 0$$

lo que nos dice que $w = 0$. En consecuencia el grupo de isotropía $K_a = \pi^{-1}(a)$ es una subvariedad regular de G por el teorema de la función implícita (Observación 3.5.4). Por último, como π_* es sobreyectiva y su núcleo se parte, π es una proyección por el teorema de la función implícita (Teorema 1.7.11). □

El siguiente lema, originalmente debido a Ian Raeburn [79], es un criterio útil para ver si la órbita $\mathcal{O}(x) \subset M$ es subvariedad.

Lema 3.5.11. *Sea* G *un grupo de Lie-Banach, con una acción diferenciable en un espacio de Banach* X. *Sea* $\mathcal{O}(x) = \{g \cdot x : g \in G\} \subset X$ *la órbita de* x *con la topología heredada. Supongamos que*

1. $\pi_x : G \to \mathcal{O}(x)$ *es abierta.*
2. *La diferencial* $(\pi_x)_{*1} : \mathfrak{g} \to X$ *parte al espacio, tanto el núcleo como el rango.*

Entonces $\mathcal{O}(x) \subset X$ *es una subvariedad regular (partida) de* X*, y la función* $\pi_x : G \to \mathcal{O}(x)$ *es una sumersión.*

Demostración. Sea $\mathfrak{k} = \ker(\pi_x)_{*1}$; por hipótesis $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{k}$ para algún subespacio cerrado $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$. Consideramos la aplicación $\Theta : (v, w) \mapsto e^v e^w$ con $v \in \mathfrak{m}, w \in \mathfrak{k}$ que transforma un entorno U de $0 \in \mathfrak{g}$ en un entorno V de $1 \in G$ (Lema 3.2.7). Para $z \in \mathfrak{g}$, ahora consideramos $\psi(z) = \Theta(z) \cdot x$ que es diferenciable, $\psi : U \to X$ y toma valores en $\mathcal{O}$. Como $e^w \cdot x = x$ para todo $w \in \mathfrak{k}$, tenemos $\psi(v, w) = \psi(v, 0)$. Si llamamos

$$J = \psi(U \cap \mathfrak{m}) = \Theta(U) = \pi_x(V),$$

se tiene $x \in J \subset \mathcal{O}$ y además J es abierto en $\mathcal{O}$ por la primer hipótesis. Esto prueba que $\mathcal{O}$ es un variedad diferenciable y un espacio homogéneo para G, pues trasladando con la acción a izquierda del grupo se obtiene un resultado similar para cualquier $x' \in \mathcal{O}$ (los detalles, algo tediosos, son similares a los de la demostración de la estructura diferenciable para un grupo a partir de la estructura de grupo de Lie local).

Si $X = \operatorname{ran}(\pi_x)_{*1} \oplus S$ con $S \subset X$ subespacio cerrado, consideramos la aplicación $\Psi : \mathfrak{m} \oplus S \to X$ dada por $(v, s) \mapsto \psi(v) + s$. Se tiene

$$\Psi_{*0}(v, s) = v + s$$

y del teorema de la función inversa deducimos que Ψ es un difeomorfismo entre un entorno V de $0 \in \mathfrak{m} \oplus s$ en un entorno W de $x \in X$. Si consideramos (W, φ) con $\varphi = \Psi^{-1}|_W$, esta es una carta de X alrededor de x y además $\varphi(W \cap \mathcal{O}) = \mathfrak{m} \cap V$ lo que prueba que $\mathcal{O}$ es localmente una subvariedad. Nuevamente, un argumento de traslación por medio de los mapas ℓ_g, nos dice que $\mathcal{O}$ es en efecto una subvariedad de X. □

Observación 3.5.12 (Espacios simétricos de Cartan). Como veremos en la Sección 7.5.2, ciertos espacios homogéneos se pueden presentar como el cociente de un grupo de Lie G por el subgrupo de puntos fijos de un automorfismo involutivo $\sigma : G \to G$. En ese caso el subgrupo es de Lie y el cociente admite una estructura de variedad diferenciable que hace de $q : G \to G/K$ una sumersión.

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 104

3.A. Problemas

3.I. Una función $f : X \to Y$ es C^k si y sólo si su gráfico $Gr = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$ es una subvariedad regular y para cada $x \in X$, se verifica

$$T_{(x,f(x))}X \times Y = T_{(x,f(x))}Gr \oplus T_{(x,f(x))}\{x\} \times Y.$$

Sugerencia: probar primero que $pr_1|_{Gr} \to X$ es un difeomorfismo y considerar la función $pr_2 \circ (pr_1|_{Gr})^{-1}$.

3.II. Si G es grupo de Lie-Banach, el gráfico de $g \mapsto g^{-1}$ se puede pensar como la superficie de nivel $m^{-1}(e)$ con e la identidad de G y $m : G \times G \to G$ el producto $m(x, y) = xy$. La aplicación m es una sumersión (es decir su diferencial es un epimorfismo con núcleo que se parte). Concluir que si el producto es de clase C^k en el grupo G, también lo es la inversión.

3.III. Si G es un grupo topológico, $m : G \times G \to G$ denota el producto y V es un entorno abierto de $e \in G$, tomamos $W \subset V$ abierto tal que $c_{y^{-1}}(W) \subset V$. Probar que si $h, \overline{h} \in xW, yW$ respectivamente entonces

$$m(h, \overline{h}) = \ell_{xy} \circ m\big|_{V \times V} \circ (c_{y^{-1}} \times \mathrm{id}) \circ (\ell_{x^{-1}} \times \ell_{y^{-1}})(h, \overline{h}).$$

3.IV. Probar que si $v \in \mathfrak{g}$ (el álgebra de Lie-Banach del grupo G) y X_v denota el único campo invariante a izquierda tal que $X_v(1) = v$, entonces $\phi_v(t) = \alpha_v(t, 1)$ (α_v como siempre denota el flujo de X_v) es un homomorfismo, es decir

$$\phi_v(s + t) = \phi_v(s)\phi(t) = \phi_v(t)\phi_v(s)$$

para $s, t \in \mathbb{R}$ en el dominio de $\alpha_v(\cdot, e)$.

3.V. Sea G un grupo de Lie-Banach, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie-Banach. Sean $v, w \in \mathfrak{g}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$ la aplicación dada por $t \mapsto Ad_{e^{tv}}(w) = e^{tv}we^{-tv}$. Probar que $\dot{g}(0) = ad_v(w) = [v, w]$.

3.VI. Sea G grupo de Lie-Banach, $K \subset G$ subgrupo (o sea es subvariedad embebida). Probar que K es cerrado en G.

3.VII. Sea G grupo topológico. Dado un subconjunto $A \subset G$ denotamos $\langle A \rangle \subset G$ al *subgrupo generado* por los productos finitos de los elementos de A y sus inversas.

- Probar que la componente conexa G_e de la identidad de G es subgrupo.
- Probar que G_e es un subgrupo invariante (normal).
- Probar que G_e es un subgrupo cerrado.

- Probar que si $W \subset G$ es entorno abierto de 1, entonces $\langle W \rangle = G_e$.

Supongamos que además G es un grupo de Lie-Banach de clase C^k, $k \geq 1$.

- Probar que G_e es abierto.
- Probar que G/G_e es discreto.
- Probar que $\langle \exp(v) \rangle_{v \in \mathfrak{g}} = G_0$.

3.VIII. Si G es un grupo de Lie-Banach, probar que $[X, Y] = 0$ para todo par de campos invariantes a izquierda implica que G es un grupo conmutativo. Probar la implicación recíproca si G es conexo.

3.IX. Si F, G son funciones enteras y ρ_F, ρ_G denotan los respectivos órdenes, probar que

$$\rho_{F+G}, \rho_{FG} \leq \max\{\rho_F, \rho_G\}.$$

Probar que $\operatorname{sen}(z), \cos(z), \frac{\operatorname{sen}(z)}{z}, \frac{\tan(z)}{z}, \frac{1-e^z}{z}$ tienen orden menor o igual a uno.

3.X. Probar que $\exp^{-1}(e^v e^w) = v + \int_0^1 g(e^{t\operatorname{ad} v} e^{t\operatorname{ad} w}) w \, dt$, con $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función entera dada por

$$g(\lambda) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} (\lambda - 1)^n.$$

3.XI. Desarrollando $(e^{t\operatorname{ad} v} e^{t\operatorname{ad} w} - 1)^{n-1}$ en serie, probar la fórmula de Dynkin para $\mathrm{BCH}(v, w)$ dada por

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{1}{(i_1 + j_1) + \cdots + (i_n + j_n)} \frac{[v^{(i_1)}, w^{(j_i)}, \cdots, v^{(i_n)}, w^{(j_n)}]}{i_1! j_1! \cdots i_n! j_n!}$$

donde la suma es sobre las $2n$-uplas $(i_1, \cdots, i_n, j_1, \cdots, j_n)$ tales que $i_k + j_k \geq n$.

3.XII. Sea $q : X \to Y$ un revestimiento. Si X es arcoconexo e Y es simplemente conexo, probar que q es un homeomorfismo.

3.XIII. Grupos unitario y ortogonal. Grupos especial unitario y especial ortogonal.

1. Sea
$$U(n) = \{U \in \mathbb{C}^{n \times n} : U^* = U^{-1}\}$$
(grupo unitario, matrices con entradas complejas). Probar que es subgrupo de Lie (real) de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (matrices inversibles con entradas complejas)
2. Probar que $\mathrm{Lie}(U(n)) = u(n) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} : X^* = -X\}$.

3. Probar que toda $U \in U(n)$ se diagonaliza, $U = WDW^*$ donde los autovalores $d_i \in S^1$ (ayuda: U es normal luego $U = X + iY$ con $[X, Y] = 0$, $X^* = X, Y^* = Y$).

4. Probar que toda matriz unitaria U tiene un logaritmo antihermitiano $Z^* = -Z$, y con esto probar que $U(n)$ es conexo.

5. Si agregamos la restriccion $\det(U) = 1$, obtenemos el grupo $SU(n)$ (grupo especial unitario). Probar que es subgrupo de Lie de $U(n)$ y hallar $su(n)$, su álgebra de Lie (sugerencia: $\det(e^X) = e^{tr\, X}$).

6. Sea $O(n)$ el grupo ortogonal (matrices con entradas reales tales que $O^t = O^{-1}$). Probar que es subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$ y que $o(n) = \{Y : Y^t = -Y\}$ es su álgebra de Lie. Probar que $SO(n)$ es subgrupo de Lie y hallar su álgebra (denotada $so(n)$). ¿Cuántas componentess conexas tiene $O(n)$? ¿Cuántas tiene $SO(n)$?

7. Probar que que

$$E_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad E_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

son generadores de $su(2)$ y calcular sus conmutadores.

8. Probar que que

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son generadores de $so(3)$ y calcular sus conmutadores.

3.XIV. Veamos que $SO(3)$ no es simplemente conexo.

1. Observar que $SO(3)$ se puede identificar con las rotaciones de una esfera maciza de $\mathbb{R}^3$, módulo puntos antipodales. Entonces $SO(3) \simeq P^3(\mathbb{R})$, el espacio proyectivo de dimensión 3.

2. Probar que $P^3(\mathbb{R})$ no es simplemente conexo (ayuda: como se identifica con la esfera maciza con dos polos identificados, considerar (el cociente de) la curva que empieza en un polo y termina en el otro, ver que esa curva no es homotópicamente nula).

3.XV. Probar que

$$SU(2) \simeq S^3$$

y entonces es simplemente conexo (ayuda: ver que

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \mapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), \mathrm{Re}(w), \mathrm{Im}(w)$$

está bien definida y es biyectiva).

3.XVI. Sea $\varphi : \mathfrak{so}(3) \to \mathfrak{su}(2)$ dada por $\varphi(F_i) = E_i$ extendida como $\mathbb{R}$-transformación lineal.

1. Probar que φ es un isomorfismo de álgebras de Lie.
2. Probar que φ no es integrable a un morfismo de grupos de Lie $f : SO(3) \to SU(2)$ (sugerencia: ¿son isomorfos?).
3. Probar que φ^{-1} si es integrable a un morfismo $q : SU(2) \to SO(3)$, y que $SU(2)$ es el revestimiento universal de $SO(3)$.

3.XVII. Sea $f : A \to B$ una función continua y suryectiva. Probar que si f es abierta o cerrada, entonces f es un mapa cociente.

Capítulo 4

El Grupo Lineal

> Mi trabajo siempre intentó unir lo verdadero con lo bello, pero cuando tuve que elegir uno o lo otro, usualmente elegí lo bello.
>
> Hermann Weyl

Nuestra intención no es seguir trabajando con toda generalidad la teoría de grupos de Lie-Banach, para eso ya existen excelentes tratados como los Elementos de Bourbaki [20], el reciente libro de Daniel Beltiţă [17] de estructuras homogéneas o el libro de Harald Upmeier [87] sobre grupos analíticos. Nos concentraremos en los subgrupos del grupo lineal de un álgebra de Banach o más precisamente, en subgrupos del grupo de operadores inversibles en un espacio de Banach. En este capítulo suponemos que el lector está familiarizado con las nociones de cálculo funcional que presentamos en los apéndices.

4.1. El grupo de elementos inversibles, estructura local

Como dijimos, nos concentraremos en subgrupos de $G_{\mathcal{A}}$, el grupo de inversibles de un álgebra de Banach compleja y asociativa $\mathcal{A}$. Es fácil ver (Observación A.2.4 en el Apéndice III), se trata de un conjunto abierto y el álgebra de Lie-Banach $\mathfrak{g}$ se identifica naturalmente con $\mathcal{A}$; el corchete de Lie es el conmutador usual y el grupo tiene una estructura de variedad analítica compleja.

4.1.1. Las representaciones L y R

Si $z \in \mathcal{A}$, entonces $L_z : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es un operador lineal y acotado, con

$$\|L_z\| = \sup_{\|w\| \leq 1} \|zw\| \leq \|z\|.$$

Denotemos con $\sigma_{\mathcal{A}}(z)$ al espectro de z relativo al álgebra $\mathcal{A}$, y con $\sigma_{\mathcal{B}(\mathcal{A})}(L_z)$ al espectro de L_z como operador del *espacio de Banach* $\mathcal{A}$. La aplicación $z \mapsto L_z$ es de hecho una *representación del álgebra* $\mathcal{A}$ como operadores acotados en un espacio de Banach. Definimos $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{A})$ como $L_a x = ax$, y denotamos

$$L(\mathcal{A}) = \{L_z : z \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{A}).$$

De manera análoga se definen R_a ($a \in \mathcal{A}$) como el producto a derecha y $R(\mathcal{A})$.

Lema 4.1.1. *El conjunto* $L(\mathcal{A})$ *es una subálgebra cerrada,* L *es una isometría y además*

$$\sigma_{\mathcal{B}(\mathcal{A})}(L_z) = \sigma(z).$$

para todo $z \in \mathcal{A}$. *Afirmaciones análogas valen para* $R(\mathcal{A})$.

Demostración. Que $L(\mathcal{A})$ es cerrada se deduce del hecho de que L es una isometría, y esto último es porque

$$\|z\| = \|L_z \cdot 1\| \leq \|L_z\| \leq \|z\|.$$

Por otra parte, si $c \in \mathcal{A}$ es la inversa de $a - \lambda$, entonces L_c es la inversa de $L_{a-\lambda}$, con lo cual $\sigma_{\mathcal{B}(\mathcal{A})}(L_z) \subset \sigma(z)$. Recíprocamente, si L_a es inversible, entonces existe un operador inversible $T \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ tal que $L_a T z = T L_a z = z$ para todo $z \in \mathcal{A}$. Llamando $b = T(1)$, se tiene que b es la inversa de a: en efecto $ab = L_a T(1) = 1$, y por otro lado $1 = T L_a(1) = T(a)$ con lo cual

$$ba = T L_a(ba) = T(aba) = T(a) = 1.$$

□

Dada $H : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que $\sigma(z) \subset \Omega$, entonces ciertamente $\sigma(L_z) \subset \Omega$ con lo cual tiene sentido hacer el cálculo funcional en las dos álgebras. Se tiene

$$L_{H(z)} = H(L_z),$$

pues la fórmula es evidente para potencias de z y para $H(z) = (z-\lambda)^{-1}$, y el resultado se deduce aproximando H uniformemente con funciones racionales en $\sigma(z)$ (Teorema A.2.7).

Respecto de la exponencial, se trata de la exponencial usual dada por ejemplo por una serie de potencias. En particular para todo $v \in \mathcal{A}$ se tiene

$$L_{e^v} = e^{L_v}, \quad R_{e^v} = e^{R_v}, \quad e^{ad v} = Ad_{e^v}.$$

La última fórmula, válida en grupos de Lie-Banach arbitrarios, tiene en este contexto una prueba sencilla: los operadores $L_v, R_w \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ conmutan para todo $v, w \in \mathcal{A}$.

De la fórmula para la diferencial de la exponencial obtenida en el Lema 3.1.14

$$\exp_{*v}(w) = e^v F(ad v) w = [G(ad v) w]\, e^v$$

dedujimos que esta diferencial es inversible si y sólo si

$$\sigma(ad v) \cap \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}\} = \emptyset.$$

En particular, si $\|z\| < \pi$, entonces como aquí $adz(v) = zv - vz$, tenemos

$$\|adz\| \leq 2\|z\| < 2\pi$$

con lo cual $r(adz) < 2\pi$ y se tiene que la diferencial es inversible en la bola de radio π.

4.2. Grupos lineales de matrices: un vistazo rápido

Los ejemplos inmediatos de grupos de Lie surgen de considerar grupos lineales. Es decir, subgrupos del grupo de matrices inversibles. Fijemos un poco la notación. Sean $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ con el producto interno usual, $M_n(\mathbb{C})$ el espacio de matrices de $n \times n$ con entradas complejas. En estos grupos lineales se tiene que las diferenciales de L_g, R_g, Ad_g coinciden en efecto con las funciones, pues por ejemplo si α es una curva en G, entonces

$$\begin{aligned} (L_g)_{*\alpha(t)}\dot{\alpha}(t) &= \frac{d}{dt}(L_g \circ \alpha)(t) = \frac{d}{dt}(L_g \alpha(t)) = \frac{d}{dt}(g\alpha(t)) \\ &= g\frac{d}{dt}\alpha(t) = L_g \dot{\alpha}(t). \end{aligned}$$

Estas cuatro grandes clases que presentaremos (grupos lineales, unitarios, ortogonales y simplécticos) y sus variantes son lo que se conoce como *grupos de Lie clásicos*, nombre debido a una obra de Hermann Weyl del año 1939 [88].

4.2.1. El grupo lineal $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$

Usaremos $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ para denotar el grupo de matrices inversibles en $M_n(\mathbb{C})$. Este resulta ser un conjunto abierto en $M_n(\mathbb{C})$, y como tal, tiene la estructura diferenciable (de hecho analítica) dada por la carta global de la identidad del espacio de Banach $E = M_n(\mathbb{C})$, restringida a $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

El álgebra de Lie de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ consiste entonces del espacio de todas las matrices $M_n(\mathbb{C})$, y no es difícil ver que el corchete de dos elementos $v, w \in \mathfrak{g}$ está dado por el conmutador usual, es decir

$$[v,w] = vw - wv.$$

Esto se extiende de manera natural a cualquier subgrupo.

Si una matriz se diagonaliza como $a = gdg^{-1}$ con $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ y

$$d = diag(a_1, \cdots, a_n)$$

con $a_i \in \mathbb{C}$ los autovalores de a (con multiplicidad), entonces dada una función compleja f definida en $\sigma(a) = \cup\{a_i\}$ -el espectro de a-, tiene sentido definir

$$f(a) := g\, diag(f(a_1), \cdots, f(a_n))g^{-1} = gf(d)g^{-1}.$$

Para potencias $f(x) = x^k$, con $k \in \mathbb{Z}$, esta definición coincide con la usual, es decir

$$a^k = g\, diag(a_1^k, \cdots, a_n^k)g^{-1}.$$

Luego la definición coincide para polinomios, y se entiende cómo se calcula $f(a)$ para una función analítica en un entorno del espectro de a.

Algunas funciones, dadas por series de potencias convergentes, se pueden definir aunque la matriz a no se diagonalice. Dos funciones muy importantes son la *exponencial* del grupo lineal, dada por la serie de potencias

$$\exp(a) = e^a = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} a^n$$

convergente para cualquier $a \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, y el *logaritmo*,

$$\ln(b) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}(b-1)^{n+1}$$

convergente para $\|b-1\| < 1$. No es difícil chequear que, si $\|b-1\| < 1$, entonces

$$\exp(\ln(b)) = b,$$

y que si $\|a\| < \ln(2)$ entonces

$$\log(e^a) = a.$$

En los apéndices de este libro se estudian álgebras de Banach y álgebras de operadores, y allí mostramos como extender el logaritmo a cualquier operador a cuyo espectro no separe al cero de infinito en el plano complejo, y en general como calcular $f(a)$ para funciones continuas en el espectro de a.

4.2.2. El grupo de matrices unitarias

Un subgrupo que nos interesa es el grupo de matrices unitarias, definido de la siguiente manera: si a^* denota la transpuesta conjugada de $a \in M_n(\mathbb{C})$, entonces

$$\mathcal{U}(n,\mathbb{C}) = \mathcal{U} = \{u \in GL(n,\mathbb{C}) : u^*u = 1\}.$$

Notar que en este contexto de dimensión finita, como $\det(a^*) = \overline{\det(a)}$, la condición $u^*u = 1$ nos asegura que u es inversible y además $u^{-1} = u^*$, luego también vale $uu^* = 1$. En el caso infinito dimensional, el grupo unitario se define agregando esta última condición a la expuesta.

Este es un grupo de Lie real, cuya álgebra de Lie se identifica con el conjunto de las matrices antisimétricas (antihermitianas) en $M_n(\mathbb{C})$, es decir

$$M_n(\mathbb{C})_{ah} = \{x \in M_n(\mathbb{C}) : x^* = -x\}.$$

Esto se prueba de la siguiente manera: si $u(t)$ es una curva suave en $\mathcal{U}$ tal que $u(0) = 1$ y $\dot{u}(0) = x$, entonces derivando en $t = 0$ la relación $uu^* = I$ se obtiene $x^* + x = 0$. Por supuesto, si $x \in M_n(\mathbb{C})_{ah}$, entonces $e^x \in \mathcal{U}$, pues

$$(e^x)^* = e^{x^*} = e^{-x} = (e^x)^{-1}.$$

Se dice que a es *autoadjunta* o Hermitiana si $a^* = a$, y que a es *normal* si $a^*a = aa^*$. Un resultado importante del álgebra lineal nos dice que si a es normal, entonces existe una matriz unitaria u tal que

$$a = udu^*$$

con d la matriz diagonal de los autovalores de a. Si además a es Hermitiana, los autovalores son todos reales.

Observemos que toda matriz unitaria es normal, con lo cual dada $u \in \mathcal{U}$, existe $v \in \mathcal{U}$ tal que

$$u = vdv^*.$$

No es difícil ver que en este caso, todos los autovalores están en S^1, es decir $|d_i| = 1$ para todo $i = 1, \cdots, n$.

Dada una matriz unitaria u, como $\sigma(u) = \{d_i\}_{i=1,\cdots,n} \subset S^1$, podemos elegir una determinación log del logaritmo en el plano complejo de manera que log esté definido en $\sigma(u)$ y además $|\log(d_i)| \leq \pi$ para todo $i = 1 \cdots n$. En consecuencia, toda matriz unitaria tiene un logaritmo

$$x = \ln(u) = v \ln(d) v^*$$

donde $\ln(d)$ es la matriz diagonal $(\ln(d_1), \cdots, \ln(d_n))$. Si $x = \ln(u)$, es evidente que $e^x = \exp(x) = u$, y además $\|x\| \leq \pi$. Podemos considerar entonces el grupo a un parámetro $\delta : [0,1] \to u$ dado por $\delta(t) = e^{tx}$, que toma valores en $\mathcal{U}$ puesto que tx es

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 114

anti-hermitiana. Como $\delta(0) = 1, \delta(1) = u$, se deduce que el grupo unitario es arcoconexo. Estas curvas jugarán un papel importante cuando estudiemos la geometría de $\mathcal{U}$, las llamaremos *segmentos*.

En contextos más generales, no siempre es posible hallar un logaritmo de un operador unitario; sin embargo, para una clase importante de álgebras veremos que siempre es posible.

4.2.3. El grupo ortogonal

Este es el caso real del grupo anterior; el *grupo ortogonal* $O(n, \mathbb{R})$ es el grupo de matrices que preserva la métrica, es decir

$$O(n, \mathbb{R}) = \{x \in M_n(\mathbb{R}) : \langle xv, xw\rangle = \langle v, w\rangle \text{ para todo } v, w \in \mathbb{R}^n\}.$$

Esta condición es -por polarización- equivalente a pedir que x sea una isometría $\|xv\| = \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, donde $\|\cdot\|$ denota en este caso la norma usual. Equivalentemente, $o \in O(n, \mathbb{R})$ si y sólo si

$$o^T o = o o^T = I.$$

El álgebra de Lie es el subespacio de matrices antisimétricas, es decir aquellos $x \in M_n(\mathbb{R})$ tales que

$$x + x^T = 0.$$

Con mayor generalidad, fijado un producto escalar $\langle , \rangle$ en $\mathbb{R}^n$, y q es la forma cuadrática asociada, si definimos la traspuesta de $x \in M_n(\mathbb{R})$ como la única matriz x^T tal que

$$\langle x^T v, w\rangle = \langle v, xw\rangle$$

para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$, entonces $O(n, \mathbb{R}, q)$ es el grupo de matrices que preserva la forma cuadrática q.

4.2.4. El grupo simpléctico

Para $n = 2k$ par, fijamos $J \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que

$$J^T = -J = J^{-1}.$$

Esto es lo que se conoce como una *estructura compleja* en el grupo lineal real $GL(n, \mathbb{R})$. La estructura compleja recibe este nombre porque permite introducir, en el espacio real $\mathbb{R}^{2k}$, una acción de $\mathbb{C}$ que lo convierte en un espacio vectorial complejo: dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, definimos para $v \in \mathbb{R}^{2k}$

$$zv := av + bJ(v).$$

Si $\langle , \rangle$ denota el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$, J induce una forma bilineal

$$\omega(v, w) = \langle Jv, w \rangle$$

conocida como *forma simpléctica* de la estructura compleja. La estructura compleja en $\mathbb{R}^{2k}$ viene acompañada del producto escalar

$$\langle v, w \rangle_J := \langle v, w \rangle - i\omega(v, w)$$

que es de hecho un producto interno sesquilineal en el sentido siguiente

$$\langle z_1 v, z_2 w \rangle_J = z_1 \overline{z_2} \langle v, w \rangle_J$$

para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y la acción de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}^{2k}$ inducida por J.

Se dice que una matriz $a \in M_{2k}(\mathbb{R})$ es una matriz *compleja* si conmuta con J, es decir, si

$$aJ = Ja.$$

De la misma manera, un subespacio $S \subset \mathbb{R}^{2k}$ es un subespacio *complejo* si $J(S) \subset S$. Por ser J inversible, es equivalente a pedir $J(S) = S$. Esta condición es de hecho la condición necesaria y suficiente para que el subespacio S herede la acción de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}^{2k}$ introducida más arriba.

Salvo un cambio de base, toda estructura compleja en $\mathbb{R}^{2k} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ viene dada por una matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2k, \mathbb{R})$$

donde $0, 1 \in GL(k, \mathbb{R})$ son matrices cuadradas de $k \times k$. En coordenadas, si $v = (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, entonces $J(\eta, \xi) = (-\xi, \eta)$.

El *grupo simpléctico* es el grupo $Sp_J \subset GL(n, \mathbb{R})$ de matrices inversibles g tales que

$$g^{-1} = Jg^T J.$$

Equivalentemente, son las matrices inversibles que preservan la forma simpléctica ω, es decir, aquellas matrices tales que

$$\omega(gv, gw) = \omega(v, w)$$

para todo $v, w \in \mathbb{R}^{2k}$.

El álgebra de Lie de Sp_J es el *álgebra simpléctica* $sp_J \subset M_n(2k, \mathbb{R})$ de las matrices tales que

$$x^T J = -Jx.$$

Esta relación se deduce considerando una curva $g(t) \in Sp_J$ tal que $g(0) = I$ y $\dot{g}(0) = x$, y derivando la relación $J = g^T Jg$ en $t = 0$.

4.3. Espacios homogéneos de grupos de matrices

En general un espacio homogéneo se presenta en forma abstracta; veremos sin embargo que hay casos donde se los puede pensar como subconjuntos o incluso subvariedades del grupo lineal.

En general, dado $a \in M_n(\mathbb{C})$, y G algún grupo lineal subgrupo de $GL(n,\mathbb{C})$, llamaremos *órbita de* a al conjunto

$$\mathcal{O}(a) := \{gag^{-1} : g \in G\} \subset M_n(\mathbb{C}).$$

En el caso del grupo unitario $\mathcal{U}$, se suele denominar *órbita coadjunta de a.*

4.3.1. La variedad de Grassmann

La variedad de Grassmann $Gr_k(n)$ es el conjunto de subespacios de dimensión k en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$. Como tal, admite la acción del grupo de matrices inversibles de la siguiente manera: dado $S \in Gr_k(n)$, ponemos

$$g \cdot S = g(S).$$

Observemos que por ser inversible g, se sigue que $g(S)$ tiene la misma dimensión que S. Se puede dar una presentación de la Grassmanniana como órbita, si pensamos que un subespacio S de dimensión k se identifica con el único proyector ortogonal $p \in M_n(\mathbb{C})$ que lo tiene como rango (es decir $p^* = p, p^2 = p$, $ran p = S$). En ese caso la acción se convierte en

$$g \cdot p := gpg^{-1}.$$

Observemos que también podemos considerar la acción del grupo unitario $\mathcal{U}$,

$$u \cdot p = upu^*.$$

Como dados dos subespacios S, S' de dimensión k, siempre podemos hallar una base ortonormal de la intersección y completarla a una base de S y de S' respectivamente, no es difícil ver que la órbita unitaria recorre también toda la Grassmaniana $Gr_k(n)$. En este caso estamos identificando entonces

$$Gr_k(n) \simeq \mathcal{U}/K_p$$

donde $K_p \subset \mathcal{U}$ es el subgrupo de isotropía del proyector p, es decir

$$K_p = \{u \in \mathcal{U} : upu^* = p\}.$$

Observemos que en este caso se trata de los unitarios que conmutan con p, que en una representación matricial se pueden expresar en forma de operadores diagonales:

$$\begin{pmatrix} \star & 0 \\ 0 & \star \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

donde en la primer fila ponemos el rango de p y en la segunda el de $1-p$. Es decir, observemos que todo x se puede escribir de la siguiente manera:

$$x = pxp + (1-p)xp + px(1-p) + (1-p)x(1-p) = a + b + c + d,$$

y utilizamos para x la siguiente escritura por bloques:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Esta escritura se comporta bien el producto de matrices, es decir multiplicar dos representaciones matriciales equivale a multiplicar las correspondientes matrices originales.

Observación 4.3.1. Por este motivo diremos que una matriz (o un operador) de la forma (4.1) es una matriz (o un operador) p-*diagonal*; una cuenta elemental nos muestra que una matriz es p-diagonal si y sólo si conmuta con p. Por otra parte, diremos que una matriz (o un operador) es p-*codiagonal* cuando la parte diagonal de ésta sea nula, es decir cuando su escritura en bloques sea de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta escritura compacta es muy útil para algunos cálculos, como veremos más adelante. Derivando la relación $up = pu$ en una curva $u = u_t$ tal que $u_0 = 1$ y $\dot{u}_0 = v$, se deduce que $vp = pv$, luego el álgebra de Lie de K_p son los antihermitianos que conmutan con p, que nuevamente se representan como matrices diagonales respecto de p.

4.3.2. Matrices positivas inversibles

Una matriz es positiva cuando $a = a^*$ y además todos los autovalores de a son ≥ 0. Si ninguno es cero, diremos que a es una matriz inversible positiva y lo anotaremos $a > 0$. Es fácil ver que la exponencial de toda matriz Hermitiana es inversible y positiva; lo que no es tan obvio es que todas tienen logaritmo Hermitiano. Este espacio $\mathcal{P}$ de matrices positivas inversibles se puede presentar como un espacio homogéneo del grupo de todas las inversibles mediante la siguiente acción: dada $a > 0$ y $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, ponemos

$$g \mapsto gag^*.$$

Evidentemente gag^* es inversible, para ver que es positiva hay que observar que a tiene una raíz cuadrada positiva $a^{\frac{1}{2}} > 0$ y entonces $gag^* = bb^*$ con $b = ba^{\frac{1}{2}}$. Volveremos sobre este espacio homogéneo más adelante, para ello es necesario familiarizarse primero con los contenidos de cálculo funcional de los apéndices de este libro.

4.4. Subgrupos algebraicos

A continuación desarrollamos un criterio útil en el contexto infinito dimensional para probar que la topología de un subgrupo K de un grupo proveniente de un álgebra de Banach, es la topología de subespacio.

Dada un álgebra de Banach $\mathcal{A}$, diremos que un subgrupo $K \subset G_{\mathcal{A}}$ es *algebraico* si existe una familia $\{P_i\}_{i\in I}$ de polinomios $P_i : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ tales que

$$K = \{g \in G_{\mathcal{A}} : P_i(g, g^{-1}) = 0 \quad \forall i \in I\}.$$

Resulta entonces que P es una suma de funciones homogéneas en (a, b). El *grado del polinomio* P se define como el máximo de los órdenes de las funciones homogéneas en las que se descompone P. Por ejemplo,

$$P(a, b) = 3a^2b^2 - 4a^4b + ab + 1$$

es un polinomio de grado 5 pues el monomio $m(a, b) = -4a^4b$ es homogéneo de grado 5, es decir

$$m(ta, tb) = -4(ta)^4(tb) = t^5 m(a, b)$$

para todo $t \in \mathbb{C}$. El *grado del subgrupo* K es el máximo de los grados de los polinomios de la famila $\{P_i\}_{i\in I}$.

El siguiente teorema debido a Carlson será útil en breve, lo enunciamos sin demostración y la misma puede verse por ejemplo en el libro de B. Levin[1] [71, Teorema 3, Sección 8.3]:

Lema 4.4.1. *Sea* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una función entera de orden* $\rho \leq 1$ *(es decir* $|f(z)| \leq Ae^{B|z|}$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$*). Si*

1. $f(k) = 0$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$,
2. $\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log|f(\pm it)| < \pi$,

entonces $f \equiv 0$.

Para un subgrupo algebraico K, si definimos

$$\mathfrak{k} = \{v \in \mathcal{A} : e^{tv} \in K \quad \forall t \in \mathbb{R}\},$$

la Proposición 3.2.3 nos dice que $\mathfrak{k}$ es un álgebra de Lie-Banach, pues K es cerrado por ser intersección de cerrados.

[1] Link al libro online, de acceso gratuito en la página de la AMS-American Mathematical Society (ver la página 58): http://www.ams.org/online_bks/mmono150/mmono150-ptI.pdf

Teorema 4.4.2. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach compleja y $K \subset G_{\mathcal{A}}$ es un subgrupo algebraico de grado $n < \infty$, entonces K tiene una estructura de grupo de Lie-Banach dada por $\mathfrak{k}$ y la exponencial de $G_{\mathcal{A}}$, cuya topología concuerda con la topología de subespacio de $G_{\mathcal{A}}$.*

Demostración. Trasladando con los difeomorfismos $\{L_g\}_{g\in K}$, basta probar que existe un entorno $U \subset \mathcal{A}$ del origen tal que $\exp(U\cap\mathfrak{k}) = \exp(U)\cap K$ y exp es un difeomorfismo entre $U \cap \mathfrak{k}$ y $\exp(U) \cap K$. Como $\exp(U \cap \mathfrak{k}) \subset \exp(U) \cap K$ siempre ocurre, tenemos que probar que

$$\exp(U) \cap K \subset \exp(U \cap \mathfrak{k}),$$

y esto estará probado si vemos que, dado $v \in U$ con $g = e^v \in K$, entonces $e^{tv} \in K$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por la definición del subgrupo algebraico, esto nos lleva a tener que probar que para todo polinomio P de la familia que define K, se verifica

$$P(e^{tv}, e^{-tv}) = 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Para P y v fijos, consideramos la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = P(e^{zv}, e^{-zv}).$$

Esta es una función analítica pues la exponencial y los polinomios son analíticos. Probaremos que f es idénticamente nula usando el lema previo. Observemos primero que

$$f(k) = P(e^{kv}, e^{-kv}) = P(g^k, g^{-k}) = 0 \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{Z},$$

puesto que K es un grupo. Además, usando que P tiene grado finito, f tiene orden $\rho \leq 1$ pues basta desarrollar el polinomio como suma de monomios y luego acotar

$$\|e^{\pm zv}\|^j \leq e^{j\|zv\|} = e^{j|z|\|v\|}$$

en cada monomio. Por otra parte, como

$$P(x, y) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x, y)$$

con los p_k homogéneos de grado k, entonces existen constantes $c_k, \alpha_{jk} \geq 0$ tales que

$$|P(x, y)| \leq \sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{j=0}^{k} \alpha_{jk}\|x\|^j\|y\|^{k-j} \leq M \max\{1, \|x\|^n, \|y\|^n\},$$

y entonces

$$\log|P(x, y)| \leq \log M + n \max\{0, \log\|x\|, \log\|y\|\}.$$

Usando esto, para $t \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\log|f(\pm it)| = \log|P(e^{\pm itv}, e^{\mp itv})| \leq \log M + n \max\{0, \log\|e^{\pm itv}\|\},$$

lo que nos dice que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log|f(\pm it)| \leq n \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log\|e^{\pm itv}\|.$$

Por el primer ítem del Teorema A.3.6,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log\|e^{\pm itv}\| = \max\{|Im(\lambda)| : \lambda \in \sigma(v)\} \leq r(v) \leq \|v\|,$$

es decir

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log|f(\pm it)| \leq n\|v\|.$$

Como n está dado por la familia de polinomios, podemos tomar el entorno $U \subset \mathcal{A}$ suficientemente pequeño para que $\|v\| < \pi/n$ para todo $v \in U$, con lo cual

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log|f(\pm it)| < \pi.$$

□

4.5. El grupo de isometrías

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach, las isometrías de $G = G_{\mathcal{A}}$ son los elementos de norma unitaria con inversa de norma unitaria, es decir

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \{g \in G_{\mathcal{A}} : \|g\| = \|g^{-1}\| = 1\}.$$

Observación 4.5.1. El nombre se debe al siguiente hecho: si pensamos que $\mathcal{A}$ actúa en un espacio de Banach E como operadores acotados (por ejemplo en $E = \mathcal{A}$ via $g \mapsto L_g$) entonces $g \in \mathcal{U}$ sii

$$\|g\eta\| = \|g^{-1}\eta\| = \|\eta\|$$

para todo $\eta \in E$. En efecto, $\|g\eta\| \leq \|\eta\|$ y por otro lado $\|\eta\| = \|g^{-1}g\eta\| \leq \|g\eta\|$ lo que prueba que g es una isometría, y con un argumento análogo g^{-1} es una isometría.

Lema 4.5.2. *Si $u \in \mathcal{U}$ entonces $\sigma(u) \subset S^1$.*

Demostración. En primer lugar, si $|\lambda| > 1$ entonces $x = 1 - \frac{u}{\lambda}$ verifica $\|x - 1\| = 1/|\lambda| < 1$ lo que nos dice que x es inversible o equivalentemente, que $\lambda \notin \sigma(u)$. Supongamos ahora que $|\lambda| < 1$, entonces $y = \lambda u^{-1} - 1$ también verifica $\|y - 1\| = |\lambda| < 1$ luego es inversible. Multiplicando por u deducimos que $uy = \lambda - u$ es inversible así que $\lambda \notin \sigma(u)$. □

Las isometrías forman un subgrupo cerrado de G, y por ende el espacio de Banach

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_{\mathcal{A}} = \{v \in \mathcal{A} : \exp(\mathbb{R}v) \subset \mathcal{U}\}$$

es de hecho una subálgebra de Lie-Banach de $\mathcal{A}$. Se sigue que $\mathcal{U}$ es un grupo de Lie-Banach, con una topología tal vez más fina que la heredada de G (la topología de G coincide con la de $\mathcal{A}$ por ser abierto). Puede probarse que si X es un espacio de Banach complejo y $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ es el álgebra de Banach de operadores acotados en X, entonces el grupo de isometrías $\mathcal{U} \subset \mathrm{GL}(X) = G_{\mathcal{A}}$ tiene la topología de subespacio siempre y cuando la bola unitaria de X sea homogénea, esto es, cuando las funciones biholomorfas actuen transitivamente en la bola (ver [45, Teorema 2]). En el mismo artículo (Ejemplo 6), o en las notas del Seminario Dubreil de K. H. Hofmann [47], puede hallarse un ejemplo de un grupo de isometrías de un espacio de Banach que *no* es un grupo de Lie con la topología heredada.

Observación 4.5.3. Se suele denominar *Hermitiano* a todo elemento $x \in \mathcal{A}$ tal que $ix \in \mathfrak{u}$, es decir

$$\mathrm{Herm}(\mathcal{A}) = i\mathfrak{u} = \{x \in \mathcal{A} : \exp(itx) \in \mathcal{U} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\}.$$

En el contexto de álgebras C^*, es fácil ver que los Hermitianos de una y otra definición coinciden, es decir $x \in \mathrm{Herm}(\mathcal{A})$ si y sólo si $x^* = x$, ver el Ejercicio 4.1.

Definición 4.5.4. Para $a \in \mathcal{A}$, denotaremos

$$D(a) = \{\varphi \in \mathcal{A}' : \|\varphi\| = 1, \varphi(a) = \|a\|\},$$

que es no vacío por el Teorema de Hahn-Banach (de hecho, es convexo y compacto si se provee a $\mathcal{A}$ de la topología ω^*, que es la topología de convergencia puntual, ver el Apéndice A.3). Definimos

$$V(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in D(a)\}$$

que resulta un conjunto compacto convexo de $\mathbb{C}$, no vacío pues $\sigma(a) \subset V(a)$ (ver el Lema A.3.5) en los apéndices).

Proposición 4.5.5. *Sea $a \in \mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Son equivalentes:*

1. $a \in \mathrm{Herm}(\mathcal{A})$.
2. $\|e^{ita}\| \leq 1$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.
3. $V(a) \subset \mathbb{R}$.
4. $\lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\{\|1 + isa\| - 1\} = 0$ *para* $s \in \mathbb{R}$.

5. Para todo $t \in \mathbb{R}$, $1 + ita$ *es inversible y expansivo, i.e. para todo* $z \in \mathcal{A}$

$$\|(1 + ita)z\| \geq \|z\|.$$

Demostración. Como para todo $g \in G_{\mathcal{A}}$ se tiene $\|g\|\|g^{-1}\| \geq \|gg^{-1}\| = 1$, entonces $\|g^{-1}\| \geq \|g\|^{-1}$. Luego si $\|e^{ita}\| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$1 \geq \|e^{ita}\| = \|(e^{i(-t)a})^{-1}\| \geq \|e^{i(-t)a}\|^{-1} \geq 1$$

lo que nos dice que 1. y 2. son equivalentes. La equivalencia entre 2. y los ítems 3. y 4. es consecuencia del cuarto ítem del Teorema A.3.6 del Apéndice.

Veamos que a Hermitiano implica la condición del ítem 5. Basta probarla para $t = 1$. Como a es Hermitiano, $V(a) \subset \mathbb{R}$ y entonces $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Luego

$$\sigma(1 + ia) \subset 1 + i\sigma(a) \subset 1 + i\mathbb{R}$$

lo que nos dice que $1 + ia$ es inversible. Para ver que es expansivo, basta probar que $\|z + iaz\| \geq 1$ para todo $z \in \mathcal{A}$ con $\|z\| = 1$. Tomemos $\varphi \in D(z)$ (ver el Apéndice A.3), observemos que como a es Hermitiano entonces $\varphi(az) \in V(a, z) \subset V(a) \subset \mathbb{R}$. Luego $Re\varphi(iaz) = Rei\varphi(az) = 0$. En consecuencia

$$1 = \varphi(z) = Re\varphi(z) = Re\varphi(z + iaz) \leq |\varphi(z + iaz)| \leq \|z + iaz\|.$$

Recíprocamente, supongamos que $1 + ita$ es inversible y expansivo para todo $t \in \mathbb{R}$. Si t es suficientemente pequeño, entonces

$$(1 - ita)^{-1} = \sum_{n \geq 0} (it)^n a^n = 1 + ita + o(t^2).$$

Como $\|(1 - ita)^{-1}\| \leq 1$ y $\|1 + ita\| \geq 1$, deducimos que para t suficientemente pequeño y positivo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\|1 + ita\| - 1}{t} = \frac{\|(1 - ita)^{-1} + o(t^2)\| - 1}{t} \\ &\leq \frac{\|(1 - ita)^{-1}\| - 1}{t} + o(t) \leq o(t) \end{aligned}$$

con lo cual

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\|1 + ita\| - 1}{t} = 0.$$

Como $-a$ verifica las mismas hipótesis que a, se deduce que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\|1 - ita\| - 1}{t} = 0,$$

y cambiando t por $-t$ se deduce que el otro límite lateral también es nulo, lo que prueba que a es Hermitiano. □

4.5.1. El grupo unitario de un álgebra C*

Para una C*-álgebra $\mathcal{A}$, denotemos con $\mathcal{A}_h$ a los elementos Hermitianos del álgebra.

Lema 4.5.6. *Sea $u \in \mathcal{A}$ una C*-álgebra, que supondremos representada en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces son equivalentes*

1. $uu^* = u^*u = 1$.
2. $\|u\eta\| = \|u^*\eta\| = \|\eta\|$ *para todo* $\eta \in \mathcal{H}$.
3. u *es una isometría, es decir* u *es inversible y* $\|u\| = \|u^{-1}\| = 1$.

Demostración. Si u es unitario, es decir, si vale 1., entonces

$$\|u\eta\|^2 = \langle u\eta, u\eta\rangle = \langle u^*u\eta, \eta\rangle = \langle 1\eta, \eta\rangle = \|\eta\|^2$$

y lo mismo vale para u^*, lo que prueba 2.

Si vale 2. u es inyectivo y su rango es cerrado, y lo mismo vale para u^*, pero como $\mathrm{ran}(u)^\perp = \ker(u^*) = \{0\}$, se deduce que $\mathrm{ran}(u) = \mathcal{H}$ y entonces u es inversible. Además $\|u\| = \|u^*\| = 1$ y

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\langle u^*u\eta, \xi\rangle &= \tfrac{1}{2}\left[\|u^*u(\eta+\xi)\|^2 - \|u^*u\eta\|^2 - \|u^*u\xi\|^2\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\|\eta+\xi\|^2 - \|\eta\|^2 - \|\xi\|^2\right] = \mathrm{Re}\langle\eta, \xi\rangle, \end{aligned}$$

y lo mismo vale para uu^*, se tiene que $u^* = u^{-1}$, luego $\|u^{-1}\| = 1$ y esto prueba 3.

Por último, supongamos que u es inversible y que $\|u\| = \|u^{-1}\| = 1$. Es decir, u es una isometría. Entonces

$$\begin{aligned} \langle u^*u\eta, \xi\rangle &= \langle u\eta, u\xi\rangle = \tfrac{1}{2}\left[\|u(\eta+\xi)\|^2 - \|u\eta\|^2 - \|u\xi\|^2\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\|\eta+\xi\|^2 - \|\eta\|^2 - \|\xi\|^2\right] = \langle\eta, \xi\rangle \end{aligned}$$

con lo cual $u^*u = 1$, y entonces $uu^* = uu^*uu^{-1} = u1u^{-1} = 1$ también. □

El grupo de isometrías en un álgebra C* es el *grupo unitario* del álgebra. Su álgebra de Lie-Banach es el espacio $\mathcal{A}_{ah} = i\mathcal{A}_h$ de operadores antihermitianos, esto lo podemos probar a partir de la caracterización del Lema 3.2.1:

$$\mathrm{Lie}(\mathcal{U}) = \{v \in \mathcal{A} : \exp(tv) \subset \mathcal{U} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Observemos que $(e^{tv})^* = e^{tv^*}$ siempre es cierto (a partir de la escritura de la exponencial como serie de potencias). Entonces si $v^* = -v$ es claro que $(e^{tv})^* = e^{-tv} = (e^{tv})^{-1}$ y así $e^{tv} \subset \mathcal{U}$. Recíprocamente, si ocurre esto último entonces

$$e^{tv}e^{tv^*} = e^{tv}(e^{tv})^* = e^{tv}(e^{tv})^{-1} = e^{tv}e^{-tv} = 1$$

y derivando en $t = 0$ vemos que $v + v^* = 0$.

La topología de $\mathcal{U}$ es la de subespacio de $G_{\mathcal{A}}$ (y entonces es la de $\mathcal{A}$). Esto lo podemos probar de la siguiente forma: sea $U \subset \mathcal{A}$ tal que la exponencial es un difeomorfismo con su imagen, supongamos que $e^v \in \exp(U) \cap \mathcal{U}$. Entonces $e^{-v} = (e^v)^{-1} = (e^v)^* = e^{v*}$. Como v^* tiene la misma norma que v entonces por la inyectividad de la exponencial en este entorno tiene que ser $-v = v^*$ y así hemos probado que $\exp(U) \cap \mathcal{U} = \exp(U \cap \mathcal{A}_{ah})$. Por el Teorema 3.2.4 esto es suficiente para probar que $\mathcal{U}$ es subgrupo de Lie de $G_{\mathcal{A}}$.

Por otro lado, como

$$\mathcal{U} = \{u \in G_{\mathcal{A}} : u^* u = uu^* = 1\},$$

es esperable que el Teorema 4.4.2 también nos permita concluir que la topología de $\mathcal{U}$ dada por la carta exponencial concuerda con la topología de subespacio de $G_{\mathcal{A}}$. Los polinomios naturales a considerar son la familia indexada por $\xi \in \mathcal{H}$ dada por

$$\{P_\xi(a) = \|a\xi\|^2 - \|\xi\|^2\}$$

que claramente tiene grado 2 y anula al grupo unitario $\mathcal{U}$. Sin embargo, una cuidadosa inspección de la sección previa nos dice que los polinomios deben ser polinomios *complejos*, es decir deben sacar constantes complejas, lo cual no se verifica aquí. Sin embargo, este problema se puede solucionar considerando la complexificación de los polinomios dada por una expresión estándar que puede verse por ejemplo en [68, Sección 3]. En particular, la forma bilineal real

$$\beta(\xi, \eta) = \mathrm{Re}\langle \xi, \eta \rangle$$

que induce el polinomio real $p(\xi) = \|\xi\|^2$, nos permite obtener la complexificación de p, descomponiendo a $\xi = x + iy \in \mathcal{H}$ en sus partes real e imaginaria y definiendo

$$\tilde{p}(x + iy) = \|x\|^2 - \|y\|^2 + 2i\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle.$$

Es fácil verificar que si $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ entonces en efecto $\tilde{p}(\lambda(x+iy)) = \lambda^2 \tilde{p}(x+iy)$, y por otra parte $\tilde{p}(u\xi) = \tilde{p}(\xi)$ para todo $u \in \mathcal{U}$, luego el grupo unitario es un grupo algebraico y se obtiene el resultado esperado:

Corolario 4.5.7. *El grupo de operadores unitarios de un espacio de Hilbert es un grupo de Lie-Banach cuya topología coincide con la de la norma uniforme de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, y cuya álgebra de Lie-Banach consiste en el espacio de operadores anti-Hermitianos.*

4.5.1.1. Logaritmos de operadores unitarios

Veremos algunas propiedades del grupo de unitarios de un álgebra C^*. Recurrimos para ello al cálculo funcional continuo (ver el Apéndice B).

Observemos que si $u \in \mathcal{U}$, entonces $\|u-1\| \leq 2$ y más generalmente $\|u-v\| \leq 2$ para todo $u, v \in \mathcal{U}$. Si $\|u-1\| < 1$ entonces

$$z = \log(u) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(u-1)^n.$$

verifica $e^z = u$. Por otra parte, supongamos que $\|u-1\| < 2$. Entonces como $\sigma(u) \subset S^1$, se tiene

$$\text{máx}\{|e^{it}-1| : e^{it} \in \sigma(u)\} = r(u-1) \leq \|u-1\| < 2,$$

lo que nos dice que $-2 \notin \sigma(u-1)$ o equivalentemente $-1 \notin \sigma(u)$. Es decir,

$$\sigma(u) \subset S^1 - \{-1\}.$$

Sea

$$\log : \{a+ib \in \mathbb{C} : a > 0 \text{ ó } b \neq 0\} \to \{x+iy : -\pi < y < \pi\}$$

la determinación usual del logaritmo en el plano complejo sin el semieje negativo de los números reales. Entonces log es una función analítica definida en un entorno de $\sigma(u)$, y por lo tanto está bien definido el cálculo funcional

$$z = \log(u) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \log(w)(w-u)^{-1}dw$$

para cualquier curva simple γ, orientada de forma positiva, alrededor de $\sigma(u)$. Por propiedades generales del cálculo funcional, se verifica $e^z = \exp\circ\log(u) = id(u) = u$, y además

$$\sigma(z) = \log(\sigma(u)) \subset \{it : t \in (-\pi, \pi)\}.$$

Proposición 4.5.8. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* entonces para todo $u, v \in \mathcal{U}$ tales que $\|u-v\| < 2$ existe un único $z \in \mathcal{A}_h$ tal que $\|z\| < \pi$ y $v = ue^{iz}$. La asignación $(u,v) \mapsto z$ es analítica en*

$$\mathcal{U} = \{(u,v) \in \mathcal{U}\times\mathcal{U} : \|u-v\| < 2\}.$$

Demostración. Supongamos primero que $v = 1$ y que $\|u-1\| < 2$. Entonces $z = \log(u)$ es un operador normal pues se obtiene como cálculo funcional de u que es normal. Como

$$z^* = \log(u)^* = \log(u^*) = \log(u^{-1}) = -\log(u)$$

se deduce que z es antihermitiano. Además como $\sigma(z) \subset i(-\pi,\pi) \subset i\mathbb{R}$, $\|z\| = r(z) < \pi$. Si tomamos $x = iz$, entonces x verifica todo lo requerido.

Si $\|u-v\|<2$, entonces $w=u^*v$ es unitario y además $\|w-1\|=\|u^*v-1\|=\|v-u\|<2$, con lo cual por el caso anterior existe $x\in\mathcal{A}_h$ tal que $\|x\|<\pi$ y $u^*v=w=e^{ix}$, de donde se deduce que $v=ue^{ix}$.

Para probar la última afirmación, podemos suponer nuevamente que $v=1$ y que $\|u-1\|<2$. Como $u\mapsto(u-w)^{-1}$ es analítica para todo $w\in\gamma$ (una curva que rodee al espectro de u) admite localmente un desarrollo en serie con polinomios homogéneos en el espacio de Banach $\mathcal{A}$. Integrando término a término la serie en γ, tenemos una nueva serie de potencias que nos da $u\mapsto\log(u)$ localmente, lo que nos dice que esta aplicación es analítica. □

Proposición 4.5.9. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de von Neumann entonces para todo $u,v\in\mathcal{U}$ existe $x\in\mathcal{A}_h$ tal que $\|x\|\le\pi$ y $v=ue^{ix}$.*

Demostración. Como $\|u-v\|=\|1-u^*v\|$, podemos suponer que $u=1$. Si $\sigma(u)\neq S^1$, usamos el corolario previo. En caso contrario, sea log definido como el logaritmo usual en $S^1-\{-1\}$, y extendido arbitrariamente (por ejemplo, como π) en $\lambda=-1$. Esta función es Boreliana y acotada en S^1, con lo cual podemos hacer el cálculo funcional $z=\log(u)$ del elemento normal u, que verifica $\|z\|\le\|\log\|_{\infty,\sigma(u)}=\|\log\|_{\infty,S^1}=\pi$. Se verifica $e^z=\exp\circ\log(u)=u$, $z^*=-z$ con lo cual $x=(-i)z$ es el elemento buscado. □

4.6. El cono positivo de un álgebra C*

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C*, denotemos con $G_{\mathcal{A}}^+$ a los elementos positivos e inversibles, es decir

$$G_{\mathcal{A}}^+=\{g\in G_{\mathcal{A}}:g^*=g,\ \sigma(g)\subset(0,+\infty)\}\subset\mathcal{A}_h.$$

Observemos que si $v,w\in\mathcal{A}_h$, entonces $\mathrm{ad}v(w)=[v,w]\in i\mathcal{A}_h$, mientras que

$$\mathrm{ad}^2v(w)=[v,[v,w]]=v^2w+wv^2-2vwv\in\mathcal{A}_h.$$

Teorema 4.6.1. *Sea $\mathcal{A}$ una C*-álgebra. Entonces*

1. $\exp(\mathcal{A}_h)=G_{\mathcal{A}}^+$, *y* $\exp:\mathcal{A}_h\to G_{\mathcal{A}}^+$ *es una biyección.*
2. $G_{\mathcal{A}}^+$ *es abierto en* $\mathcal{A}_h$.
3. *Si $v,w\in\mathcal{A}_h$, entonces*

$$\begin{aligned}\exp_{*v}(w) &= e^{v/2}\cdot\frac{\mathrm{senh}(\mathrm{ad}v/2)}{\mathrm{ad}v/2}(w)\cdot e^{v/2}\\ &= e^{v/2}\cdot\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{\mathrm{ad}^2v}{4n^2\pi^2}\right)(w)\cdot e^{v/2}.\end{aligned}$$

4. $\exp_{*v} : \mathcal{A}_h \to \mathcal{A}_h$ *es globalmente inversible y* $\exp : \mathcal{A}_h \to G_{\mathcal{A}}^+$ *es un difeomorfismo.*

Demostración. Para probar 1. primero notamos que si $v^* = v$, entonces e^v es positivo e inversible por el teorema espectral, ya que $(e^v)^* = e^{v^*} = e^v$ y además

$$\sigma(e^v) = \exp(\sigma(v)) \subset \exp(\mathbb{R}) \subset (0, +\infty).$$

Luego $\exp(\mathcal{A}_h) \subset G_{\mathcal{A}}^+$, pero nuevamente invocando el teorema espectral tenemos, para cada $a \in G_{\mathcal{A}}^+$ un único logaritmo real $\ln(a)$ que es Hermitiano y verifica que $\exp(\ln(a)) = a$. Luego los conjuntos son iguales, y exp es una biyección ya que $e^v = e^w$ con v, w Hermitianos implica que tienen el mismo logaritmo real y entonces $v = w$.

Para ver el ítem 2. recordemos que $\exp_{*0}$ es la identidad, y si $a \in G_{\mathcal{A}}^+$, podemos considerar

$$v \mapsto a^{1/2} \exp(v) a^{1/2}$$

que es un difeomorfismo local y entonces manda un entorno abierto de $0 \in \mathcal{A}_h$ en un entorno abierto de $a \in G_{\mathcal{A}}^+$.

Para probar el ítem 3. observamos que

$$\begin{aligned} e^{-v/2} \exp_{*v}(w) e^{-v/2} &= e^{v/2} F(\operatorname{ad} v) w e^{-v/2} = e^{\operatorname{ad} v/2} F(\operatorname{ad} v) w \\ &= \frac{e^{\operatorname{ad} v/2} - e^{-\operatorname{ad} v/2}}{2 \operatorname{ad} v/2}(w), \end{aligned}$$

y que la expansión en productos de Weierstrass de $\operatorname{senh}(\lambda)/\lambda$ es

$$\prod_{k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}} \left(1 - \frac{\lambda}{k\pi i}\right) e^{\frac{\lambda}{k\pi i}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

Finalmente, observemos que $\sigma(\operatorname{ad} v) \subset \sigma(L_v) - \sigma(R_v)$ pues estos operadores conmutan (ver el Corolario B.3.2), y por otra parte, por el Lema 4.1.1, $\sigma(L_v) = \sigma(v) \subset \mathbb{R}$ y lo mismo se aplica para R_v. Se sigue que $\sigma(\operatorname{ad} v) \subset \mathbb{R}$, con lo cual $\operatorname{senh}(\lambda)/\lambda$ no se anula en $\operatorname{ad} v$ y entonces la diferencial de la exponencial es inversible globalmente, para todo $v \in \mathcal{A}_h$. Como exp restringido a los Hermitianos era una biyección global con los positivos invertibles, tenemos que se trata de un difeomorfismo (por ser un difeomorfismo local). □

4.6.1. Conos positivos

Si $a \geq 0$ y $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ entonces obviamente $ta \geq 0$. También es cierto que la suma de positivos da positivo, para probarlo usamos el radio numérico: si $a, b \geq 0$ entonces $a + b$ es autoadjunto y además para todo estado ρ se verifica

$$\rho(a + b) = \rho(a) + \rho(b) \geq 0$$

lo que nos dice que $a + b \geq 0$ (Corolario B.3.13).

En consecuencia, el conjunto de operadores positivos forma un cono convexo, que se suele denominar *cono de operadores positivos* y denotado $\mathcal{A}^+$.

Si $a, b \in \mathcal{A}_h$, diremos que $a \geq b$ si $a - b \geq 0$.

Corolario 4.6.2. *La relación $\geq$ define un orden parcial en $\mathcal{A}_h$, es decir*

1. $a \leq a$ *para todo* $a \in \mathcal{A}_h$.
2. $a \leq b$ *y* $b \leq a$ *implican* $a = b$.
3. $a \leq b$ *y* $b \leq c$ *implican* $a \leq c$.

Además

$$a \geq b \quad \Rightarrow \quad ra \geq rb \text{ para todo } r \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

$$a \geq b \quad y \quad c \geq d \quad \Rightarrow \quad a + c \geq b + d.$$

Demostración. Ciertamente $a \leq a$ pues $a - a = 0 \geq 0$.

Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $\sigma(a - b) = \{0\}$, y como $a - b \in \mathcal{A}_h$, se tiene $\|a - b\| = r(a) = 0$ luego $a = b$.

Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $b - a \geq 0$ y $c - b \geq 0$; como la suma de positivos es positivo se tiene $c - a = b - a + (c - b) \geq 0$ con lo cual $c \geq a$.

Si $a \leq b$ entonces obviamente $ra \geq rb$; por otra parte $a \geq b$ y $c \geq d$ implican $a - b + c - d \geq 0$, que es lo mismo que decir $a + c \geq b + d$. □

Para $a \in \mathcal{A}_h$, el número

$$i_a = \min\{s : s \in \sigma(a)\} \in \mathbb{R}$$

está bien definido por ser $\sigma(a)$ un compacto en $\mathbb{R}$.

Lema 4.6.3. *Sea $a \in \mathcal{A}_h$. Entonces*

$$\sigma(a - i_a) = \{t - i_a : t \in \sigma(a)\},$$

y en particular $a \geq i_a 1$.

Demostración. Si $i_a = 0$ no hay nada que probar. Supondremos que $i_a \neq 0$. Entonces (ver la Observación A.2.1), se tiene

$$\begin{aligned} \sigma(a - i_a) &= (-i_a)\sigma(1 - i_a^{-1}a) = (-i_a)\{1 - i_a^{-1}t : t \in \sigma(a)\} \\ &= \{t - i_a : t \in \sigma(a)\}. \end{aligned}$$

Como $i_a \in \mathbb{R}$, $a - i_a$ es Hermitiano y como $t - i_a \geq 0$ para todo $t \in \sigma(a)$, se deduce que $a - i_a \geq 0$. □

Si $a, b \geq 0$ son inversibles, entonces $i_a, i_b > 0$ con lo cual $a + b \geq i_a + i_b > 0$ y esto nos dice que $a + b$ no sólo es positivo, sino que también es inversible. Se sigue que $G_{\mathcal{A}}^+$ es un cono convexo (las combinaciones convexas caen dentro). Este admite una acción natural del grupo de inversibles $G_{\mathcal{A}}$,

$$\pi : G_{\mathcal{A}} \times G_{\mathcal{A}}^+ \to G_{\mathcal{A}}^+ \qquad (g, a) \mapsto gag^* = ga^{1/2}(ga^{1/2})^*.$$

Esta acción es transitiva pues si $a, b \in G_{\mathcal{A}}^+$, entonces $g = b^{1/2}a^{-1/2}$ verifica

$$I_g(a) = gag^* = b.$$

En particular podemos pensar que $G_{\mathcal{A}}^+$ es $\mathcal{O}(1)$, la órbita de la identidad por la acción. El grupo de isotropía H_1 de esta acción en $a = 1$ es exactamente el grupo unitario pues si $g = u|g|$ es la descomposición polar de g con $u \in \mathcal{U}$ y $|g| \in \mathcal{A}^+$, entonces

$$1 = I_g(1) = gg^* = u|g|^2u^*$$

de donde se deduce que $|g|^2 = 1$ y entonces $|g| = 1$. En este caso tanto $G_{\mathcal{A}}^+ = O(1) \subset \mathcal{A}_h$ como $\mathcal{U} = H_1 \subset G_{\mathcal{A}}$ son subvariedades embebidas.

4.6.2. Descomposición de Cartan y conmutadores

El álgebra $\mathcal{A}$ admite una descomposición

$$\mathcal{A} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

donde $\mathfrak{k} = i\mathcal{A}_h$ es un álgebra de Lie-Banach (que corresponde al grupo unitario) y $\mathfrak{p} = \mathcal{A}_h$ es un subespacio real cerrado que verifica ser un *triple de Lie*, esto es

$$ad^2v(w) = [v, [v, w]] \in \mathfrak{p}$$

siempre que $v, w \in \mathfrak{p}$. Como $vw - vw \in i\mathcal{A}_h$ si $v, w \in \mathcal{A}_h$ y $kv - vk \in \mathcal{A}_h$ si $k \in i\mathcal{A}_h, v \in \mathcal{A}_h$, entonces el álgebra $\mathcal{A}$ es de esta manera un álgebra $\mathbb{Z}_2$*-graduada*, en el sentido siguiente

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

Definición 4.6.4. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie-Banach, y $\mathfrak{k}, \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ son dos subespacios tales que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

y además

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

se dice que $\mathfrak{k}, \mathfrak{p}$ es una *descomposición de Cartan de* $\mathfrak{g}$.

Como veremos luego, esta estructura hace de los operadores positivos un espacio simétrico de Cartan (Proposición 7.5.20).

Cerramos esta sección con algunos comentarios sobre conmutadores: si $z \in \mathfrak{k} = i\mathcal{A}_h$, entonces la pregunta de si existen $v, w \in \mathfrak{p} = \mathcal{A}_h$ tales que

$$[v, w] = z$$

es difícil de contestar. Si $z = it$ con $t \in \mathbb{R}$, entonces $vw - wv = it$ implica $vw = it + wv$ con lo cual

$$\sigma(wv) \cup \{0\} = \sigma(vw) \cup \{0\} = \{it + \sigma(wv)\} \cup \{0\}$$

y esto es absurdo salvo que $t = 0$.

Si $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$, tomando traza en el problema $vw - wv = z$ de incógnita $z \in M_n(\mathbb{C})$ se obtiene también la condición necesaria

$$0 = \operatorname{tr}(vw - wv) = \operatorname{tr}(z),$$

lo que nos dice que los conmutadores de Hermitianos caen en un subespacio propio de $M_n(\mathbb{C})$, suplementario a $\mathbb{C}1$. De hecho, esta condición es suficiente: toda matriz de traza cero se puede escribir como el conmutador de dos matrices. La prueba de este hecho (válido en cualquier cuerpo k) puede verse por ejemplo en el trabajo [1].

En el caso infinito-dimensional, este enunciado está lejos de ser cierto pues puede probarse que los conmutadores son densos con la topología uniforme (la de la norma). Recordemos que denotamos $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ a los operadores lineales acotados del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces, si $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con $\mathcal{H}$ infinito dimensional, entonces dado $z \in \mathcal{A}$ existen $v, w \in \mathcal{A}$ tales que $z = wv - vw$ si y sólo si

$$z \notin \{\lambda + k : \mathbb{C} \ni \lambda \neq 0, k \text{ compacto } \}.$$

En particular el conjunto de conmutadores tiene interior no vacío. Todos estos resultados están en el trabajo de Brown y Percy [21].

4.7. Órbitas de similaridad y coadjuntas

En el caso de un operador $a \in \mathcal{A}$ donde $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra, podemos considerar su órbita con la acción del grupo de inversibles

$$\mathcal{O}(a) = \{gag^* : g \in G_{\mathcal{A}}\} \subset \mathcal{A}.$$

En general no es sencillo garantizar que la órbita es una subvariedad del espacio ambiente.

4.7.1. La órbita de similaridad de un inversible autoadjunto

En un trabajo de Corach-Porta y Recht [31] se estudia el caso $a \in G_{\mathcal{A}}$, $a = a^*$. Puede verse que $\mathcal{O}(a) \subset \mathcal{A}_h$ es una subvariedad: de hecho $\mathcal{O}(a)$ es abierto en $G_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{A}_h$, y el grupo de isotropía $K_a \subset G_{\mathcal{A}}$ es subgrupo de Lie-Banach regular. Esto es porque el fibrado

$$I : G_{\mathcal{A}} \to \mathcal{O}(a), \qquad g \mapsto \pi_a(g) = gag^*$$

admite secciones suaves, en el sentido del Teorema 3.5.10. Especializando este teorema para el caso de la órbita de un operador inversible autoadjunto, tomamos $M = G_{\mathcal{A}}^h$ y si $B_1(1) \subset \mathbb{C}$ denota la bola unitaria abierta alrededor del 1, consideramos

$$U = \{b \in M : \sigma(ba^{-1}) \subset B_1(1)\}$$

que es un entorno abierto de $a \in M$ por la semicontinuidad del espectro (Lema A.2.3). Luego, para todo elemento $b \in U$, el producto ba^{-1} tiene un logaritmo analítico, y por ende una raíz cuadrada analítica. Definimos $s : U \to G_{\mathcal{A}}$ la sección $s(b) = (ba^{-1})^{\frac{1}{2}}$. Entonces como $gh(z)g^{-1} = h(gzg^{-1})$ para todo g inversible y toda h analítica en un entorno del espectro de z, tenemos

$$\begin{aligned}(ba^{-1})^{\frac{1}{2}} a \left((ba^{-1})^{\frac{1}{2}}\right)^* &= (ba^{-1})^{\frac{1}{2}} ab^{-1} b (a^{-1}b)^{\frac{1}{2}} b^{-1} b \\ &= (ba^{-1})^{\frac{1}{2}} (ba^{-1})^{-1} (ba^{-1})^{\frac{1}{2}} b = b.\end{aligned}$$

Esto nos dice que s es una sección para π, y por el Teorema 3.5.10 la órbita es abierta. El grupo de isotropía en este caso es

$$K_a = \{u \in G_{\mathcal{A}} : au^* = u^{-1}a\}.$$

4.7.2. La órbita coadjunta de un operador autoadjunto

En el caso de actuar con el grupo unitario $\mathcal{U}$ de una C*-álgebra $\mathcal{A}$, podemos considerar la órbita de un operador autoadjunto a (no necesariamente inversible). En este caso como $\pi_a(u) = uau^*$, se tiene que el grupo de isotropía

$$K_a = \{u \in \mathcal{U} : ua = au\}$$

coincide con $\mathcal{U} \cap C^*(a)'$ donde aquí la prima denota el conmutante del álgebra generada por a. El álgebra de Lie-Banach son los antihermitianos que conmutan con a, es decir

$$\mathfrak{k} = \{x^* = -x : xa = ax\}.$$

No se conocen buenos criterios generales para decidir si $K_a \subset G$ es subgrupo de Lie-Banach y si $\mathcal{O} \subset \mathcal{A}_h$ es subvariedad (salvo en el caso finito dimensional). Sin embargo,

mencionamos algunos resultados en ese sentido. Diremos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de von Neumann *inyectiva* si contiene una sucesión ascendente

$$\mathcal{A}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1} \subset \cdots \mathcal{A}$$

de subálgebras de dimensión finita de manera que la unión $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_n$ es densa en la topología SOT. Por ejemplo $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es inyectiva pues la identidad es límite fuerte de proyectores de rango finito.

Puede probarse (ver el Teorema 4.33 en el libro de D. Beltiţă [17]) que si $\mathcal{A}$ es de von Neumann e inyectiva, entonces el álgebra de Lie-Banach se parte, un suplemento está dado por el núcleo de un proyector $E : \mathcal{A} \to W^*(\mathfrak{a})'$, donde $W^*(\mathfrak{a})$ es el álgebra de von Neumann generada por $\mathfrak{a}$ y nuevamente la prima denota conmutante. En este caso el cociente $\mathcal{O}$ tiene una estructura natural de variedad diferenciable para la cual π es una sumersión (ver el Teorema 3.5.6).

Respecto de la inclusión $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})_h$, puede probarse que la óbita es cerrada (esto ocurre si y sólo si tiene la topología de subespacio) si y sólo si $C^*(\mathfrak{a})$ es un álgebra de dimensión finita. La prueba de este hecho puede verse en un trabajo de Esteban Andruchow y Demetrio Stojanoff [10].

4.7.3. La Grassmanniana como la órbita de un proyector

El primer ejemplo de Grassmanniana surge de considerar un proyector $p = p^* = p^2$ en un álgebra C^*, y su órbita coadjunta

$$\mathrm{Gr}(p) = \{upu^* : u \in \mathcal{U}\}.$$

donde identificamos un subespacio $S \subset \mathcal{H}$ con el único proyector ortogonal que lo tiene como rango. Como discutimos en la sección de matrices, la acción $p \mapsto upu^*$ es simplemente la traducción de la acción natural de "mover" el subespacio vía $S \mapsto u(s)$, es decir $p_{u(S)} = upu^*$. Veamos la prueba de esta afirmación. En primer lugar es evidente que upu^* es un proyector, sea $S' = \mathrm{ran}(upu^*)$ su rango. Entonces si $\xi \in \mathcal{H}$,

$$\xi \in u(S) \Leftrightarrow u^*\xi \in S \Leftrightarrow pu^*\xi = u^*\xi \Leftrightarrow upu^*\xi = \xi \Leftrightarrow \xi \in S'.$$

Los contenidos de esta sección están basados en los trabajos [6, 30, 76] de Andruchow, Corach, Porta, Recht, Stojanoff et. al, pero cabe aclarar que la estructura diferenciable de la órbita de un idempotentes $p^2 = p$ en un álgebra de Banach fue estudiada en detalle con anterioridad por J. P. Holmes en [48, 49]. Asimismo, una presentación alternativa de un atlas para la Grassmanniana (en este caso vista como subespacios del espacio de Hilbert), puede encontrarse en el trabajo [26] de K. Chung. Se recomienda también ver el trabajo [62], donde se estudian las Grassmannianas generalizadas (variedades de bandera) en un álgebra C^*.

Denotemos con

$$\mathcal{P}(A) = \{p = p^* = p^2 : p \in \mathcal{A}\}$$

al conjunto de los proyectores de $\mathcal{A}$. Para $q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, sea $\pi_q : \mathcal{U} \to \mathcal{P}(\mathcal{A})$ la acción $\pi_q(u) = uqu^*$, y

$$K_q = \{u \in \mathcal{U} : uq = qu\}$$

el grupo de isotropía de π_q. La inclusión

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}_h$$

es una inclusión de subvariedades, pero no necesariamente regular ni embebida. En el resto de la sección, construimos una estructura diferenciable para $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.

Fijado $p \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, descomponemos al espacio $\mathcal{A}$ como suma directa de operadores p-diagonales y p-codiagonales respectivamente (ver la Observación 4.3.1):

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^D \oplus \mathcal{A}^C$$

con

$$\mathcal{A}^C = \{z \in \mathcal{A} : pzp = (1-p)z(1-p) = 0\}$$

y

$$\mathcal{A}^D = \{z \in \mathcal{A} : pz(1-p) = (1-p)zp = 0\}.$$

Denotamos con $\mathcal{A}_{ah}$ a los operadores anti Hermitianos, consideramos entonces

$$Q : \mathcal{A}^C_{ah} \cap \{z \in \mathcal{A} : \|z\| < \pi/2\} \to \mathcal{P}(\mathcal{A})$$

el mapa dado por

$$Q(z) = \pi_p \circ \exp(z) = e^z p e^{-z}.$$

Vamos a probar que esta función (claramente suave) cubre el abierto de $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ dado por

$$U_p = \{q \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) : \|q - p\| < 1\},$$

que Q es biyectiva y su inversa es suave. Necesitamos una observación sobre proyectores primero.

Observación 4.7.1. Sea $p \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Definimos $\epsilon_p = 2p - 1$, entonces ϵ_p es una *simetría*, es decir $\epsilon_p = \epsilon_p^* = \epsilon_p^{-1}$. Esto es porque

$$\epsilon_p^2 = (2p-1)(2p-1) = 4p - 4p + 1 = 1.$$

Luego ϵ_p es unitario y en particular isometría; observemos que si q es otro proyector y ϵ_q la simetría asociada entonces

$$\|\epsilon_p \epsilon_q - 1\| = \|(\epsilon_p - \epsilon_q)\epsilon_q\| = 2\|q - p\|.$$

Además, $z \in \mathcal{A}_{ah}^{C}$ (respecto de p), si y sólo si ϵ_p anticonmuta con z, es decir

$$\epsilon_p z = -z\epsilon_p$$

y entonces también $\epsilon_p e^z \epsilon_p = \exp(\epsilon_p z \epsilon_p) = e^{-z}$, luego

$$\epsilon_p e^{-z} = e^z \epsilon_p.$$

Ahora si Q es el mapa que queremos usar como carta, vemos que

$$\|Q - p\| = \|e^z(\frac{\epsilon_p + 1}{2})e^{-z} - (\frac{\epsilon_p + 1}{2})\| = 1/2\|e^{2z}\epsilon_p - \epsilon_p\| = 1/2\|e^{2z} - 1\|.$$

Observación 4.7.2. Por el teorema espectral, $\sigma(e^{2z} - 1) = e^{2\sigma(z)} - 1$, y como el espectro de z es puramente imaginario, tenemos que

$$\sigma(e^{2z} - 1) = \{e^{2it} - 1 : it \in \sigma(z)\} = \{\cos(2t) - 1 + i\,\mathrm{sen}(2t) : it \in \sigma(z)\}.$$

Luego

$$\|e^{2z} - 1\| = \sqrt{2}\,\mathrm{máx}\{\sqrt{1 - \cos(2t)} : t \in \sigma(-iz)\}.$$

La función $t \mapsto \sqrt{1 - \cos(2t)}$ es creciente, y como $\|z\| = r(z)$, se tiene

$$\|e^{2z} - 1\| = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(2\|z\|)}.$$

Así que $\|Q - p\| < 1$ si y sólo si $\|z\| < \frac{\pi}{2}$. Por otra parte, como

$$2Q - 1 = e^z \epsilon_p e^{-z} = e^{2z}\epsilon_p,$$

resulta $e^{2z} = (2Q - 1)\epsilon_p$. Llamando $\epsilon_Q = 2Q - 1$, tenemos

$$\|(2Q - 1)\epsilon_p - 1\| = \|\epsilon_Q \epsilon_p - 1\| = 2\|Q - p\| < 2,$$

lo que nos dice que Q tiene una inversa dada por la función analítica

$$Q \mapsto 1/2 \log((2Q - 1)\epsilon_p).$$

Es decir, Q donde está definida es suave, inyectiva, y tiene inversa suave. Nos falta ver que la imagen es *todo* el conjunto

$$U_p = \{q \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) : \|q - p\| < 1\}.$$

Para ello tenemos la siguiente proposición.

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 135

Proposición 4.7.3. *Sea $p \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Dado $q_0 \in \mathcal{O} = \mathcal{O}(p)$, sea $U \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$ el abierto*

$$U = \{q \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) : \|q - q_0\| < 1\}.$$

Entonces existe una sección local $s : U \to \mathcal{U}$ para π_{q_0} que es analítica (real), tal que $\|s(q) - 1\| < 2$ y para tod $q \in U$ se tiene

$$z = \log(s(q)) \in \mathcal{A}_{ah}^{C} \qquad \textit{(respecto de } q_0\textit{)}.$$

En particular $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$ es abierto y $\pi_p : \mathcal{U} \to \mathcal{O}$ es una proyección.

Demostración. Supongamos primero que $q_0 = p$. Si $\|q - p\| < 1$, entonces

$$w = qp + (1-q)(1-p) = \frac{\epsilon_q \epsilon_p + 1}{2}$$

es inversible pues $\|w - 1\| = \|p - q\| < 1$ por la observación previa. Sea $w = s|w|$ la descomposición polar a izquierda de w. Como w es inversible s es unitario y $|w|$ es inversible, además

$$s = w(w^*w)^{-1/2} = w|w|^{-1}$$

es una función analítica real. Luego $s = s(q)$ es una función analítica real en U. Veamos que es una sección para $\pi = \pi_p$ (obviamente $s(p) = 1$ pues si $q = p$ entonces $w = 1$). Como $wp = qw$, se tiene $pw^* = w^*q$, luego

$$pw^*w = (pw^*)w = (w^*q)w = w^*(qw) = w^*wp$$

y entonces w^*w conmuta con p y por ende $|w|$ conmuta con p. De $wp = qw$, adjuntando deducimos que $q = (w^*)^{-1}pw^*$ y entonces

$$\begin{aligned} \pi_p \circ s(q) &= sps^* = w|w|^{-1}p|w|^{-1}w^* = w|w|^{-2}pw^* \\ &= w(w^*w)^{-1}pw^* = (w^*)^{-1}pw^* = q. \end{aligned}$$

Dado $q_0 = upu^* \in \mathcal{O}$ arbitrario, tomamos el abierto correspondiente

$$U_0 = \{q' \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) : \|q' - q_0\| < 1\} = u\{q \in \mathcal{O} : \|q - p\| < 1\}u^*$$

y la sección $s_0 : U_0 \to \mathcal{U}$ dada por $s_0(uqu^*) = us(q)$. Entonces

$$\pi_{q_0} \circ s_0(uqu^*) = us(q)ps(q)^*u^* = uqu^*$$

lo que prueba que s_0 es una sección para π_{q_0}.

En lo que sigue, $\epsilon = \epsilon_p$ y $u = \epsilon_q\epsilon$ para no cargar la notación. Observemos que, como $w = \frac{u+1}{2}$, con u unitario, entonces w es normal y además

$$|w|^2 = w^*w = 1/4(1 + u + u^* + 1) = 1/2\,(1 + \mathrm{Re}(u))\,.$$

Luego

$$s = w|w|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+1)(1+\mathrm{Re}(u))^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{Re}(u))^{-\frac{1}{2}}(u+1),$$

y

$$s^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(u^*+1)(1+\mathrm{Re}(u))^{-\frac{1}{2}}$$

Entonces como $\epsilon u^* = \epsilon_q$, tenemos al multiplicar la última expresión por ϵ

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\epsilon s^* &= \epsilon(\epsilon_q\epsilon+1)\epsilon\epsilon(1+\mathrm{Re}(u))^{-\frac{1}{2}}\epsilon\epsilon \\ &= (u+1)(1+\mathrm{Re}(\epsilon u\epsilon))^{-\frac{1}{2}}\epsilon \\ &= (u+1)(1+\mathrm{Re}(u^*))^{-\frac{1}{2}}\epsilon = \sqrt{2}s\epsilon.\end{aligned}$$

Es decir $\epsilon s^* = s\epsilon$. Luego

$$\|s^2-1\| = \|s^2\epsilon-\epsilon\| = \|s\epsilon s^*-\epsilon\| = 2\|sps^*-p\| = 2\|q-p\| < 2$$

Con lo cual si $z = \frac{1}{2}\log(s^2) = \log(s)$, se tiene que $\|z\| < \frac{\pi}{2}$ porque $\|e^{2z}-1\| = \|s^2-1\|$. Ciertamente z es antihermitiano, pues

$$z^* = \log(s^*) = \log(s^{-1}) = -\log(s) = -z.$$

Falta ver que es p-codiagonal:

$$e^z = s = \epsilon s^*\epsilon = \epsilon e^{-z}\epsilon = \exp(-\epsilon z\epsilon)$$

y tomando logaritmos se tiene que z anticonmuta con ϵ. □

Corolario 4.7.4. *Si $p \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, entonces el mapa dado por*

$$Q(z) = \pi_p \circ \exp(z) = e^z p e^{-z},$$

con

$$Q : \mathcal{A}_{ah}^{C} \cap \{\|z\| < \pi/2\} \to \mathcal{P}(\mathcal{A}) \cap \{\|q-p\| < 1\} = \mathrm{Gr}(p) \cap \{\|q-p\| < 1\},$$

es un difeomorfismo (analítico real), con inversa

$$Z(q) = \log\left[1/\sqrt{2}(u+1)(\mathrm{Re}(u)+1)^{-1/2}\right],$$

donde $u = \epsilon_p\epsilon_q \in \mathcal{U}$.

Luego $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ es una variedad diferenciable, las componentes conexas son las órbitas $\mathrm{Gr}(p_i)$ de ciertos $p_i \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, que resultan abiertas por la existencia de las secciones locales construidas en la proposición previa.

Veamos cual es el rango de Q_{*0} para saber quién es el espacio tangente en un $p \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Como $\exp_{*0} = \mathrm{id}$, sólo hay que estudiar el mapa π_p. Observemos que $\pi_p : \mathcal{U} \to \mathcal{P}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}_h$. Además, si $z^* = -z$ entonces

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi_p(e^{tz}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tz} p e^{-tz} = zp - pz.$$

Es decir, $\pi_* = (\pi_p)_{*1}$ toma valores en operadores p-codiagonales. Pero no es difícil ver que el rango de π_* coincide con los operadores p-codiagonales de $\mathcal{A}_h$: por ejemplo, si $v \in \mathcal{A}_h$ es p-codiagonal, podemos tomar $z = vp - pv \in \mathcal{A}_{ah}$ y entonces

$$\pi_*(z) = (vp - pv)p - p(vp - pv) = vp - 0 - 0 + pv = v$$

pues $pvp = 0$ y $(1-p)v(1-p) = 0$. Es decir

$$T_p\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \mathrm{ran}(\pi_*) = \mathcal{A}_h^C = \{v \in \mathcal{A}_h : pv(1-p) = 0\},$$

que tiene un suplemento natural dado por los hermitianos diagonales

$$\mathcal{A}_h^D = \{v \in \mathcal{A}_h : (1-p)v(1-p) = pvp = 0\}.$$

Por otra parte,

$$\ker(\pi_*) = \mathcal{A}_{ah}^D = \{z \in \mathcal{A}_{ah} : zp = pz\},$$

tiene también un suplemento natural, que son los elementos antihermitianos p-codiagonales, es decir

$$\mathcal{A}_{ah}^C = \{z \in \mathcal{A}_{ah} : (1-p)zp = 0\}.$$

Entonces el Teorema de la Función Implícita (Teorema 1.7.11) nos dice que $K_p \subset \mathcal{U}$ es una subvariedad regular.

Por otra parte (Teorema 2.4.8) existe un abierto $V \subset \mathcal{U}$ tal que el pedazo de la órbita $\mathcal{O} = \mathrm{Gr}(p)$ dado por $\pi_p(V) \subset \mathcal{A}_h$ es subvariedad regular. Si tenemos en cuenta la proposición previa sobre las secciones suaves para $\mathcal{O}$, este abierto V es simplemente

$$V = \exp\left(\mathcal{A}_{ah}^C \cap \{\|z\| < \pi/2\}\right) = \{u \in \mathcal{U} : \|u - 1\| < \sqrt{2},\ \epsilon u^* = u\epsilon\}.$$

Sin embargo, con las cuentas que ya hicimos podemos probar el siguiente teorema que es más fuerte.

Teorema 4.7.5. *Sea $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}_h$ con la topología de subespacio. Entonces la estructura diferenciable que introdujimos usando Q induce una topología en $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ que coincide con la heredada.*

Demostración. La existencia de secciones suaves $s : \mathcal{P}(\mathcal{A}) \to \mathcal{U}$ prueba que $\pi_p : \mathcal{U} \to \mathcal{P}(\mathcal{A})$ es abierta. Y según observamos π_* se parte tanto en rango como en núcleo, usando la descomposición en operadores p-diagonales y p-codiagonales respectivamente. Entonces el criterio de Raeburn (Lema 3.5.11) nos asegura que $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}_h$ es una subvariedad regular que hace de π una sumersión. □

4.A. Problemas

4.I. Sea $\mathcal{A}$ una C*-álgebra.

- Probar que si $a \in \mathcal{A}$ es normal y $\sigma(a)$ es un punto, entonces a es un múltiplo de la identidad.
- Si $u \in \mathcal{A}$, probar que u es unitario si y sólo si u es normal y $\sigma(u) \subset S^1$.
- Probar que $x^* = x$ si y sólo si x es normal y $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.
- Probar que $x \in \mathrm{Herm}(\mathcal{A})$ si y sólo si $x^* = x$.

4.II. Probar que, dado un proyector $p = p^2 = p^* \in M_n(\mathbb{C})$ de dimensión k, si $S = \mathrm{ran}(p) \subset \mathbb{C}^n$, entonces hay una correspondencia entre $\mathrm{Gr}_k(n) = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \cdot (S)$ donde la acción para g inversible está dada por $S \mapsto g \cdot S = g(S)$, y la órbita de similaridad del proyector p dada por gpg^{-1}, $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Probar que dicha órbita de similaridad está también en correspondencia con la órbita coadjunta upu^*, $u \in \mathcal{U}(n,\mathbb{C})$ matriz unitaria.

4.III. Con la notación del ejercicio anterior, sea $z = zp + pz$ una matriz p-codiagonal y Hermitiana. Probar que

- Para todo $k \in \mathbb{N}$, se verifica
$$pz^{2k} = z^{2k}p, \quad (1-p)z^{2k}(1-p) = z^{2k},$$
$$(1-p)z^{2k+1} = z^{2k+1}p, \quad pz^{2k+1} = z^{2k+1}(-p).$$
- Si f es una función medible definida en un entorno de $\sigma(z)$, y f es par, entonces $pf(z) = f(z)p$, mientras que si f es impar $pf(z) = f(z)(1-p)$.
- Si $|z| = \sqrt{z^*z}$, entonces $|z| = |zp| + |pz|$ y además $|zp||pz| = |pz||zp| = 0$.
- $p|z| = |z|p = |zp|$, $(1-p)|z| = |z|(1-p) = |pz|$, $p|pz| = 0 = (1-p)|zp|$.
- Si $q = e^z p e^{-z} \in \mathrm{Gr}_k(n) = \mathcal{O}(p)$, entonces en la notación matricial que induce la descomposición $\mathbb{C}^n = \mathrm{ran}(p) \oplus \mathrm{ran}(1-p)$ se tiene
$$q = \begin{pmatrix} \cos^2(z) & -\cos(z)\,\mathrm{sen}(z) \\ \cos(z)\,\mathrm{sen}(z) & \mathrm{sen}^2(z) \end{pmatrix}.$$

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 139

- Si q es como en el ejercicio previo, entonces
  - $|qp| = \sqrt{pqp} = p\cos(z) = p\cos|z| = \cos|zp|$
  - $|pq| = \sqrt{qpq} = (1-p)\cos(z) = (1-p)\cos|z| = \cos|pz|$,

  con lo cual
  $$\sqrt{pqp} + \sqrt{qpq} = \cos(z) = \cos|z|.$$
- $|qp||pq| = |qp| + |pq| - 1 = |pq||qp|$.
- Sea $\arccos : [0,1] \to [0, \pi/2]$ la inversa del coseno. Supongamos que $\|z\| \leq \pi/2$. Probar que
  $$|z| = \arccos|z| = \arccos(|qp| + |pq|)$$
  y que
  $$|zp| = \arccos|qp|, \qquad |pz| = \arccos|pq|.$$

Capítulo 5

El Fibrado TTM

> Que las teorias de gauge no abelianas sean conceptualmente idénticas a las ideas en la teoría de fibrados vectoriales, desarrollada por matemáticos y sin referencia alguna al mundo físico, me maravillaba. En 1975 discutí esta impresión con Chern, y le dije "es a la vez emocionante y sorprendente, dado que ustedes los matemáticos soñaron estos conceptos de la nada". El inmediatamente protestó: "No, no. Estos conceptos no han sido soñados. Eran naturales y bien reales.".
>
> C.N. Yang

Retomamos en este capítulo nociones generales de geometría que nos permitirán introducir, en el próximo capítulo, las ideas de conexión y geodésica. Dada una variedad diferenciable M, el fibrado $TTM = T(TM)$ es simplemente el fibrado tangente de la variedad diferenciable TM. Si M es de clase C^k, con $k \geq 2$, TTM es una variedad de clase C^{k-2}. Presenta, por ser un espacio fibrado que se obtiene a partir de otro, ciertas características especiales.

5.1. Expresiones locales para TTM y sus proyecciones

Siguiendo la convención introducida en la Sección 2.2.2, con una carta (U, φ) de M armamos una carta inducida (TU, τ^{φ}) de TM. Con esta carta armamos una

carta $(T\mathcal{U}, \tau^{\tau^\varphi})$ de $TTM = T(TM)$ copiando el procedimiento anterior. En estas coordenadas se tiene entonces

$$\mathcal{U} \simeq \varphi(\mathcal{U}) \subset E,$$
$$T\mathcal{U} \simeq \tau^\varphi(T\mathcal{U}) \simeq V = \varphi(\mathcal{U}) \times E \subset E^2,$$

y por último

$$TT\mathcal{U} \simeq \tau^{\tau^\varphi}(TT\mathcal{U}) \simeq W = V \times (E \times E) = (\varphi(\mathcal{U}) \times E) \times (E \times E) \subset E^4.$$

Es decir, si $x = \varphi(p) \in \varphi(\mathcal{U})$, un punto genérico en $T\mathcal{U}$ se describe como (x, v) con $v \in E$, y un punto genérico en $TT\mathcal{U}$ se describe como $(x, v; u, w)$ con $x \in M$, $v \in T_xM$, $(u, w) \in T_{(x,v)}TM$. Con esta elección de coordenadas, el vector (u, w) es el vector tangente al punto $(x, v) \in T\mathcal{U}$, es decir $(u, w) \in T_{(x,v)}T\mathcal{U}$. Aquí omitimos las identificaciones, es decir, en realidad $T\mathcal{U}$ es $\tau^\varphi(T\mathcal{U})$.

5.1.1. Proyecciones de TTM en TM

La proyección canónica $\pi_M : TM \to M$ es $(p, v) \mapsto p$, mientras que la proyección canónica de TTM, $\pi = \pi_{TM} : TTM \to TM$ es en estas coordenadas el mapa

$$(p, v; u, w) \mapsto (p, v).$$

Pero atentos, que hay otra proyección natural, que es $\pi_* = (\pi_M)_* : TTM \to TM$, que se obtiene diferenciando π_M. Afirmamos que $\pi_{TM} \neq \pi_*$. Tomamos una curva $\beta : I \to TM$, que en coordenadas locales es $\beta(t) = (x_t, v_t) \in \mathcal{U} \times E$ con $x_0 = x \in \varphi(\mathcal{U})$, $v_0 = v \in E$. De acuerdo a nuestra convención, $\beta' : I \to T(TM)$ es en coordenadas locales la curva $\beta'(t) = ((x_t, v_t); \frac{d}{dt}(x_t, v_t))$. Luego

$$\beta'(0) = (x, v; \dot{x}_0, \dot{v}_0).$$

Observemos que x_t, debe pensarse como una curva en el espacio vectorial E por ser $\varphi(\mathcal{U}) \subset E$, con lo cual $\dot{x}_0 \in E$, pero por otro lado si pensamos a x_t como una curva en la variedad $N = \varphi(\mathcal{U})$, se tiene $x_t' = (x_t, \dot{x}_t)$ de acuerdo a nuestra convención. Diferenciando la relación $\pi \circ \beta(t) = x_t$ en $t = 0$ y componiendo con la inclusión canónica obtenemos $\pi_{*(x,v)} \circ \beta'(0) = (x, \dot{x}_0)$, que es lo mismo que decir que $\pi_{*(x,v)}(x, v; \dot{x}_0, \dot{v}_0) = (x, \dot{x}_0)$. Esto es, esencialmente

$$\pi_*(x, v; u, w) = (x, u)$$

mientras que para la proyección canónica al punto base $\pi_{TM} : TTM \to TM$ se tiene como dijimos

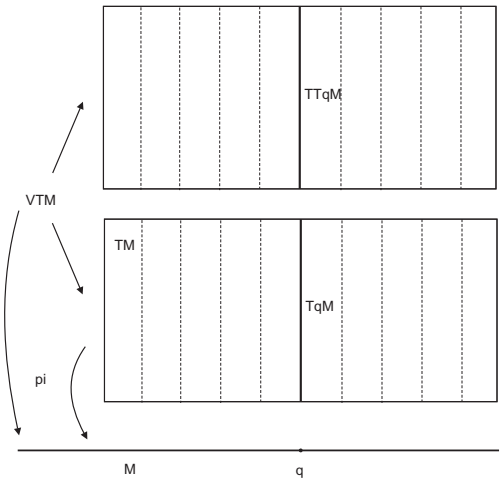
$$\pi(x, v; u, w) = (x, v).$$

Como TTM es un fibrado vectorial sobre TM con respecto a dos proyecciones distintas, hay que tener presente a cuál fibrado nos referimos para, por ejemplo considerar la suma y el producto por escalares en el fibrado. Sin embargo, dada la presencia del isomorfismo (llamado flip canónico) que discutiremos en la Sección 5.3, esta ambigüedad no presenta mayores inconvenientes.

5.1.1.1. Fibrados verticales

Hay dos *fibrados verticales* a considerar, el primero VTM* $\subset$ TTM es el subfibrado vectorial que en cartas se describe como $VTM^* = (x, v; 0, w)$, donde se sobreentiende que este debe ser un elemento de TTM; observemos que $VTM^* = \ker \pi_*$. Asimismo, se define VTM $\subset$ TTM como $\ker \pi_{TM}$, que en coordenadas locales se expresa como cuaterna del tipo $(x, 0; u, w) \in TTM$.

Observación 5.1.1. Razonamos sobre la figura de la derecha: identifiquemos $q \in M$ con $x = \varphi(q) \in \varphi(U)$, y observemos las fibras de q en la figura. Fijado $q \in M$, la *fibra* sobre q es el espacio T_qM, que se representa verticalmente, pues son los $V \in TM$ tales que $\pi(V) = q$. Entonces $W \in TTM$ está en el fibrado vertical si y sólo si W es tangente a $\pi^{-1}q = T_qM$.



En efecto, basta considerar, en la curva β de arriba, la condición $\beta \subset T_qM$ que se traduce como $x_t = cte = x$, con lo cual

$$W = \beta'(0) = (x, v; 0, \dot{v}_0) \in VTM.$$

En esta última expresión se puede ver que, para que $(x, v; 0, w) \in VTM^*$ debe ser v *y también* $w \in T_xM$. Esto es, fijado $x \in M$, sobre él se hallan dos copias (independientes) de T_xM. Este fibrado vectorial es de hecho isomorfo a la *suma de Whitney* o *producto fibrado* del fibrado (TM, π, M) consigo mismo:

$$TM \oplus TM = \{(V, W) \in TM \times TM : \pi(V) = \pi(W)\},$$

es decir

$$TM \oplus TM = \{((x, v), (x, w)) : \quad x \in M, \quad v, w \in T_xM\}.$$

El isomorfismo está implementado por el *levantado vertical* $V : TM \oplus TM \to VTM^*$ dado por

$$V((x; v), (x, w)) = (x, v; 0, w).$$

Observación 5.1.2. Hay un *endomorfismo canónico* $J : TTM \to VTM^* \subset TTM$, dado en coordenadas locales por

$$J(x, v; u, w) = (x, v; 0, u).$$

Observemos que si $\pi \oplus \pi_* : TTM \to (TM \oplus TM)$ está dado por

$$(\pi \oplus \pi_*)(x, v; u, w) = ((x, v); (x, u)),$$

entonces

$$J = V \circ (\pi, \pi_*).$$

Hay un *campo canónico* en TM a valores en VTM dado por $\mathcal{V} : TM \to VTM^* \subset TTM$ en coordenadas locales como

$$\mathcal{V}(x, v) = (x, v; 0, v).$$

5.2. Subvariedades de un espacio lineal

Las construcciones de la sección previa parecen esotéricas, veamos como se presentan en subvariedades $M \subset F$ de un espacio de Banach F.

5.2.1. La esfera de un espacio de Hilbert

Comencemos como en otras ocasiones con la esfera unitaria S de un espacio de Hilbert real $\mathcal{H}$. Recordemos que para cada $p \in S$, T_pM se identifica naturalmente con el conjunto de vectores $v \in \mathcal{H}$ tales que $\langle v, p\rangle = 0$. Pensemos ahora en una curva $\beta : I \to TM$ como en la sección anterior, que nos permitió presentar el fibrado TTM. En este caso concreto la podemos pensar como una curva de pares ordenados $\beta(t) = (p_t, v_t)$ donde $p_t \in S$, $v_t \in T_{p_t}S \subset \mathcal{H}$, es decir

$$\langle p_t, v_t\rangle = 0 \tag{5.1}$$

para todo t. Siguiendo con la idea de la sección anterior, calculamos $\beta' : I \to TTS$, y evaluando en $t = 0$ tenemos

$$\beta'(0) = (p_0, v_0; \dot{p}_0, \dot{v}_0) = (p, v; u, w) \in TTS$$

donde $(p, v) \in TS$ y $(u, w) \in T_{(p,v)}TS$. Observemos que por construcción $u = \dot{p}_0 \in T_{p_0}S$ pues p_t es una curva en S. Es decir, está claro como se mueven p, v, u. ¿Pero que hay de w? ¿Dónde se mueve? Derivando en $t = 0$ en la ecuación (5.1) obtenemos

$$\langle u, v\rangle + \langle p, w\rangle = 0. \tag{5.2}$$

que es una condición necesaria para que $(p, v; u, w) \in TTM$. Fijados p, v, u apropiados, siempre podemos elegir algún $w \in \mathcal{H}$ de manera que se verifique la ecuación de arriba: en efecto, la ecuación

$$\xi_p(w) = \lambda$$

con $\lambda = -\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$ y $\xi_p : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ la funcional lineal y continua

$$\xi_p = \langle p, \cdot\rangle$$

tiene siempre solución para algún $w \in \mathcal{H}$ por ser $\xi_p : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ un epimorfismo. De hecho, el espacio de soluciones consiste del espacio afín

$$\lambda p \oplus T_pS \subset \mathcal{H}$$

que tiene codimensión 1, puesto que $\xi_p(p) = 1$. Esto es razonable pues TTS se trivializa localmente como

$$T_pS \oplus T_pS \oplus T_pS \oplus T_pS = span(p)^\perp \oplus span(p)^\perp \oplus span(p)^\perp \oplus span(p)^\perp.$$

Recíprocamente, si $(p, v; u, w)$ verifican la ecuación (5.2) y además $\|p\| = 1$, $u, v \in T_pS$, entonces la 4-upla en cuestión representa un vector en TTM en coordenadas locales. Para verlo basta construir una curva en TM cuya derivada en $t = 0$ coincida con este vector. Tomemos una carta $\Phi : W \subset E \to \mathcal{H}$ donde E es el espacio de Hilbert que modela S, de manera que $\Phi(0) = p \in S$. Como $u, v \in T_pM$, existen $u_0, v_0 \in E$ tales que $D\Phi_0 v_0 = v$, $D\Phi_0 u_0 = u$. Observemos que si $w \in \mathcal{H}$ verifica la ecuación (5.2), entonces

$$D^2\Phi_0(u_0, v_0) - w \in T_pS.$$

En efecto, derivando primero respecto de s y luego respecto de t la relación siguiente

$$\langle \Phi(su_0 + tv_0), \Phi(su_0 + tv_0)\rangle = 1$$

y evaluando en $s = t = 0$ se obtiene

$$\langle D^2\Phi_0(u_0, v_0), p\rangle + \langle D\Phi_0 u_0, D\Phi_0 v_0\rangle = 0;$$

si ahora reemplazamos $\langle u, v\rangle$ por $-\langle p, w\rangle$ se deduce que

$$\langle p, D^2\Phi_0(u_0, v_0) - w\rangle = 0$$

que es lo que queríamos probar. En consecuencia, existe $h_0 \in E$ tal que

$$D\Phi_0(h_0) = w - D^2\Phi_0(u_0, v_0).$$

Consideremos la curva $\beta(t) = (p_t, v_t)$ dada por

$$p_t = \Phi(tu_0), \qquad v_t = D\Phi_{tu_0}(v_0 + th_0).$$

Por construcción, se verifica $p_t \in S$, $v_t \in T_{p_t}S$. Es decir, β es una curva en TS. Si la derivamos en $t = 0$ obtenemos

$$\beta'(0) = (p, v; u, D^2\Phi_0(u_0, v_0) + D\Phi_0(h_0)).$$

El último término coincide con w, luego hemos probado que con las condiciones dadas, la 4-upla es en efecto un elemento en TTS.

5.2.2. Superficies de nivel

Generalizando el ejemplo anterior, supongamos que la subvariedad $M \subset F$ modelada por E está dada como superficie de nivel de una función $g : F \to G$, donde E, F, G son espacios de Banach. Es decir

$$M = \{p \in F : g(p) = 0\},$$

con g suficientemente regular como para asegurar que se trata en efecto de una subvariedad.

Nuevamente presentamos cartas $\Phi : W \subset E \to F$ que parametrizan localmente M, y como mencionamos anteriormente $D\Phi_x(E) = T_{\Phi(x)}M = \ker Dg_{\Phi(x)}$.

Construyamos una curva β en TM. Ponemos nuevamente

$$\beta(t) = (p_t, v_t)$$

con $p_t \in M$ y $v_t \in T_{p_t}M$. Ahora estas condiciones se escriben así:

$$g(p_t) = 0 \qquad \text{y} \qquad Dg_{p_t}(v_t) = 0.$$

Nuevamente, llamando $p_0 = p \in M$, $\dot{v}_0 = w \in F$, como $p_t \in M$, se verifica $u := \dot{p}_0 \in T_pM$. Diferenciando la relación de arriba en $t = 0$ se tiene

$$D^2g_p(u, v) + Dg_p(w) = 0 \tag{5.3}$$

Esta condición necesaria es también suficiente, con un argumento similar al de la esfera. En efecto, la clave de la construcción de la curva con derivada prescrita está, en el caso de la esfera, en el hecho

$$D^2\Phi_0(u_0, v_0) - w \in T_pM,$$

siempre que $p \in M$, $u = D\Phi_0 v_0, v = D\Phi_0 w_0 \in T_pM$, y suponiendo que w verifica la ecuación (5.3). En el caso general, derivando primero respecto de s y luego respecto de t la relación

$$g \circ \Phi(su_0 + tv_0) = 0$$

y evaluando en $s = t = 0$ se obtiene

$$Dg_p^2(v,u) + Dg_p\left(D^2\Phi_0(u_0,v_0)\right) = 0;$$

si ahora reemplazamos $Dg_p^2(v,u)$ por $-Dg_p w$, se deduce que

$$Dg_p\left(D^2\Phi_0(u_0,v_0) - w\right) = 0$$

que es lo que queríamos probar. En consecuencia, existe $h_0 \in E$ tal que

$$D\Phi_0(h_0) = w - D^2\Phi_0(u_0,v_0).$$

Consideremos la curva $\beta(t) = (p_t, v_t)$ dada por

$$p_t = \Phi(tu_0), \qquad v_t = D\Phi_{tu_0}(v_0 + th_0).$$

Por construcción, se verifica $p_t \in M$, $v_t \in T_{p_t}M$. Es decir, β es una curva en TS. Si la derivamos en $t = 0$ obtenemos

$$\beta'(0) = (p, v; u, D^2\Phi_0(u_0,v_0) + D\Phi_0(h_0)).$$

El último término coincide con w, luego hemos probado que con las condiciones dadas, la 4-upla es en efecto un elemento en TTS.

Observación 5.2.1. Luego $(p, v; u, w) \in TTM$ si y sólo si

- $p \in M$
- $u, v \in T_pM = \ker Dg_p$
- $w \in F$ verifica $Dg_p(w) = -D^2g_p(u,v)$.

Una relación -casi trivial- que usamos por el camino es la siguiente:

$$Dg_p^2(u,v) + Dg_p\left(D^2\Phi_0(u_0,v_0)\right) = 0$$

siempre que $\Phi(0) = p$ sea una parametrización local de M y $u = D\Phi_0 v_0, v = D\Phi_0 w_0$ estén en T_pM. En particular, fijados $u, v \in T_pM$, w vive en una variedad lineal afín de F que se obtiene trasladando T_pM al punto $k(u,v) = D^2\Phi_0(u_0,v_0)$. Observemos que u, v son completamente intercambiables en toda la construcción. Esto nos permite definir un isomorfismo involutivo que los intercambia. Lo haremos con total generalidad en la Sección 5.3.

5.2.2.1. Fibrados verticales en subvariedades

Demos un vistazo al fibrado vertical $VTM^* \subset TTM$ que recordamos se consigue como $\ker \pi_*$, o equivalentemente como clases de curvas $\beta : I \to TM$ con la condición de que $\pi \circ \beta$ sea constante. En coordenadas eran los $(x, v; u, w) \in TTM$ tales que $u = 0$. En la presentación de superficies de nivel, la condición $u = 0$ fuerza que $D^2 g_p(0, v) = 0$, luego $Dg_p(w) = 0$. Como observamos antes esto es equivalente a que $w \in T_pM$, lo que nos dice que VTM^* se representa en cada $p \in M$ como dos copias del mismo subespacio, una por el origen (T_pM) y otra en algún sentido paralela que pasa por un punto que determinan $u, v \in T_pM$.

5.3. El flip canónico

Según lo discutido en la sección anterior, $(p, v; u, w) \in TTM$ si y sólo si $p \in M$, $u, v \in T_pM$ y además w verifica ciertas relaciones. En el caso de superficies de nivel, estas condiciones son simétricas. Veremos que este es un hecho general que no depende de la presentación de la variedad M como superficie de nivel.

Lema 5.3.1. *Sea M una variedad diferenciable de orden k, con $k \geq 2$. Entonces, dado $p \in M$, $u, v \in T_pM$, en coordenadas locales se tiene que*

$$(p, v; u, w) \in TTM \Leftrightarrow (p, u; v, w) \in TTM.$$

Demostración. Alcanza con probar -trivializando con una carta- que si $p \in M$ y $u, v \in T_pM$, entonces $(u, w) \in T_{(p,v)}TM$ implica que $(v, w) \in T_{(p,u)}TM$. Para verlo, tomemos una carta (U, ϕ) alrededor de p y observemos que si $(u, w) \in T_{(p,v)}TM$ es porque existe una curva $\beta(t) = (p_t, v_t)$ con $p_t \in M$, $v_t \in T_pM$ tal que $p_0 = p$, $v_0 = v$,

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ p_t)(0) = u,$$

y además localmente la curva v_t se representa como

$$v_t = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \phi(m_t(s)),$$

donde m_t es una curva en M para cada t, de manera que $m_t(0) = p_t$. De aquí se deduce que

$$w = \dot{v}_0 = \frac{d^2}{dtds}(\varphi \circ m_t(s))(0, 0).$$

Construiremos una curva $\alpha(t) = (q_t, w_t) \in TM$ con $\alpha(0) = (p, u)$ de manera que

$$(\dot{q}_0, \dot{w}_0) = (v, w).$$

Esto concluirá la prueba. Para ello, consideramos, para t pequeño, la curva $q_t \in M$ dada por

$$t \mapsto \phi^{-1}(\phi(p_t) + t(v - u))$$

que verifica $q_0 = p$, y además

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ q_t)(0) = u + v - u = v.$$

Por otra parte, podemos considerar la familia de curvas en M dadas por

$$\tilde{m}_t(s) = \phi^{-1}[\phi(m_t(s)) + (t - s)(v - u)].$$

Observemos que $\tilde{m}_t(0) = q_t$, con lo cual su derivada en $s = 0$ será un vector en $T_{q_t}M$ para todo t, es decir

$$w_t := \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \phi(\tilde{m}_t(s)) \in T_{q_t}M.$$

Luego $(q_t, w_t) \in TM$, es más

$$w_t = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \phi(m_t(s)) - (v - u) = v_t + u - v,$$

con lo cual $w_0 = v + u - v = u$. Por último, calculamos

$$\dot{w}_0 = \frac{d^2}{dtds}(\varphi \circ \tilde{m}_t(s))(0,0) = \dot{v}_0 = w.$$

□

Entonces TTM tiene dos estructuras de fibrado vectorial, la primera es:

$$(x, v; \alpha u, \beta w) +_\pi (x, v; \alpha' u', \beta' w') = (x, v; \alpha u + \alpha' u', \beta w + \beta' w').$$

es decir, pensando al punto base $(x, v) \in TM$ fijo y usando la estructura de espacio vectorial de $T_{(x,v)}TM$. La segunda es

$$(x, \alpha v; u, \beta w) +_{\pi_*} (x, \alpha' v'; u, \beta' w') = (x, \alpha v + \alpha' v'; u, \beta w + \beta' w'),$$

donde estamos fijando el punto $(x, \cdot; u, \cdot)$ y usando la estructura vectorial en las otras coordenadas. Análogamente se definen el producto por escalares $\cdot_1$ y $\cdot_2$.

El *flip canónico* en TTM es el isomorfismo $j : TTM \to TTM$ que intercambia estas estructuras; concretamente, en coordenadas

$$j(x, v; u, w) = (x, u; v, w).$$

Es un difeomorfismo involutivo es decir $j^2 = 1$.

Observación 5.3.2. Consideremos, para $t \in \mathbb{R}$ y $V = (x, v) \in TM$, la aplicación $f_V : \mathbb{R} \to TM$ dada por

$$f_V(t) = (x, tv)$$

conocida como *homotecia escalar*. Diferenciando, obtenemos una aplicación $(f_V)_* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to TTM$. Evaluando en $(1, 1)$ conseguimos, para cada $V \in TM$, un elemento $\mathcal{V}_V := (f_V)_*(1, 1) \in T_V TM$, que en en coordenadas locales es sencillamente

$$\mathcal{V}(x, v) = (x, v; 0, v),$$

el campo vectorial canónico $\mathcal{V} : TM \to TTM$. Observemos que es un campo *para las dos estructuras de* TTM. También se lo conoce como *campo vectorial de Liouville* o *campo vectorial de Euler*.

5.4. Aceleraciones y 2-jets

Observemos que, en términos de curvas, TM se identifica con las clases de curvas en la variedad M, donde la identificación de dos curvas que pasan por un punto dado es cuando también son iguales a primer orden, es decir, cuando tienen la misma velocidad. Podríamos decir entonces que TM es por construcción el espacio de las velocidades α', donde α es una curva en M.

Si observamos la construcción de TTM, lo podemos pensar como T(TM), y de acuerdo al razonamiento anterior, se trata de las clases de curvas en TM, identificadas a primer orden. Pero si pensamos que TM está dado por velocidades α', entonces podemos imaginar a TTM como el espacio de las aceleraciones α'', donde α es una curva en M. Más rigurosamente, identificamos dos curvas α, β en M siempre que

- $\alpha(0) = \beta(0) = p \in M$.
- $\alpha'(0) = \beta'(0) = (p, \dot{p}) \in TM$
- $\alpha''(0) = \beta''(0) = (p, \dot{p}; \dot{p}, \ddot{p}) \in TTM$.

La clase de equivalencia de α en p la denotamos $[\alpha'']_p$. Es ciertamente un elemento de TTM. Pero *atención, que no todo elemento de* TTM *se puede representar por una curva así*: si α es una curva en M, en coordenadas locales tendremos

$$\alpha'(t) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t))$$

mientras que

$$\alpha''(t) = (\alpha')'(t) = (\alpha'(t), \dot{\alpha'}(t)) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t); \dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)).$$

Es decir que las aceleraciones caen en el espacio de elementos que en coordenadas locales se representa como

$$(x, v; v, w) \in TTM.$$

Este es un subfibrado de TTM (pero *no* tiene una estructura natural de fibrado *vectorial*), y es el fibrado de puntos fijos del *flip canónico*. En presencia de una conexión ∇ en M, se le puede dar una estructura de fibrado vectorial al fibrado de aceleraciones: ver la Sección 6.3.

Observemos que si $f : M \to N$ es C^2, podemos indicar con $T^2 f : TTM \to TTN$ a la diferencial segunda de f, que en coordenadas locales no es otra cosa que

$$(p, v; u, w) \mapsto (f(p), Df_p v; Df_p u, D^2 f_p(u, v) + Df_p(w)).$$

Si nos restringimos al subfibrado de las aceleraciones, $T^2 f$ las preserva: para aquellos elementos de TTM que se representan como $[\alpha'']_p$ para alguna curva α en M, entonces $T^2 f$ está dada simplemente por

$$[\alpha'']_p \mapsto [(f \circ \alpha)'']_{f(p)}.$$

Esto es

$$(p, v; v, w) \mapsto (f(p), Df_p v; Df_p v, D^2 f_p(v, v) + Df_p(w)).$$

Esta aplicación es no lineal en el vector tangente (v, w) (Ejercicio 5.11), lo que nos da una idea de por qué el fibrado de aceleraciones no tiene una estructura natural de fibrado vectorial.

Observación 5.4.1 (2-jets). ¿Se puede pensar al fibrado TTM como clases de curvas? La respuesta es *si*, pero hay que considerar "curvas" de dos variables, es decir funciones dos veces diferenciables

$$\nu : I \times J \to M$$

donde $I \times J$ es algún producto de intervalos abiertos alrededor de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Si $\nu = \nu(s, t)$ verifica $\nu(0, 0) = p \in M$, componiendo con una carta (U, φ) de M denotamos excepcionalmente

$$\nu' = \frac{d}{ds} \varphi \circ \nu, \qquad \dot{\nu} = \frac{d}{dt} \varphi \circ \nu.$$

Entonces localmente las derivadas de ν nos dan en $(s, t) = (0, 0)$ las cuatro combinaciones posibles:

$$(p, \nu'; \nu', \nu'') \qquad (p, \nu'; \dot{\nu}, \dot{\nu}') \qquad (p, \dot{\nu}; \dot{\nu}, \ddot{\nu}) \qquad (p, \dot{\nu}; \nu', \dot{\nu}')$$

Dadas dos curvas ν, τ, las identificaremos en $p \in M$ siempre que los polinomios de Taylor de orden 2 de $\varphi \circ \nu$ y de $\varphi \circ \tau$ coinciden en p, exceptuando el término de las

derivadas segundas sucesivas. Esto define clases de equivalencia $[v]_p$ que se denominan 2-jets en M, y de hecho se identifica TTM con las clases de 2-jets mediante la aplicación dada en coordenadas como

$$[v]_p \mapsto= (v, v'; (v, v')^{\cdot}) = (p, v'; \dot{v}, \dot{v}')$$

en ese orden en particular. El *flip canónico* de TTM en esta presentación está dado por intercambiar las variables s y t en los jets (Ejercicio 5.III).

Si $M \subset F$ es una subvariedad de un espacio de Banach, entonces tomamos una parametrización local $\Phi = i\varphi^{-1} : W \to F$ alrededor de $p \in M$, con $W \subset E$ abierto en el espacio de Banach que modela M, y $\varphi(p) = 0$. Entonces podemos considerar el 2-jet en $p \in M$ dado por

$$v(s,t) = \Phi(sv_0 + tu_0 + stw_0 + o(s^2) + o(t^2)) \in M,$$

para $v_0, u_0, w_0 \in E$ y s, t suficientemente pequeños. Así

$$[v]_p \mapsto (p, D\Phi_0 v_0; D\Phi_0 u_0, D\Phi_0(w_0) + D^2\Phi_0(u_0, v_0)).$$

Comparar con la Observación 5.2.1 para el caso particular de una superficie de nivel.

Observemos que en esta presentación de 2-jets surge naturalmente la noción de *variación*: si $\delta(t) = v_0(t) = v(0,t)$ es una curva en M con $\delta(0) = p$, entonces la familia v_s de curvas es una *variación* de δ con un extremo fijo (el punto $p \in M$).

5.A. Problemas

5.I. Dar un atlas y una estructura de fibrado vectorial para el producto fibrado $TM \oplus TM$ y para los fibrados verticales VTM y VTM^*.

5.II. Probar, mediante un ejemplo concreto, que si $f : M \to N$ es dos veces diferenciable, entonces $T^2 f$ no es una aplicación lineal.

5.III. Probar que, dada $\alpha : I \times J \to M$ dos veces diferenciable, la aplicación

$$\Omega : \alpha(s,t) \mapsto \alpha(t,s)$$

induce el flip canónico en TTM cuando se presenta a este fibrado como clases de equivalencia de 2-jets.

Capítulo 6

Conexiones y Sprays

> El cálculo tensorial es la depravación de los índices.
>
> Henri Cartan

Introducidas las nociones elementales de variedades, sabemos cómo hacer cálculo en una variedad diferenciable M: esencialmente hay que usar cartas para pasar al contexto del espacio de Banach E que modela M, y luego usar las herramientas del cálculo -como diferenciación e integración- que estén a nuestra disposición en E. Pero todavía no sabemos cómo hacer geometría en M. ¿Qué queremos decir con esto? Dados dos puntos $x, y \in M$ no tenemos definido como se moverán las cosas desde x hasta y, ni siquiera en el caso más simple cuando x, y se pueden trasladar al espacio E con la misma carta. La riqueza de la estructura de TTM nos permite presentar de forma intrínseca los conceptos necesarios. Queremos intentar contestar la siguiente serie de preguntas más o menos naturales:

- ¿De todas las curvas que unen dos puntos $x, y \in M$, hay alguna -o una familia- distinguida, alguna dirección natural en la cual moverse de un punto a otro?
- ¿Cómo trasladar un vector tangente en x a otro vector tangente en y?
- ¿Cómo mover una curva, superficie, etc. que pasa por x a otra figura "congruente" que pase por y?
- ¿Cómo medir si x e y están lejos o cerca?
- ¿Cómo medir si dos vectores tangentes en x apuntan en direcciones muy disímiles?

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 154

Las primeras tres preguntas, como veremos, están relacionadas con la noción de conexión en M, spray en M o derivada covariante en M, todas nociones equivalentes. La cuarta pregunta tiene que ver con la noción de métrica en M. La última pregunta está relacionada con la noción de producto escalar o métrica Riemanniana en M.

Estas herramientas en principio independientes, pueden relacionarse imponiendo ciertas restricciones. Comenzamos por la noción de spray. Elegimos esta presentación porque es la más natural en el contexto infinito dimensional, y porque creemos que nos hará más fácil encarar nuestro objetivo último de esta parte, que es el teorema de Cartan-Hadamard. Dada una variedad diferenciable M, un spray en M es una manera (impuesta por nosotros, es decir, no viene dada por los datos de las cartas de M) de trasladar rígidamente vectores de un punto a otro de la variedad. Para ello, una vez fijado el spray -como dijo el peluquero- primero se obtienen las *geodésicas* del spray, que es una clase distinguida de curvas sobre las cuales moverse de un punto a otro de M. Si nos dan dos puntos $x, y \in M$ y una curva α que los une -es decir $\alpha : [0,1] \to M$ es suave, $\alpha(0) = x$. $\alpha(1) = y$-, veremos que el spray nos permite trasladar un vector $v \in T_xM$ a lo largo de la curva para obtener un vector $Pv \in TyM$. Los puntos extremos no juegan ningún papel distinguido a lo largo de la trayectoria α, así que en realidad lo que obtendremos será un vector $\xi(t) = P_t v \in T_{\alpha(t)}M$ para todo $t \in [0,1]$. No requerimos unicidad en las curvas, ni que curvas distintas nos den el mismo vector, es decir, si β es otra curva que une x con y en M, puede ocurrir -suele ocurrir- que el trasladado de v a largo de α no coincida con el trasladado de v a lo largo de β -como vectores en el espacio tangente T_yM, que es el único lugar donde tiene sentido compararlos ya que α, β podrían tocarse únicamente en x e y-.

Esta noción, una vez definida apropiadamente, es lo que se conoce como *transporte paralelo*. Es decir, es una manera distinguida de mover vectores tangentes de un punto a otro de M a lo largo de geodésicas o curvas cualesquiera en M. El nombre proviene del siguiente ejemplo: si tomamos como $M = \mathbb{R}^n$ con el spray trivial, el transporte paralelo de un vector a lo largo de una recta consiste exactamente en mover el vector $v \in T_xM$ hasta el vector $v' \in T_yM$ de forma paralela, es decir sin rotarlo ni estirarlo (es esencialmente el mismo vector).

6.1. Sprays

Queremos saber cuáles son las direcciones y caminos privilegiados de movimiento en la variedad M. Estas curvas son las que se conocen como *geodésicas* de M y como veremos, no están determinadas por la estructura diferenciable de M -las cartas- sino que hace falta un dato más para determinarlas -una conexión o spray-.

Por ejemplo, en el espacio vectorial E, es lógico considerar que la trayectoria más sencilla para ir de $v \in E$ hasta $w \in E$ es el segmento $\gamma : [0,1] \to E$ dado por

$$\gamma(t) = v(1-t) + tw = v + t(w - v).$$

Observación 6.1.1. Una característica importante de los espacios normados E es que los segmentos son caminos cortos entre dos puntos: en efecto, si $v, w \in E$ y $\Gamma \subset E$ une v con w, entonces si $S(t) = tv + (1-t)w$,

$$L(S) = \|v - w\|_E = \|\Gamma(0) - \Gamma(1)\|_E = \| \int_0^1 \dot{\Gamma} dt \|_E \leq \int_0^1 \|\dot{\Gamma}\|_E dt = L(\Gamma).$$

Esto no quita que pueda haber otros caminos cortos, ver el ejemplo a continuación.

Uno está orientado a pensar entonces que este segmento es el mejor camino porque, como vimos, es el camino más corto entre v y w. Pero en principio, en nuestra variedad no tenemos definida una métrica ni una distancia, así que vamos a postergar esas consideraciones. Además, hay otras complicaciones técnicas porque, por ejemplo, dependiendo de cómo sea la norma de E, puede haber otras curvas que no sean un segmento, con la misma longitud. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 6.1.2. Sea $E = \mathbb{R}^2$, con la norma

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|.$$

Sean $x = (0, 0)$, $y = (1, 1)$. Entonces

$$d(x, y) = \|(1, 1) - (0, 0)\|_1 = 1 + 1 = 2.$$

El segmento que los une es $\gamma(t) = (t, t)$, cuya velocidad (derivada) es $\dot{\gamma}(t) = (1, 1)$. Luego $\|\dot{\gamma}\|_1 = 2$, y obviamente

$$L_1(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\| dt = 2 = d(x, y).$$

Pero podemos tomar también la curva suave a trozos dada por

$$\beta(t) = \begin{cases} (2t, 0) & t \in [0, 1/2] \\ (1, 0) + (0, 2t - 1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

que une x con y en E. Su longitud es también

$$L_1(\beta) = \int_0^{1/2} \|(2, 0)\|_1 + \int_{1/2}^1 \|(0, 2)\|_1 = 1 + 1 = 2.$$

Un ejemplo similar se puede armar si consideramos $\mathbb{R}^2$ con la norma supremo

$$\|(x, y)\|_\infty = \text{máx}\{|x|, |y|\}.$$

En este caso se considera $x = (-1, 0)$, $y = (0, 1)$ y los dos caminos con la misma longitud ($= 2$) son:

- El segmento que los une.
- Una poligonal pasando por el punto $(0, 1)$.

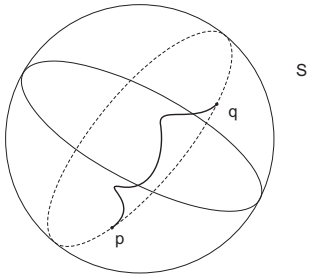
Ejemplo 6.1.3. Sea $E = M_2(\mathbb{C})$ (matrices 2×2 con coeficientes complejos), y la norma de E es la norma supremo usual, entonces se pueden armar ejemplos como los de antes usando matrices diagonales. Idem con la norma de la traza,

$$\|a\|_1 = \mathrm{Tr}|a|.$$

Volviendo al caso general, también puede pensarse que un segmento $\gamma \subset E$ en un espacio normado es el mejor camino porque la curva γ "no se dobla". Esto es porque $\ddot{\gamma} = 0$. En este caso la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}(t) = 0 \\ \alpha(0) = v \\ \dot{\alpha}(0) = w - v \end{cases}$$

tiene por el teorema usual una única solución $\alpha_{v,w}$, que es el segmento γ. Esta es la noción que queremos extender a la variedad diferenciable M. Si pensamos en una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, por ejemplo la esfera unitaria, queremos que la curva no se doble en un sentido más específico, pues lo que queremos distinguir son estas dos curvas, y quedarnos con la más "recta":



Cuando uno intenta expresar esta idea con total generalidad, se encuentra con una dificultad: está claro que si γ es una curva en M, entonces γ' es una curva en TM. Pero no está claro que quiere decir en general $\gamma'' = 0$. Consideremos la variedad unidimensional $M = S^1$. Dada una curva $\alpha : I \to S^1$, si la reparametrizamos será esencialmente

$$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Observemos que, como

$$\alpha'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t) \text{ y } \alpha''(t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t)$$

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 157

entonces $\alpha'' = 0$ no tiene sentido pues es nunca nula. Exceptuando por supuesto el caso en el que α fuera inicialmente una curva constante, que no es muy interesante. Sin mencionar que no verifica ninguna condición inicial no trivial del tipo $\alpha'(0) = v \in T_pS$. Observemos sin embargo que se verifica $\alpha' \perp \alpha''$, que puede pensarse como una condición sobre la métrica (el producto escalar de $\mathbb{R}^2$), pero también puede pensarse como que α'' no tiene componenente tangente.

Traslademos este ejemplo a la esfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Tomemos una curva de las que imaginamos "privilegiadas", por ejemplo

$$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0),$$

que es el ecuador de la esfera. Observemos que, como antes

$$\alpha'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) \text{ y } \alpha''(t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t, 0),$$

y nuevamente α'' no tiene componente tangente.

En general, dada una subvariedad $S \subset \mathbb{R}^n$, uno podría pensar que las geodésicas son aquellas curvas (de velocidad constante) en S tales que α'' no tiene componente tangencial a S en $\mathbb{R}^n$. Esta definición es correcta y muy natural, pero tiene algunos defectos:

- En algunos casos es conveniente pensar que las geodésicas responden a un principio de *mínima acción*, es decir, minimizan alguna funcional de energía en la variedad que no es necesariamente la norma Euclídea.
- Como caso particular de lo anterior, podemos buscar las curvas que minimizan (al menos localmente) la distancia para alguna norma que no coincida con la norma Euclídea.
- No queda claro que pasa si presentamos a S como subvariedad de otra forma, es decir, pareciera que las geodésicas dependen de la inclusión concreta $S \subset \mathbb{R}^n$, y no son algo intrínseco de la variedad S.
- En el caso $S \subset E$, donde ahora E es un espacio de Banach, no siempre está disponible un suplemento lineal en E para el espacio tangente T_pS -para cada $p \in S$- con lo cual la noción de "componente tangente" no está definida.

Aquí aparece la maquinaria algebraica. Lo que haremos será dar un mapa $F : TM \to TTM$ -llamado spray- para poder comparar a α' y α'' dentro del mismo espacio, y diremos que las geodésicas son las curvas que verifican $F(\alpha') = \alpha''$. En el caso trivial $M = E$ un espacio vectorial, tendremos $F = 0$ si queremos obtener los segmentos usuales en E. En este mapa, lo único importante es lo que hace F con la velocidad de α', en el siguiente sentido: queremos que F sea una sección del fibrado (π_*, TTM, TM) donde $\pi_* : TTM \to TM$ es la proyección dada por la diferencial de la proyección canónica $\pi : TM \to M$.

Observación 6.1.4. ¿Cómo se ve esto en coordenadas? Recordemos que en una carta local (U, φ) de M, se tiene $TU \simeq U \times E$ y

$$T(TM) \simeq (U \times E) \times (E \times E),$$

y si $\pi : TU \to U$ es $\pi(p, v) = p$, cuando movemos $(p, v) \in TM$ la proyección sólo se entera del movimiento del punto base, con lo cual para la diferencial de π las variables son p y su trivialización; es decir, si escribimos un punto genérico en TTM como $(p, v; u, w)$, donde $(p, v) \in U \times E \simeq TM$ y (u, w) es la correspondiente trivialización, entonces

$$\pi_*(p, v; u, w) = (p, u),$$

Si $F : TM \to TTM$ lo describimos en estas coordenadas, se tiene en principio

$$F(p, v) = (p, v; f_1(p, v), f_2(p, v)).$$

Para que se verifique $\pi_* F = id_{TM}$ debe ser $f_1(p, v) = v$, con lo cual

$$F(p, v) = (p, v; v, f_2(p, v)).$$

Observemos que $F(p, v)$ vive en el fibrado de las aceleraciones α'', que es el fibrado invariante por el flip canónico. Esta condición es indispensable para que pueda verificarse $\alpha'' = F(\alpha')$.

Lo único que importa es la última coordenada, que es la que "opera" sobre la velocidad v y la lleva al lugar donde vive la aceleración.

Hay un requerimiento adicional para que $F : TM \to TTM$ sea un spray: si M es una variedad C^k, entonces TM es una variedad C^{k-1} y $TTM = T(TM)$ es una variedad C^{k-2}, con lo cual M debe ser de clase C^k con $k \geq 2$, y si queremos que haya -localmente al menos- única solución del problema $F(\alpha') = \alpha''$, pediremos que F sea C^1.

Diremos que un spray es *homogéneo de grado* $m \geq 0$ si, en coordenadas locales, se tiene

$$f_2(p, sv) = s^m f_2(p, v)$$

para todo $(p, v) \in TU$ y $s \in \mathbb{R}$. Si F es homogéneo de grado 2, diremos que F es un *spray cuadrático o afín*. En ese caso, pongamos $Q_p(v) := f_2(p, v)$, $Q_p : E \to E$, que es una forma cuadrática en v. Formalmente, dado $s \in \mathbb{R}$, si $s : E \to E$ denota la multiplicación en cada fibra de un fibrado vectorial $s : (x, v) \mapsto (x, sv)$, denotamos con $s_* : TE \to TE$ a su derivada y entonces un campo $F : TM \to TTM$ es un spray cuadrático si para $V \in TM$ se tiene

$$F(sV) = s_* sF(V).$$

Una vez fijado un spray F en la variedad M -no repito el chiste- tenemos lo que se llama una *variedad diferenciable con spray* (M, F). Introducida a principios del siglo 20 -aunque sin ese nombre-, la noción de spray tuvos dos épocas de gran desarrollo, la primera en los años 30 debida al trabajo de Élie Cartan, y luego en la década del '60 donde se terminaron de establecer las bases de la teoría, por ejemplo Warren Ambrose, Richard Palais e Isadore Singer en el trabajo [2], establecen la equivalencia de la noción de spray con la de conexión afín.

6.1.1. Geodésicas

Una curva $\alpha : I \to M$ de clase C^2 es una *geodésica* de (M, F) si

$$\alpha'' = F(\alpha').$$

Por el teorema de existencia y unicidad de ODEs aplicado al problema $\beta' = F(\beta)$ -con $\beta : I \to TM$ una curva en el fibrado tangente-, esta ecuación tiene localmente solución única $\beta : I \to TM$; si llamamos $\alpha = \pi \circ \beta : I \to M$, entonces α es la geodésica del spray que estamos buscando (aquí π denota la proyección canónica $\pi : TM \to M$), lo cual se puede verificar de la siguiente manera: observemos primero que $\alpha' = \beta$, puesto que

$$\alpha_* = \pi_{*\beta} \circ \beta_*,$$

y componiendo con la sección canónica $i(t) = (t, 1)$, $i : I \to I \times \mathbb{R}$ se obtiene

$$\alpha' = \pi_{*\beta} \circ \beta' = (\pi_{*\beta} \circ F)(\beta) = \beta$$

que es la observación (que no es otra cosa que decir que β es la levantada canónica de α). Ahora, para ver que α es una geodésica diferenciamos $(\alpha')_* = \beta_*$ y volvemos a componer con la sección canónica para obtener

$$\alpha'' = \beta' = F(\beta) = F(\alpha')$$

que es lo que queríamos probar. En realidad lo que estamos diciendo es que el problema original se reduce a resolver el problema de orden uno dado por

$$A' = H(A)$$

donde $A = (\alpha, \beta) \in U \times TU$ y $H : U \times TU \to TU \times TTU$ está dada por

$$H(u, v) = (v, F(u, v)).$$

Observemos que una condición inicial para el problema es un par $p \in M$, $v \in T_pM$, pues la curva $\beta = \alpha'$ toma valores en TM. Es decir, que una vez fijado el spray, para cada punto $p \in M$ y cada dirección $v \in T_pM$ tenemos una geodésica que pasa por p y tiene velocidad inicial v.

6.1.2. Exponencial

Dado $V = (p, v) \in TM$, denotamos $\alpha_V : I_V \subset \mathbb{R} \to M$ a la única geodésica del spray tal que $\alpha_V(0) = p$, $\dot{\alpha_V}(0) = v$, con I_V un intervalo abierto que contiene al $0 \in \mathbb{R}$. Definimos el *dominio de la exponencial* del spray $\mathcal{D} \subset TM$ como el conjunto

$$\mathcal{D} = \{V = (p, v) \in TM : 1 \in I_V\}.$$

No es difícil probar que este conjunto es un abierto en TM que contiene a la sección nula (Ejercicio 6.III). Definimos la *exponencial* del spray $\exp : \mathcal{D} \to M$ como la función diferenciable

$$\exp(p, v) = \alpha_V(1).$$

Observemos que $\exp(p, 0) = p$ para todo $p \in M$. Pongamos $\mathcal{D}_p = \{v \in T_pM : (p, v) \in \mathcal{D}\}$, y denotemos $\exp_p : \mathcal{D}_p \subset T_pM \to M$ a la aplicación $\exp_p(v) = \exp(p, v)$. Esta resulta una aplicación diferenciable que asigna $0 \mapsto p$.

Definición 6.1.5. Diremos que M es *geodésicamente completa en* $p \in M$ si $\mathcal{D}_p = T_pM$. Es decir, si las geodésicas que pasan por p se pueden prolongar para todo $t \in \mathbb{R}$. Diremos que M es *geodésicamente completa* si es geodésicamente completa en p para todo $p \in M$.

Por ejemplo, si $M = \mathbb{R}^2$ con el spray nulo $F = 0$, las geodésicas son las rectas y resulta completa. Sin embargo, si removemos un punto, por ejemplo $p = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, entonces $M = \mathbb{R}^2 - \{p\}$ no es geodésicamente completa en ningún $q \in M$, pues la recta (geodésica del spray $F = 0$) que comienza en q, en la dirección de p, sólo está definida para $t < d(q, p)$.

6.2. Sprays cuadráticos o afines

No vamos a lidiar con los sprays en toda generalidad, para lo que queremos hacer nos alcanza con restringirnos a aquellos que son cuadráticos. Los distingue una cualidad: *las geodésicas de sprays cuadráticos son curvas de velocidad constante.* Con más precisión:

Lema 6.2.1. *Sea* $F : TM \to TTM$ *un spray cuadrático,* $V = (p, v) \in TM$. *Entonces*

1. *Si* $s, t \in \mathbb{R}$, *entonces* $st \in I_V$ *si y sólo si* $s \in I_{tV}$, *y además*

$$\alpha_V(st) = \alpha_{tV}(s).$$

2. *Las curvas* $\epsilon(t) = \exp_p(tv)$ *son las únicas geodésicas del spray.*

Demostración. Supongamos que $st \in I_V$, esto es α_V está definida en un intervalo que contiene al producto st. Sea $\beta(x) = \alpha_V(sx)$, definida en $[0,t]$ por lo menos. Derivando, tenemos (en coordenadas locales para no cargar la notación)

$$\dot\beta(x) = \dot\alpha_V(sx)s,$$

reemplazando $x = 0$ se deduce que $\beta'(0) = (p, sv)$. Si denotamos $Q = Q_p = f_2(p,\cdot)$, derivando de nuevo respecto de x, se tiene

$$\ddot\beta(x) = \ddot\alpha_V(sx)s^2 = s^2Q(\dot\alpha_V(sx)) = Q(s\dot\alpha_V(sx)) = Q(\dot\beta(x))$$

con lo cual β es una geodésica del spray, lo que prueba de un saque que $t \in I_{sV}$ y la identidad. Para probar la segunda afirmación, observemos que por lo que recién probamos,

$$\epsilon(t) := \exp_p(tv) = \exp(p, tv) = \alpha_{p,tv}(1) = \alpha_{tV}(1) = \alpha_V(t)$$

de donde se deduce que ϵ es la única geodésica del spray con $\epsilon'(0) = (p,v) = V$. □

Recíprocamente, si vale la condición del primer ítem para un spray dado y arbitrario, entonces derivando dos veces respecto de s y evaluando en $s = 0$ obtenemos que

$$F(tV) = F(\alpha'_{tV}(0)) = \alpha''_{tV}(0) = t^2\alpha''_V(0) = t^2F(\alpha'_V(0)) = t^2F(V).$$

Luego *vale la recíproca del primer ítem, lo que caracteriza a los sprays cuadráticos.*

Observación 6.2.2. Se tiene

$$(\exp_p)_{*0}(v) = \epsilon'(0) = (p,v).$$

Luego *la diferencial de la exponencial en el origen es la identidad, y por ello* $\exp_p$ *es un difeomorfismo local* entre abiertos alrededor de $0 \in T_pM$ y $p \in M$ respectivamente.

6.2.1. Entornos uniformemente normales

Usando la exponencial en todo el fibrado tangente, podemos construir *entornos uniformemente normales* W en la variedad M que nos permiten asegurar que para todo punto $p \in W$, la exponencial en p está definida en una cierta bola de radio r alrededor del origen de T_pM, y este $r > 0$ *es el mismo para todo* $p \in W$. Fijemos la norma de E, el espacio de Banach que modela M, y denotemos $\|\cdot\| = \|\cdot\|_E$ a la misma. Sea $B_r(0)$ la bola abierta de radio $r > 0$ alrededor de $0 \in T_pM \simeq E$. Sea

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 162

$\mathcal{D} \subset M$ el dominio de la exponencial de (M, F), y definamos $G : \mathcal{D} \to M \times M$ el mapa dado por

$$G(p, v) = (p, \exp_p(v)).$$

Entonces en una carta, la diferencial de G en $(p, 0) \in TM$ está dada por la matriz

$$DG_{(p,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \star & 1 \end{pmatrix}.$$

En particular $DG_{(p,0)}$ es inversible y el teorema de la función inversa nos dice que G es un isomorfismo local de un entorno de la sección nula 0_{TM} en un entorno de la diagonal $\Delta_M = \{(p, p) : p \in M\}$. Observemos que los entornos abiertos de la sección nula en TM (en una carta) son de la pinta

$$V \simeq U \times B_R(0)$$

con $U \subset M$ abierto.

Teorema 6.2.3. *Sea $p \in M$, y sea $V \simeq U \times B_R(0)$ entorno abierto de $(p, 0) \in TM$ de manera que $G|_V$ es un difeomorfismo con su imagen y $U = \pi(V) \subset M$ es abierto. Sea $W \subset M$ entorno abierto de M tal que $W \times W \subset G(V)$. Entonces*

1. *Dados $x, y \in W$, existe una única geodésica $\gamma_{x,y}$ de M que los conecta con $\gamma \subset U$. La dependencia de γ respecto de x, y es suave.*
2. *Para cada $x \in W$ la exponencial $\exp_x$ está definida por lo menos en $B_R(0) \subset T_xM$ y es un difeomorfismo de $B_r(0)$ en el abierto $U_r(x) = \exp_x(B_r(0))$ para todo $r \leq R$. Además $\gamma_{x,y} \subset U_R(x)$ y en particular $W \subset U_R(x)$.*

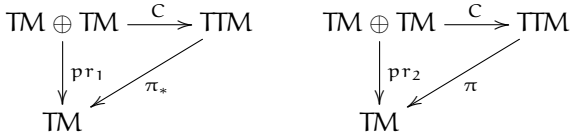
Demostración. La existencia de la geodésica está dada por el mapa $G|_V$, es decir consideramos $G^{-1}(x, y) = (x, v) \in V$ y entonces $(x, y) = G(x, v) = (x, \exp_x(v))$ luego $y = \exp_x(v)$. La unicidad es consecuencia de que G es biyectiva, y la dependencia suave de x, y es consecuencia de la suavidad de G.

Que la exponencial está definida por lo menos en $B_R(0)$ y es un difeomorfismo es nuevamente consecuencia del hecho de que G da las geodésicas y es un difeomorfismo. Por último, como $\gamma(t) = \exp_x(tv)$ con $v \in B_R(0)$, obviamente $\gamma \subset U_R(x)$. □

6.3. Conexiones

Una noción relacionada íntimamente con la de spray es la de conexión en M. Diremos que $C : TM \oplus TM \to TTM$ es una *conexión afín* si C es bilineal y natural para las dos estructuras de TTM como fibrado vectorial sobre M. Más precisamente, recordemos que $TM \oplus TM$ representa el producto fibrado de TM con TM sobre M,

mientras que pr_1, pr_2 son las proyecciones naturales en cada coordenada. Entonces C debe verificar que $\pi_* \circ C = pr_1$ y $\pi_{TM} \circ C = pr_2$, es decir deben conmutar los diagramas



En coordenadas locales, se deduce que C tiene que tener la pinta

$$((x,v);(x,u)) \mapsto (x,u;v,\Gamma^C_x(v,u))$$

con Γ_x lineal en v,u por separado. Es decir, Γ^C es un operador bilineal.

Evidentemente, toda conexión afín induce un spray de forma natural tomando

$$Q_p(v) = \Gamma^C_p(v,v).$$

Es decir si $\Delta : TM \to TM \oplus TM$ indica la inclusión diagonal

$$\Delta(x,v) = ((x,v);(x,v)),$$

entonces $F := C \circ \Delta : TM \to TTM$ es un spray cuadrático en M.

Recíprocamente, dado un spray cuadrático $F : TM \to TTM$ en M, podemos considerar la conexión afín inducida por la forma bilineal Γ del spray, de la siguiente manera. Si Q_p es la forma cuadrática asociada al spray F (con $p \in M$), recordemos que toda forma cuadrática de un espacio vectorial en otro (en este caso el mismo) define una forma bilineal $\Gamma_p : E \times E \to E$ de la siguiente manera:

$$\Gamma_p(v,u) = 1/2\,[Q_p(v+u) - Q_p(v) - Q_p(u)]\,.$$

Sean $V = (p,v)$, $W = (p,w)$ vectores en TM. Formalmente, $C : TM \oplus TM \to TTM$ está dado por $X = C(V,W) \in TTM$ donde X es la única solución de la ecuación lineal

$$(F(V) +_{\pi_*} X) +_{\pi} (F(W) +_{\pi_*} jX) = F(V+W),$$

donde j es el flip canónico de TTM. En coordenadas locales es simplemente

$$\begin{aligned} C((x,v);(x,w)) &= (p,v;u, Q_p(v+u) - Q_p(v) - Q_p(u)) \\ &= (p,v;u, 2\Gamma_p(v,u)). \end{aligned}$$

Observemos que $C \circ \Delta = 2F$, pero el factor 2 es irrelevante ya que F y 2F tienen las mismas geodésicas; podría haberse obtenido Γ introduciendo un factor $\sqrt{2}$ en la definición de la conexión C.

La presentación como sprays es la más directa para obtener las geodésicas, de hecho un spray es como un set de ecuaciones diferenciables compatibles en M. Sin

embargo, tal vez la forma más honestamente geométrica de presentar el spray es vía su conexión afín asociada. Para ello veamos qué información nos da una conexión afín $C : TM \oplus TM \to TTM$ genérica. Definimos

$$\mathcal{H}^C = \mathrm{Im}(C) = \{C(V,W) : (V,W) \in TM \oplus TM\} \subset TTM$$

que resulta una distribución de subespacios en TTM, es decir un subfibrado que se denomina *fibrado horizontal* inducido por la conexión C. De hecho se trata de una distribución vectorial *para las dos estructuras vectoriales de* TTM, ya que

$$(p,v;w,\Gamma^C(v,w)) +_\pi (p,v;w',\Gamma^C(v,w')) = (p,v;w+w',\Gamma^C(v,w+w'))$$

y

$$(p,v;w,\Gamma^C(v,w)) +_{\pi_*} (p,v';w,\Gamma^C(v',w)) = (p,v+v';w,\Gamma^C(v+v',w))$$

por ser Γ^C bilineal. Un hecho fundamental de este fibrado horizontal es el siguiente: es un suplemento para el fibrado vertical en TTM.

Lema 6.3.1. *Sea* C *una conexión en* M *y* VTM $\subset$ TTM *el fibrado vertical. Entonces*

$$\mathcal{H}^C \oplus VTM = TTM \quad y \quad \mathcal{H}^C \oplus_* VTM^* = TTM$$

como suma de Whitney sobre TM. *En coordenadas, si* $Z = (x,v;u,w) \in TTM$, *entonces tomando*

$$Z_V = (x,v;0,w-\Gamma^C(v,u)) \in VTM^*$$

y

$$Z_{\mathcal{H}} = (x,v;u,\Gamma^C(v,u)) \in \mathcal{H}^C$$

se tiene $Z = Z_V +_{\pi*} Z_{\mathcal{H}}$ *y una descomposición similar se tiene para la otra estructura de fibrado sobre* TM.

Demostración. Definimos $Z_V = Z -_{\pi_*} Z_{\mathcal{H}} = Z -_{\pi_*} C(V,U)$, con $V = (x,v)$, $U = (x,u)$ en TM. Que $Z_V \in VTM^*$ se desprende de la Observación 5.1.1. Para ver que la suma es directa, si

$$Z = (x,v;0,w) = (x,v;u,\Gamma^C(v,u)),$$

entonces $u = 0$ con lo cual $\Gamma^C(v,u) = 0$ por la bilinealidad, y esto nos dice que $w = 0$. Es decir $Z = 0_{(x,v)}$ que es lo que queríamos probar. □

Recíprocamente (Ejercicio 6.IV), es fácil ver que dada una distribución $\mathcal{H}$ de subfibrados de TTM que suplementen VTM, esta descomposición induce una conexión afín (y por ende un spray cuadrático) en M.

Observación 6.3.2. En presencia de una conexión C_M en M, es posible dotar al fibrado de aceleraciones en M de una estructura de fibrado vectorial que lo hace isomorfo a $TM \oplus TM$, vía la identificación

$$\alpha'' \leftrightarrow (\alpha', pr_2(\alpha''_V)),$$

es decir en coordenadas

$$(\alpha, \dot\alpha; \dot\alpha, \ddot\alpha) \leftrightarrow ((\alpha, \dot\alpha); (\alpha, \ddot\alpha - \Gamma^C(\dot\alpha, \dot\alpha)).$$

Si N es otra variedad diferenciable, que tiene una conexión C_N, entonces se puede repetir el procedimiento. Una condición suficiente para que, dada $f : M \to N$ de clase suave, la aplicación $T^2 f : TTM \to TTN$, restringida al fibrado de aceleraciones con sus correspondientes estructuras de fibrado vectorial, sea una aplicación lineal, está dada por

$$\nabla_N \circ T^2 f = Tf \circ \nabla_M$$

con ∇ las correspondientese derivadas covariantes inducidas (ver la próxima sección). En este caso se dice que las conexiones están f-relacionadas. Es decir, con esta condición, si α es una curva en M, entonces la aplicación

$$[\alpha'']_p \mapsto [(f \circ \alpha)'']_{f(p)}$$

es una aplicación lineal para las estructuras inducidas por las conexiones. Los detalles pueden verse en un trabajo [34] de Dodson et. al.

6.4. Conexión de Koszul

Toda conexión afín induce naturalmente una derivada covariante. Recordemos brevemente la definición de derivada covariante (también conocida como *conexión de Koszul*: es una forma $\mathbb{R}$-bilineal de campos en campos, $\nabla : \chi(M) \times \chi(X) \to \chi(M)$ que verifica

$$\nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X Y, \qquad \nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$$

para todo par $X, Y \in \chi(M)$, y toda $f \in C^1(M)$. También vamos a pedir que $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [Y, X]$, aunque alguna definición más general no lo pone como requisito, y de hecho

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [Y, X]$$

es la *torsión* de la derivada covariante. Es decir, nos restringimos a derivadas covariantes sin torsión.

Observación 6.4.1. Si T es la torsión, entonces es fácil ver usando las propiedades de ∇ y del corchete de Lie que $T(fX, Y) = fT(X, Y) = T(X, fY)$ para toda función suave f. Si definimos

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \tfrac{1}{2} T(X, Y) = \tfrac{1}{2} (\nabla_X Y + \nabla_Y X + [Y, X]) \tag{6.1}$$

podemos probar usando la propiedad mencionada que $\overline{\nabla}$ es una derivada covariante, y que $\overline{T} = 0$, es decir que podemos obtener siempre una derivada covariante con torsión nula a partir de una dada. Dejamos como ejercicio para el lector probar que esta nueva conexión tiene las mismas geodésicas que la original.

Si tenemos una conexión afín Γ, definimos localmente

$$\nabla_X Y = DY(X) - \Gamma(X, Y).$$

Es decir, en coordenadas,

$$\nabla_X Y(p) = DY_p(X_p) - \Gamma_p(X_p, Y_p).$$

La definición intrínseca es como sigue: dado que $Y, X : M \to TM$ son campos, consideramos $Y_* X = Y_* \circ X : M \to TTM$ y $X \oplus Y : M \to TM \oplus TM$. Es fácil ver que, para cada $p \in M$,

$$Y_* X -_\pi \Gamma(X \oplus Y)|_p \in VTM = \ker \pi_*$$

pues $\pi_* \circ Y_* = id_{TM}$ y $\pi_* \circ \Gamma = pr_1$. Entonces si $V : TM \oplus TM \to VTM$ indica el isomorfimo vertical, se tiene

$$\nabla_X Y(p) = pr_2 \circ V^{-1}(Y_* X -_\pi \Gamma(X \oplus Y))(p) \in T_p M.$$

No es difícil ver que ∇ es una derivada covariante: ciertamente es lineal para funciones en la primer variable, y en la segunda

$$\begin{aligned} \nabla_X(fY) &= D(fY)(X) - f\Gamma(X, Y) = Df(X)Y + fDY(X) - f\Gamma(X, Y) \\ &= X(f)Y + f\nabla_X Y. \end{aligned}$$

Recíprocamente, dada una derivada covariante en M, podemos definir localmente

$$\Gamma^\nabla(X, Y) = Y'X - \nabla_X Y,$$

y es más o menos evidente que si ∇ era la derivada inducida por un spray F, entonces $\Gamma^\nabla(X, X) = F(X)$, es decir se recupera el spray. Pero *atención*: queremos definir Γ^∇ para vectores tangentes, no sólo para campos. Es necesario ver que *el valor de* $\Gamma^\nabla(X, Y)$ *sólo depende del valor de los campos* Y, X *en el punto* $p \in M$, y para ello es necesaria cierta condición de pegado que por ejemplo, se satisface si E es un Hilbert o si E tiene dimensión finita. Los detalles de esta construcción están en [58, pág.

197]. Esencialmente se requiere que la variedad M admita particiones de la unidad de clase C^2 y para ello, en el caso particular en que M sea paracompacta, alcanza con que el espacio de Banach E que modela M sea separable y C^2-normal, es decir, que para todo abierto $U \subset E$ exista una función $\psi : E \to [0,1]$ de clase C^2 de manera que $U = \{v \in E : \psi(v) > 0\}$. En particular si E es separable y su norma es de clase C^2 en $E - \{0\}$, entonces E es C^2-normal. Los detalles y pruebas de estas afirmaciones pueden verse en [60, III.§6].

6.5. Sprays canónicos

En general, el nombre *canónico* aplicado a sprays es vago y depende mucho del contexto. En líneas generales, podemos decir que son sprays que se construyen con la estructura dada de la variedad, sin agregar elementos novedosos o elecciones particulares. Por ejemplo, a partir de diferenciales de campos. Seamos precisos, pero primero hagamos una observación.

Observación 6.5.1. Si $X(p) = (p, X_p)$, $Y(p) = (p, Y_p)$ son campos en M, calculamos $Y_* : TM \to TTM$ en coordenadas: denotemos con $[\alpha] \in TM$ la clase de las curvas con $\alpha(0) = p \in M$, $\dot\alpha(0) = v \in T_pM$, entonces $Y_*([\alpha]) = [Y \circ \alpha]$, es decir, poniendo

$$Y \circ \alpha = (\alpha, Y_\alpha)$$

y derivando $Y_{\alpha(t)}$ en $t = 0$ obtenemos

$$Y_{*p}(v) = Y_*(p, v) = (p, Y_p; v, DY_p v) \in T_{Y(p)}TM.$$

Obviamente, $\pi_* \circ Y_* = id_{TM}$ por construcción (aquí $\pi : TM \to M$ denota la proyección canónica como antes), derivando $\pi \circ Y = id_M$. Entonces

$$Y'(X)(p) = Y_*(p, X_p) = (p, Y_p; X_p, DY_p X_p)$$

Dado $X : M \to TM$ un campo, tenemos $X_* : TM \to TTM$ en coordenadas:

$$X_{*p}(v) = X_*(p, v) = (p, X_p; v, DX_p v) \in T_{X(p)}TM.$$

Para $v = X_p$,

$$X_{*p}(X_p) = X_*(p, X_p) = (p, X_p; X_p, DX_p(X_p)) \in T_{X(p)}TM,$$

lo que nos dice lo siguiente: es razonable suponer que hay algún spray en M de manera que la forma cuadrática asociada sea $Q_p(X_p) = DX_p(X_p)$ para cualquier campo $X : M \to TM$ de clase C^k con $k \geq 1$. La forma bilineal asociada en este caso sería

$$2\Gamma_p(X_p, Y_p) = DX_p(Y_p) + DY_p(X_p),$$

para cualquier par de campos $X, Y : M \to TM$. La derivada covariante asociada en este caso sería

$$\nabla_X Y = Y'X - \Gamma(X, Y) = \tfrac{1}{2}(Y'X - X'Y) = \tfrac{1}{2}[X, Y],$$

El problema es que no está claro si la definición que dimos es buena en el sentido de que sólo razonamos sobre campos, pero tenemos que decir como actúa el spray en cualquier $V \in TM$. Sin embargo si $M = G$ es un grupo de Lie-Banach, se puede definir correctamente F. No lo haremos con esta generalidad, nos vamos a contentar con hacerlo para el grupo de inversibles de un álgebra de Banach, en la Sección 7.6 (Ejemplo 7.6.3).

6.6. La derivada covariante: derivar y proyectar

Veamos el sentido geométrico de la idea de conexión, que era el propósito del Lema 6.3.1. Si $M \subset F$ es una subvariedad de un espacio de Banach F, ya discutimos que VTM es en realidad una manera abstracta (intrínseca) de presentar los espacios tangentes a M como subespacios de un espacio más gordo. En presencia de un fibrado horizontal, lo que tenemos es, para cada punto $Z = (p, z) \in TM$, un subespacio $H_Z \subset F$ que suplementa $V_Z TM$, es decir

$$T_Z TM = V_Z TM \oplus H_Z,$$

y la asignación $V \mapsto H_V$ es suave. Esta noción deriva de la siguiente idea geométrica: supongamos que para cada $p \in M \subset F$ existe un suplemento $H_p \subset F$ que varía en forma suave con p. Es decir, que para todo $p \in M$,

$$F = T_p M \oplus H_p.$$

Sea $E_p \in \mathcal{B}(F)$ el proyector asociado tal que $\operatorname{ran}(E_p) = T_p M$, $\ker(E_p) = \operatorname{ran}(1 - E_p) = H_p$. Estamos suponiendo que $p \mapsto E_p$ es un mapa suave $E : M \to \mathcal{P}(F)$ de M en los idempotentes de F. Notemos que, como $E_* : TM \to T\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(F)$, entonces para $p \in M$, $v \in T_p M$, $E_{*p,v}$ es un operador lineal de F en F, que depende también linealmente de $v \in T_p M$. Esta familia nos permite introducir un spray en M de la siguiente manera.

Teorema 6.6.1. *Dado* $(p, v) \in TM$, *sea* $F(p, v) = (p, v; v, E_{*p,v}v)$. *Entonces* F *es un spray cuadrático en* M *cuyas geodésicas son las curvas de aceleración normal*

$$E_\alpha(\alpha'') = 0.$$

La conexión asociada $\Gamma : TM \oplus TM \to TTM$ *está dada por la forma bilineal*

$$\Gamma_p(v, w) = E_{*p,v}w = E_{*p,w}v.$$

Demostración. Para $\alpha \subset M$ con $\alpha'(0) = (p, v) \in TM$, sea $E_t = E_{\alpha(t)}$. A partir de $E\dot{\alpha} = \dot{\alpha}$ deducimos, derivando en $t = 0$ que $\dot{E}\dot{\alpha} + E\ddot{\alpha} = \ddot{\alpha}$. Luego

$$E_{*p,v}v = \dot{E}_0\dot{\alpha}(0) = (1 - E_p)\ddot{\alpha}(0).$$

Veamos usando esta última expresión que $F(p, v) \in TTM$. Sea

$$\beta(t) = (\alpha(t), \dot{\alpha} - tE_t(\ddot{\alpha})) \in TM.$$

Entonces $\beta(0) = (p, v)$, y por otra parte

$$\beta'(0) = (p, v; v, \ddot{\alpha}(0) - E_p\ddot{\alpha}(0) - 0) = F(V).$$

Evidentemente, F es un spray cuadrático, y como

$$F(\alpha, \dot{\alpha}) = (\alpha, \dot{\alpha}; \dot{\alpha}, (1 - E)\ddot{\alpha})$$

las geodésicas de este spray son las curvas con aceleración normal. Respecto de Γ, lo que el teorema afirma es que *para* $v, w \in T_pM$, $E_{*p}(v)w = E_{*p}(w)v$. Para probarlo, consideramos cualquier curva $\alpha(s, t) \in M$ dos veces diferenciable como aplicación de $\mathbb{R}^2$ en M, tal que $\alpha(0, 0) = p$, $\alpha'(0, 0) = v$, $\dot{\alpha}(0, 0) = w$ donde $'$ denota d/ds y $\dot{}$ denota d/dt. Entonces de $E_\alpha\alpha' = \alpha'$, derivando respecto de t conseguimos

$$E_{*\alpha,\dot{\alpha}}\alpha' + E_\alpha\left(\frac{d}{dt}\alpha'\right) = \frac{d}{dt}\alpha'.$$

Evaluando en $s = t = 0$ obtenemos

$$E_{*p,w}v = (1 - E_p)\dot{\alpha}'(0, 0),$$

y como $\dot{\alpha}' = \frac{d^2}{dtds}\alpha = \frac{d^2}{dsdt}\alpha$, se sigue que v, w son intercambiables si uno repite el argumento comenzando con la relación $E_\alpha\dot{\alpha} = \dot{\alpha}$. □

Observación 6.6.2. En general, el operador bilineal $\Gamma_p : T_pM \times F \to F$ dado por

$$\Gamma_p(v, w) = E_{*p,v}w$$

es simétrico sólo cuando $w \in T_pM$ (ver los ejemplos).

Observación 6.6.3. Si ∇ es la derivada covariante asociada al spray F, entonces para cualquier par de campos $X, Y : M \to TM$ recordemos que

$$\nabla_X Y = Y'X - \Gamma(X, Y)$$

es como se obtiene ∇ a partir del spray. Entonces, si $\alpha \subset M$ es cualquier curva suave tal que $\alpha(0) = p$, $\dot{\alpha}(0) = X_p$, derivando en $t = 0$ la relación $E_t(Y_\alpha) = Y_\alpha$ (donde $E_t = E_{\alpha(t)}$ como antes), deducimos que

$$E_{*p,X_p}Y_p + E_p(DY_pX_p) = DY_pX_p,$$

lo que nos dice que

$$\nabla_X Y(p) = DY_p X_p - \Gamma_p(X_p, Y_p) = DY_p X_p - E_{*p,X_p} Y_p = E_p(Y'X(p)),$$

es decir $\nabla_X Y = E(Y'X)$, luego la derivada covariante es simplemente *derivar en el ambiente y proyectar al espacio tangente*.

Observación 6.6.4. En el caso de una subvariedad de $\mathbb{R}^m$, si consideramos los suplementos dados por el producto interno, se tiene la *conexión de Levi-Civita*. Si la subvariedad tiene dimensión n, podemos tomar una base $\{e_i\}_{i=1\ldots n}$ ortonormal en cada espacio tangente. Denotemos con X_i a los campos definidos localmente por estos vectores: se tiene que $\nabla_{X_i} X_j$ es nuevamente un elemento en el espacio tangente y por ende lo podemos escribir como combinación lineal de los elementos de la base:

$$X_i' X_j - \Gamma(X_i, X_j) = \nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} -\Gamma_{ij}^k X_k,$$

con $-\Gamma_{ij}^k$ números reales. Si $\alpha \subset M$ es una geodésica, entonces escribimos $\dot\alpha$ en la base de los X_k:

$$\dot\alpha = \sum_{k=1}^{n} \dot\alpha^k X_k$$

y como $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = D_\alpha \dot\alpha = 0$, tenemos

$$\ddot\alpha_k = \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot\alpha_i \dot\alpha_j.$$

Estos coeficientes son conocidos como *símbolos de Christoffel de la conexión*.

6.7. Derivada covariante y transporte paralelo

En general, se puede definir la *derivada covariante* de una curva cualquiera $\gamma \subset M$ de la siguiente manera: se engorda la curva a un campo definido en un entorno abierto U de γ en M, que llamaremos $\dot\gamma : U \to TU$, que verifique $\dot\gamma(\gamma(t)) = \dot\gamma(t)$. Se define

$$D\gamma(t) := \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(\gamma(t)),$$

donde ∇ es la derivada covariante del spray. No es difícil probar que esta definición es buena pues depende solamente de los valores del campo a lo largo de γ. Explícitamente, en términos del spray, se tiene

$$D\gamma = \ddot\gamma - \Gamma(\dot\gamma, \dot\gamma).$$

Entonces las geodésicas son las curvas que tienen *derivada covariante nula*. La ecuación

$$D\gamma = \ddot\gamma - \Gamma(\dot\gamma, \dot\gamma) = 0$$

se conoce como *ecuación de Euler* del spray.

6.7.1. Derivada covariante de levantadas

Una manera más concreta usando Γ de definir la derivada covariante es la siguiente: dada $\alpha : J \to M$ una curva de clase C^k con $k \geq 2$, definimos $Lev(\alpha)$ como el espacio de todas las levantadas de α de clase C^1, es decir curvas $\beta \subset TM$ tales que $\pi\beta = \alpha$, donde $\pi : TM \to M$ es la proyección al punto base. Este conjunto es no vacío ya que (por lo menos) $\beta = \alpha' \in Lev(\alpha)$. Además $Lev(\alpha)$ es un espacio lineal y un módulo sobre las funciones $f : J \to \mathbb{R}$ con las operaciones usuales del fibrado,

$$(\alpha, \mu) + (\alpha, \tau) = (\alpha, \mu + \tau), \qquad f(\alpha, \mu) = (\alpha, f\mu).$$

Lema 6.7.1. *Si $\beta = (\alpha, \mu) \in Lev(\alpha)$, la aplicación $D_{\alpha'} : Lev(\alpha) \to Lev(\alpha)$ dada en una carta por*

$$D_{\alpha'}\beta = (\alpha, \dot{\mu} - \Gamma_\alpha(\dot{\alpha}, \mu)) \tag{6.2}$$

es lineal, verifica $D_{f\alpha'}\beta = fD_{\alpha'}\beta$ para toda función suave f (donde $f\alpha'$ está dado en una carta por $(\alpha, f\dot{\alpha})$, y además es una derivación en el sentido siguiente:

$$D_{\alpha'}(f\beta) = f'\beta + fD_{\alpha'}\beta$$

para toda $f : J \to \mathbb{R}$. Además si $Y : M \to TM$ es un campo tal que $Y(\alpha(t)) = \beta(t)$ para todo $t \in J$, y $X : M \to TM$ es otro campo tal que $\alpha'(c) = X(\alpha(c))$ para algún $c \in J$, entonces

$$D_{\alpha'}\beta(c) = \nabla_X Y(\alpha(c)).$$

Demostración. La prueba de que la definición no depende de la carta queda como ejercicio; que es lineal y una derivación es obvio. La última afirmación es consecuencia de la relación $\nabla_X Y = Y'X - \Gamma(X, Y)$ y de

$$\dot{\mu} = \frac{d}{dt} Y_{\alpha(t)} = DY_\alpha \alpha' = Y'X.$$

□

Diremos que $\beta \in Lev(\alpha)$ es *α-paralelo* si $D_{\alpha'}\beta \equiv 0$, es decir si

$$\dot{\mu} = \Gamma_\alpha(\dot{\alpha}, \mu). \tag{6.3}$$

Al conjunto de levantadas α-paralelas lo denotamos con $Par(\alpha)$. Observemos que si $\beta = \alpha' = (\alpha, \dot{\alpha})$, se tiene

$$D_{\alpha'}\alpha' = (\alpha, \ddot{\alpha} - \Gamma_\alpha(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})).$$

Luego α' es α-paralela si y sólo solo si α es una geodésica del spray, es decir si verifica la ecuación de Euler. Por eso se suele decir que las geodésicas son las únicas curvas *auto-paralelas*.

Observación 6.7.2. Es habitual denotar la derivada covariante a lo largo de α como D_t a secas, cuando se desprende del contexto cuál es la curva a lo largo de la cual se deriva. Así, por ejemplo, un geodésica se caracteriza con la ecuación $D_t\alpha' = 0$.

6.7.2. Transporte paralelo

El siguiente teorema contiene los ingredientes necesarios para definir el transporte paralelo en M. Suponemos como antes que $\alpha : J \to M$ es por lo menos C^2.

Teorema 6.7.3. *Sea* $a \in J$. *Dado* $v \in T_{\alpha(a)}M$ *existe una única* $\beta_v = (\alpha, \mu_v) \in \mathrm{Par}(\alpha)$ *tal que* $\mu_v(a) = v$. *Si* $b \in J$ *y* $P = P_a^b(\alpha) : T_{\alpha(a)}M \to T_{\alpha(b)}M$ *denota la aplicación* $v \mapsto \mu_v(b)$, *entonces* P *es un isomorfismo de espacios de Banach, que denominamos* transporte paralelo a lo largo de α. *Además, para todo* $c \in J$, $P_c^b \circ P_a^c = P_a^b$.

Demostración. Consideramos la ecuación (6.3), que es esencialmente una ecuación del tipo $\dot{\mu}(t) = A(t)\mu(t)$ con el operador

$$A(t) = \Gamma_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t), \cdot)$$

lineal para cada $t \in J$ fijo. Por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones ordinarias, la curva solución μ_v con $\mu_v(a) = v$ es única y nos da la curva β_v requerida, que está definida en todo J porque la ecuación es lineal, con lo cual es globalmente Lipschitz. Considerando que el flujo de la ecuación diferencial está definido en J, entonces $P_a^b = P_c^b \circ P_a^c$ para todo $a, b, c \in J$ por propiedades generales del flujo. En particular, la aplicación $P_a^b(\alpha)$ es biyectiva entre los tangentes porque tiene una inversa que se construye de manera análoga (intercambiando a con b). Las relaciones

$$P(\lambda v) = \lambda P(v), \qquad P(v + w) = P(v) + P(w)$$

se deducen de la unicidad de la solución reemplazando en la ecuación diferencial lineal. □

Observación 6.7.4. Si $\alpha(t) = \exp_p(tv)$, entonces es fácil ver que el transporte paralelo a lo largo de α del vector $v \in T_pM$ está dado sencillamente por $\dot{\alpha}(t)$, pues esta levantada verifica la ecuación diferencial del transporte con la condición inicial requerida.

Observación 6.7.5. En el caso de una subvariedad $M \subset F$ y una familia de suplementos $H_p \oplus T_pM = F$ dada por proyectores E_p, la ecuación $\dot{\mu} - \Gamma_\alpha(\dot{\alpha}, \mu)$ se traduce en

$$\dot{\mu} - E_{*\alpha,\dot{\alpha}}\mu$$

donde se sobreentiende que $\mu \in T_\alpha M = \mathrm{ran}(E_\alpha)$. Luego $\beta = (\alpha, \mu)$ es α-paralela si y sólo si $\dot{\mu} = E_{*\alpha,\dot{\alpha}}\mu$ y la ecuación de transporte paralelo desde $\alpha(0)$ hasta $\alpha(t)$ es, para $v \in T_{\alpha(0)}M$,

$$\begin{cases} \dot{\mu} = E_{*\alpha,\dot{\alpha}}\mu \\ \mu(0) = v \end{cases} . \tag{6.4}$$

Para cerrar este capítulo, veamos que podemos recuperar la conexión y la derivada covariante a partir del transporte paralelo, como muestra el siguiente lema:

Lema 6.7.6. *Sean* X, Y *campos en* M, *sea* $\gamma : I \to M$ *curva* C^1 *con* $\gamma_0 = p, \gamma'(0) = X_p$. *Entonces*

1. $\nabla_X Y(p) = \frac{d}{ds}\big|_{s=0} P_s^0(\gamma)(Y \circ \gamma)(s)$.
2. *Si* $\eta \in Le\nu(\gamma)$ *entonces*

$$\nabla_{\gamma'}\eta(\gamma_t) = D_t\eta(t) = P_0^t(\gamma)\frac{d}{dt}P_t^0(\gamma)\eta(t)$$

y en general $D_t^k\eta_t = P_0^t(\gamma)\frac{d^k}{dt^k}P_t^0(\gamma)\eta_t$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $\mu : I \times T_pM \to T_{\gamma_s}M$ la colección de transformaciones lineales $\mu_s(v) = P_0^s(\gamma)v$ para $v \in T_pM$; notemos que $\mu_0 = id_{T_pM}$ y que $\mu_s'(v) = \Gamma_{\gamma_s}(\gamma_s', \mu_s(v))$ por la ecuación de transporte. Sea $f : I \to T_pM$ dada por $f(s) = P_s^0(\gamma)\eta_s$, donde $\eta(s) = Y(\gamma(s))$. Notemos que por propiedad del transporte paralelo

$$\eta(s) = P_0^s(\gamma)f(s) = \mu_s(f(s)).$$

Luego derivando en $s = 0$ tenemos

$$\eta_0' = \mu_0'(f_0) + D_2(\mu_0)_{f_0}f'(0).$$

Ahora bien, $f_0 = \eta_0$ y por otro lado $D_2\mu_0 = id_{T_pM}$ y entonces

$$f'(0) = \eta_0' - \Gamma_{\gamma_0}(\gamma_0', \eta_0) = DY_p(X_p) - \Gamma_p(X_p, Y_p) = \nabla_X Y(p).$$

Esto prueba la primer afirmación. Para probar la segunda tomamos $c(s) = \gamma(s+t)$ y $\mu(s) = \eta(s+t)$ que es un campo a lo largo de c. Notamos que $c(0) = \gamma_t$, y que $c'(0) = \gamma_t'$. Consideramos $g(s) = P_s^0(c)\mu_s$, y por lo recién probado obtenemos

$$\frac{d}{ds}\big|_{s=0}g(s) = \mu_0' - \Gamma_{c_0}(c_0', \mu_0) = \eta_t' - \Gamma_{\gamma_t}(\gamma_t', \eta_t) = D_t\eta(t).$$

Por otro lado es fácil ver de la ecuación de transporte que $P_s^0(c) = P_{s+t}^t(\gamma) = P_0^t(\gamma)P_{s+t}^0(\gamma)$. Luego

$$\begin{aligned} D_t\eta(t) &= \frac{d}{ds}\big|_{s=0}P_0^t(\gamma)P_{s+t}^0(\gamma)\eta(s+t) \\ &= P_0^t(\gamma)\frac{d}{ds}\big|_{s=0}P_{s+t}^0(\gamma)\eta(s+t) \\ &= P_0^t(\gamma)\frac{d}{dt}P_t^0(\gamma)\eta(t). \end{aligned}$$

La última afirmación es inmediata de la segunda, iterando la identidad. □

6.A. Problemas

6.I. Sea M una variedad diferenciable de clase C^k, con $k \geq 2$. Si $F : M \to TM$ es un spray ($jF = F$), probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- F es un spray cuadrático en M.
- Si $\mathcal{V} : TM \to TTM$ es el campo vectorial canónico (Observación 5.3.2), entonces $[\mathcal{V}, F] = F$.

6.II. Sea $J : TTM \to TTM$ el endomorfismo canónico (Observación 5.1.2), sean $X, Y : TM \to TTM$ campos. Probar que

- $\ker(J) = \operatorname{ran}(J) = VTM^*$
- $[\mathcal{V}, J] = -J$
- $J[X, Y] = J[JX, Y] + J[X, JY]$.

6.III. Sea (M, F) una variedad con spray. Probar que el dominio de la exponencial es un abierto en TM que contiene a la sección nula.

6.IV. Probar que dada una distribución $\mathcal{H}$ de subfibrados de TTM que suplementen VTM, esta descomposición induce una conexión afín (y por ende un spray cuadrático) en M.

6.V. Probar que dada una conexión ∇ en M, la torsión T definida en la Observación 6.4.1 es $C^\infty(M)$-lineal. Probar asimismo que la fórmula de $\overline{\nabla}$ dada en (6.1) define una conexión, que esta conexión tiene torsión nula, y que las geodésicas de $\overline{\nabla}$ coinciden con las de ∇.

6.VI. * ¿El transporte paralelo de las dos conexiones del ejercicio anterior, es el mismo? ¿Y la curvatura?

6.VII. Si $\alpha : J \to M$ es una geodésica, probar que el transporte paralelo de $\dot{\alpha}(0)$ a lo largo de α coincide con $\dot{\alpha}(t)$.

Capítulo 7

El tensor de curvatura y sus invariantes

> En el mundo no hay nada excepto espacio vacío curvado. Materia, carga, electromagnetismo y otros campos son simplemente manifestaciones de la curvatura del espacio.
>
> John Wheeler

Establecimos en el capítulo anterior la interdependencia entre spray, conexiones y transporte paralelo, que son nociones de primer orden en la variedad M. El objetivo de este capítulo es presentar la noción central de segundo orden, la curvatura, y estudiar las interrelaciones con las demás nociones, incluyendo el estudio de mapas que preserven las conexiones denominados automorfismos o transformaciones afines. Como veremos, la curvatura y sus derivadas covariantes son objetos definidos a partir de campos y sus derivadas, pero a diferencia de la derivada covariante, la curvatura es un tensor que depende únicamente del valor de los campos en cada punto. Es un objeto de naturaleza local que permite estudiar ecuaciones de movimiento desplazando estos tensores a lo largo de curvas, obteniendo ecuaciones diferenciales que caracterizan a los objetos con los que se relaciona. De central importancia en este capítulo serán los campos de Jacobi a lo largo de geodésicas, así como los automorfismos que preservan la derivada covariante, la curvatura o el transporte paralelo.

7.1. El tensor de curvatura R

Sean $X, Y, Z : M \to TM$ campos dos veces diferenciables. Si ∇ es la derivada covariante inducida por el spray, definimos el *tensor de curvatura*

$$\mathfrak{R}(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

donde $[X, Y] = \mathcal{L}_X Y$ denota la derivada de Lie de Y en la dirección de X. Observemos que la expresión $\mathfrak{R}(X, Y, Z)$ es un campo en M. La *transformación de curvatura* $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ está dada por

$$R(X, Y)Z = \mathfrak{R}(X, Y, Z).$$

Se tienen dos identidades de fácil verificación:

- $R(X, Y) = -R(Y, X)$
- $\mathfrak{R}(X, Y, Z) + \mathfrak{R}(Y, Z, X) + \mathfrak{R}(Z, X, Y) = 0.$

Esta última es conocida como *identidad algebraica de Bianchi*.

Un cálculo en coordenadas que dejamos como ejercicio (Ejercicio 7.1) nos devuelve

$$\mathfrak{R}(X, Y, Z)(p) = \Gamma_p(X_p, \Gamma_p(Y_p, Z_p)) - \Gamma_p(Y_p, \Gamma_p(X_p, Z_p))$$
$$-\Gamma_{*p,X_p}(Y_p, Z_p) + \Gamma_{*p,Y_p}(X_p, Z_p),$$

donde los últimos términos involucran la derivada de la forma Γ respecto del punto base. Esta expresión nos dice que R *sólo depende del valor de los campos en el punto* p. Luego se puede pensar a $\mathfrak{R}$ como una aplicación trilineal en $TM \times TM \times TM$. Es decir, dados $x, y, z \in T_pM$, definimos

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_p(x, y, z) \quad = \quad & R_p(x, y)z = \Gamma_p(x, \Gamma_p(y, z)) - \Gamma_p(y, \Gamma_p(x, z)) \\ & -\Gamma_{*p,x}(y, z) + \Gamma_{*p,y}(x, z), \end{aligned} \tag{7.1}$$

Aunque está dada en coordenadas locales, la definición intrínseca es tomar tres campos X, Y, Z en M tales que $X_p = x$, $Y_p = y$, $Z_p = z$ y entonces $\mathfrak{R}_p(x, y, z) = \mathfrak{R}(X, Y, Z)(p) \in T_pM$. También podemos pensar, para $x, y \in T_pM$, en el operador lineal $R_p(x, y) \in \mathcal{B}(T_pM)$. Por estas consideraciones abandonaremos la distinción entre $\mathfrak{R}$ y R y denotaremos indistintamente

$$R(X, Y)Z(p) = R(X, Y, Z)(p) = R_p(X_p, Y_p, Z_p) = R_p(X_p, Y_p)Z_p.$$

Definición 7.1.1 (Tensores y su derivada covariante)**.** Dado el fibrado vectorial $\pi : TM \to M$ sobre M, tenemos su trivialización local $T\mathcal{U} \simeq \mathcal{U} \times E$ dada por una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ de M y la carta del fibrado $(T\mathcal{U}, \varphi_*)$ dada por $\varphi_*(p, v) = (\varphi(p), D\varphi_p V)$. Vamos a considerar los fibrados de operadores multilineales sobre M dados por $B^k(M) = B(TM^k; TM)$, que se trivializan localmente como

$$TB^k(\mathcal{U}) = T\mathcal{U} \times B(E^k; E)$$

donde $B(E^k; E)$ denota los operadores k-multilineales de E en E.

Una sección Ω del fibrado $p : B^k(M) \to M$ se denomina TENSOR de orden k. En presencia de una derivada covariante ∇ en M, podemos extender la misma a los tensores de forma multilineal, de la siguiente manera. Si $V, X_1, \cdots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, tenemos la fórmula local

$$\begin{aligned}(\nabla_V \Omega)(X_1, \cdots, X_k) = \Omega_{*V}(X_1, \cdots, X_k) - \Gamma(V, \Omega(X_1, \cdots, X_k)) \\ + \sum_{i=1}^{k} \Omega(X_1, \cdots, \Gamma(V, X_i), \cdots, X_k).\end{aligned}$$

En particular observamos que $\nabla_V \Omega(X_1, \cdots, X_k)(p)$ sólo depende de los valores de X_i, V en el punto p. Notemos que por la regla de Leibnitz para la diferencial usual

$$(\Omega(X_1, \cdots, X_k))_* V = \Omega_{*V}(X_1, \cdots, X_k) + \sum_{i=1}^{k} \Omega(X_1, \cdots, DX_i(V), \cdots, X_k).$$

Luego la derivada covariante $\nabla_V \Omega$ admite la expresión intrínseca

$$(\nabla_V \Omega)(X_1, \cdots, X_k) = \nabla_V(\Omega(X_1, \cdots, X_k)) - \sum_{i=1}^{k} \Omega(X_1, \cdots, \nabla_V X_i, \cdots, X_k),$$

y esto muestra la buena definición del tensor multilineal $\nabla_V \Omega$.

Observación 7.1.2 (La curvatura como tensor y su derivada covariante). Por lo observado en párrafos anteriores, la curvatura R es un tensor sobre M de orden 3. Luego

$$(\nabla_V R)(X, Y, Z) = \nabla_V R(X, Y, Z) - R(\nabla_V X, Y, Z) - R(X, \nabla_V Y, Z) - R(X, Y, \nabla_V Z).$$

7.1.1. Subvariedades de un espacio de Banach

Hay que tener algún cuidado porque en principio Γ sólo está definida en $T_pM \times T_pM$, pero en la expresión en coordenadas al distribuir quedaron expresiones del tipo $\Gamma(v, z)$ con $v \in T_pM$ pero $z \notin T_pM$. Para el caso de subvariedades, la Observación 6.6.2 salva esta ambigüedad: hay que usar la extensión para que el cálculo tenga sentido.

Observación 7.1.3. En este caso de subvariedades con la conexión inducida por los proyectores, los términos que involucran la derivada de Γ respecto del punto base se cancelan, es decir

$$-\Gamma_{*p,x}(y,z) + \Gamma_{*p,y}(x,y) = 0.$$

En efecto, si E_p ($p \in M \subset F$) es la familia de proyectores con rango T_pM, como $\Gamma_p(y,z) = E_{*p,y}z$, tomando $p = p_t$ tal que $p_0 = p$ y $\dot{p}_0 = x$, se deduce que $\Gamma_{*p,x}(y,z) = D^2E_p(x,y)z$ y con un argumento similar, $\Gamma_{*p,y}(x,z) = D^2E_p(y,x)z$. Asumiendo que todas las aplicaciones son dos veces diferenciables, se tiene la conclusión.

Entonces las fórmulas de la curvatura para subvariedades de un espacio de Banach son:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_p(x,y,z) &= \Gamma_p(x,\Gamma_p(y,z)) - \Gamma_p(y,\Gamma_p(x,z)) \\ &= [E_{*p,x}E_{*p,y} - E_{*p,y}E_{*p,x}]\,z. \end{aligned} \tag{7.2}$$

7.2. Campos de Jacobi

Dada $\alpha \subset M$ una geodésica, diremos que $\eta \in Lev(\alpha)$ es una *levantada de Jacobi* o *campo de Jacobi* si verifica la ecuación diferencial

$$D^2_{\dot{\alpha}}\gamma = R(\dot{\alpha},\eta)\dot{\alpha}.$$

En coordenadas locales, $D_t\eta = \dot{\eta} - \Gamma_\alpha(\dot{\alpha},\eta)$, luego derivando respecto de t tenemos

$$\frac{d}{dt}D_t\eta = \ddot{\eta} - \Gamma_{*\alpha,\dot{\alpha}}(\dot{\alpha},\eta) - \Gamma_\alpha(\ddot{\alpha},\eta) - \Gamma_\alpha(\dot{\alpha},\dot{\eta}).$$

Entonces de $D_t(D_t\eta) = (D_t\eta)^{\cdot} - \Gamma(\dot{\alpha}, D_t\eta)$ obtenemos (omitiendo el punto de evaluación de Γ, que es α)

$$D^2_t\eta = \ddot{\eta} - \Gamma_{*\alpha,\dot{\gamma}}(\dot{\alpha},\eta) - \Gamma(\ddot{\alpha},\eta) - 2\Gamma(\dot{\alpha},\dot{\eta}) + \Gamma(\dot{\alpha},\Gamma_\alpha(\dot{\alpha},\eta).$$

Por otro lado de la expresión de la curvatura en coordenadas locales (7.1) tenemos

$$R(\dot{\alpha},\eta)\dot{\alpha} = \Gamma(\dot{\alpha},\Gamma(\eta,\dot{\alpha})) - \Gamma(\eta,\Gamma(\dot{\alpha},\dot{\alpha})) - \Gamma_{*\alpha,\dot{\alpha}}(\eta,\dot{\alpha}) + \Gamma_{*\alpha,\eta}(\dot{\alpha},\dot{\alpha}).$$

Entonces, recordando que $\ddot{\alpha} = \Gamma(\dot{\alpha},\dot{\alpha})$ puesto que α es una geodésica, la ecuación de Jacobi en coordenadas locales es

$$\ddot{\eta} = \Gamma_{*\alpha,\eta}(\dot{\alpha},\dot{\alpha}) + 2\Gamma_\alpha(\dot{\alpha},\dot{\eta}). \tag{7.3}$$

Esta es una ecuación de segundo orden lineal, luego para cada $V = (p,v), W = (p,w)$ con $v,w \in T_pM$ existe una única levantada de Jacobi $\gamma = \gamma_{V,W}$ tal que

$$\gamma_{v,w}(0) = V, \qquad D_{\alpha'}\gamma_{v,w}(0) = W.$$

Observación 7.2.1. En el caso particular en el que $v = 0$, denotaremos $\eta_w = \eta_{0,w}$. Entonces las condiciones iniciales se reescriben así

$$\eta_w(0) = 0, \qquad \dot{\eta}_w(0) = w.$$

Mayormente usaremos estos campos de Jacobi con $v = 0$. Si además $w = \dot{\alpha}(0)$, entonces es fácil ver usando (7.3) que $\eta_w(t) = t\dot{\alpha}(t)$.

Dada $\alpha : [a, b] \to M$ una curva dos veces derivable, una *variación de* α es una función $\nu : J \times [a, b] \to M$ dos veces diferenciable con $0 \in J \subset \mathbb{R}$, de manera que $\nu(0, t) = \alpha(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Es usual denotar $\alpha_s(t) = \nu(s, t)$ para pensar en la familia de curvas $\{\alpha_s\}_{s\in J}$ definidas en $[a, b]$ con $\alpha_0 = \alpha$. Si α_s son geodésicas para todo $s \in J$, diremos que ν *es una variación por geodésicas*. Si $\alpha_s(a) = \alpha(a)$ y $\alpha_s(b) = \alpha(b)$ para todo $s \in J$, diremos que ν es una *variación de extremos fijos*. La relevancia de los campos de Jacobi es evidente a partir del próximo teorema, que establece que todo campo de Jacobi se obtiene derivando una variación por geodésicas y viceversa.

Teorema 7.2.2. *Sea* $\alpha : [a, b] \to M$ *una geodésica.*

1. *Si* $\nu : J \times [a, b] \to M$ *es una variación por geodésicas de* α *en* M*, entonces* $\eta : [a, b] \to TM$ *dada por*

$$\eta(t) = \frac{d}{ds}\nu(0, t) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \alpha_s(t)$$

   es un campo de Jacobi a lo largo de α*.*

2. *Si* α *está parametrizada por longitud de arco y* η *es un campo de Jacobi a lo largo de* α*, entonces existe* $\epsilon > 0$ *y una variación de* α *por geodésicas* $\nu : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \to M$ *tal que*

$$\eta(t) = \frac{d}{ds}\nu(0, t).$$

Demostración. Supongamos que $\nu = \nu(s, t)$ es una variación de geodésicas, y como siempre denotemos con $'$ a la derivación d/ds, y con $\dot{}$ a la derivación d/dt. Pongamos $\eta = \nu'$. Luego $\dot{\eta} = \dot{\nu}'$, con lo cual

$$D_{\dot{\nu}}\eta = \dot{\nu}' - \Gamma(\dot{\nu}, \nu'),$$

y entonces evaluando en $s = 0$, tenemos $D_{\dot{\alpha}}\eta = \dot{\eta} - \Gamma(\dot{\alpha}, \eta)$. Por otro lado

$$\ddot{\eta} = \ddot{\nu}' = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Gamma_\nu(\dot{\nu}, \dot{\nu}) = \Gamma_{*\alpha,\eta}(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) + 2\Gamma_\alpha(\dot{\eta}, \dot{\alpha}),$$

pues para cada s fijo, $t \mapsto \nu(s,t)$ es una geodésica. Entonces de acuerdo a la ecuación (7.3), hemos probado que η es un campo de Jacobi a lo largo de α.

Recíprocamente, si η es un campo de Jacobi a lo largo de la geodésica α, ponemos $p = \alpha(0)$, $v = \dot\alpha(0)$, $w = D_{\alpha'}\eta(0)$. Sea $\beta = \beta(s)$ la única geodésica del spray con $\beta(0) = p$, $\beta'(0) = \eta(0)$. Tomamos

$$\xi(s) = P_0^s(\beta)(v + sw).$$

Luego $\xi(0) = v$ y $w = D_{\beta'}\xi = \xi' - \Gamma_\beta(\beta', \xi)$. Como $\xi(s) \in T_{\beta(s)}M$, entonces

$$\alpha_s(t) = \nu(s,t) = \exp_{\beta(s)}(t\xi(s))$$

es una variación de geodésicas, y además $\alpha_0(t) = \exp_p(tv) = \alpha(t)$, luego α_s es una variación de α. Por el ítem previo,

$$\mu(t) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \alpha_s(t)$$

es un campo de Jacobi a lo largo de α. Resta ver que coincide con η, y por unicidad alcanza ver que verifica las mismas condiciones iniciales. Claramente $\mu(0) = \beta'(0) = \eta(0)$. Por otra parte como

$$\dot\alpha_s(0) = (\exp_{\beta(s)})_{*0}(\xi(s)) = \xi(s),$$

entonces

$$D_{\alpha'}\mu(0) = \dot\mu(0) - \Gamma_p(\eta(0), v) = \xi'(0) - \Gamma_p(\eta(0), v) = w = D_{\alpha'}\eta(0). \quad \square$$

7.2.1. Campos de Jacobi versus exponencial

La relación entre campos de Jacobi y la exponencial se hace explícita en el siguiente teorema:

Teorema 7.2.3. *Sean $p \in M$, $w \in T_pM$ y $\alpha(t) = \exp_p(tv)$. Sea η_w el único campo de Jacobi a lo largo de α tal que $\eta(0) = 0$, $\dot\eta(0) = D_{\alpha'}\eta(0) = w$. Entonces para todo $t > 0$ en el dominio de α, se tiene*

$$1/t\ \eta(t) = (\exp_p)_{*tv} w.$$

En particular, $w \in \ker(\exp_p)_{*tv}$ si y sólo si $\eta(t) = 0$.

Demostración. Para s suficientemente pequeño, el mapa exponencial está definido en un entorno uniformemente normal de p (Sección 6.2.1), y podemos considerar la variación de α por geodésicas dada por

$$\nu(s,t) = \exp_p(t(v + sw)).$$

Sea $\mu = \alpha_0'$ el campo de Jacobi inducido; afirmamos que $\mu = \eta$. Nuevamente por unicidad sólo hay que chequear las condiciones iniciales: se tiene

$$\mu(t) = (\exp_p)_{*tv}(tw),$$

fórmula que prueba todas las afirmaciones pues $\mu(0) = 0$ y además

$$\dot{\mu}(0) = \lim_{t\to 0^+} \mu(t)/t = w.$$

□

§ Eligiendo $v = w$ en el teorema anterior, es claro que $\eta_t = t\dot{\gamma}_t$ es el campo de Jacobi a lo largo de la geodésica γ, con $\eta_0 = 0$, $D_t\eta(0) = \dot{\eta}_0 = v = \gamma_0'$.

7.3. Automorfismos de la geometría y campos de Killing

En esta sección presentamos la noción de campo de Killing junto con una serie de equivalencias útiles para reconocerlos. Los campos de Killing son versiones globales de los campos de Jacobi, y en general existen en variedades riemannianas que presentan muchas simetrías (es decir, muchas isometrías para la métrica) como los espacios homogéneos. Nuestra presentación de automorfismos (llamados también transformaciones afines de (M, ∇) donde ∇ es la derivada covariante que proviene de un spray dado en M) es ligeramente distinta de la clásica, ya que estudiaremos primero los automorfimos que preservan la conexión (y puede haber distintas métricas con la misma conexión), y luego presentamos en el capítulo de métricas riemannianas los automorfismos métricos, que son un subconjunto de los primeros.

Observación 7.3.1. Recordemos que para una función suave e inyectiva $f : U \to V$ con $U, V \subset M$, dado un campo $X \in \mathfrak{X}(U)$ podemos definir un campo $f_*X \in (V)$ como $f_*X(f(p)) = Df_p(X_p)$, y que este tiene la propiedad funtorial con el corchete de Lie $[f_*X, f_*Y] = f_*[X, Y]$ (Lema 2.6.4).

Definición 7.3.2 (Automorfismos de la derivada covariante)**.** Sea (M, F) variedad diferenciable con spray, ∇ la derivada covariante del spray. Sea $\rho : U \to V$ con $U, V \subset M$ abiertos y ρ difeomorfismo. Diremos que ρ es un *automorfismo de la conexión* si para cualquier par de campos X, Y en M se verifica

$$\nabla_{\rho_*X}\rho_*Y = \rho_*(\nabla_X Y)$$

en el abierto $V = \rho(U)$. Denotamos a los automorfismos de la conexión con $\mathrm{Aut}(M, \nabla)$.

Esta definición se puede extender a mapas entre variedades con spray, conocidas como transformaciones afines:

Definición 7.3.3 (Transformaciones afines)**.** Sean $M, \overline{M}$ variedades con spray, sean $\nabla, \overline{\nabla}$ las respectivas conexiones. Si $\rho : M \to \overline{M}$ es difeomorfismo local, diremos que ρ es una *transformación afín* de las conexiones si para cada $U \subset M$ donde $\rho|_U : U \to \rho(U)$ es difeomorfismo, y todo par de campos $X, Y \in (U)$, se verifica

$$\overline{\nabla}_{\rho_* X}\rho_* Y = \rho_*(\nabla_X Y).$$

Observación 7.3.4 (Invariancia del transporte paralelo por automorfismos). Si $f \in Aut(M, \nabla)$, entonces transforma geodésicas de M en geodésicas de M. Además, si $\gamma \subset M$, $p = \gamma(a)$, y $\mu(t) = P(\gamma)_a^t \nu$ es el transporte paralelo de $\nu \in T_p D$ a lo largo de γ, entonces

$$\eta = Df_\gamma \mu$$

es el transporte paralelo de $Df_p \nu$ a lo largo de $f \circ \gamma$. Estas observaciones surgen de

$$\nabla_{(f\circ\gamma)'}\eta = \nabla_{f_*\gamma'} f_*\mu = f_*(\nabla_{\gamma'}\mu) = f_* 0 = 0.$$

Observación 7.3.5 (Invariancia de la curvatura por automorfismos). Como

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

por la Observación 7.3.1 y la definición de automorfismo, es claro que si $f \in Aut(M, \nabla)$ entonces

$$f_* R(X, Y)Z = R(f_* X, f_* Y) f_* Z.$$

De hecho, esta misma afirmación es válida para cualquier tensor en M, y también para su derivada covariante (Definición 7.1.1): si Ω es tensor k-lineal en M y $V \in \mathfrak{X}(M)$, entonces examinando la expresión en coordenadas locales de la derivada covariante del tensor se tiene

$$f_* \nabla_V \Omega(X_1, \cdot, X_k) = \nabla_{f_* V} \Omega(f_* X_1, \cdots, f_* X_k).$$

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo (todos los campos son dos veces diferenciables como es habitual en este texto). Recordemos (Sección 2.5) que el flujo de X, denotado $\rho(t, p) = \rho_t(p)$ verifica $\rho_t'(p) = X(\rho_t(p))$ para todo (t, p) en el dominio de definición del flujo (que es un entorno abierto de $\{0\} \times M$ en $\mathbb{R} \times M$), y además $\rho_0(p) = p$, $\rho_0'(p) = X(p)$. También recordemos que el flujo es un grupo a un parámetro,

$$\rho_{t+s}(p) = \rho_t(\rho_s(p)) = \rho_s(\rho_t(p))$$

donde estén definidos.

Definición 7.3.6 (Pull-back de campos)**.** Sean U, V abiertos en M, sea $f : U \to V$ difeomorfismo de clase C^1, sea X campo en U, definimos

$$f^*X(p) = Df_p^{-1}X(f(p)),$$

que es un nuevo campo en V denotado f^*X.

De la definición es inmediato que $g^*f^* = (fg)^*$. Un ejercicio de manipulación de los objetos nos permite reescribir la condición de ser automorfismo de la conexión en términos del pull-back, que resulta más conveniente para otras consideraciones que seguirán:

Teorema 7.3.7. *Sea $f : U \to V$ difeomorfismo de clase C^2, entonces $(f^{-1})^*Y = f_*Y$ en V para todo campo Y en U. Luego*

$$\nabla_{f_*Y}(f_*Z) = \nabla_{(f^{-1})^*Y}(f^{-1})^*Z$$

en V para todo par de campos en U. En particular f es automorfismo de la conexión ∇ de la variedad riemanniana (M, ∇) si y sólo si f es difeomorfismo local y para todo par de campos Y, Z en U se tiene

$$\nabla_{f^*Y}(f^*Z) = f^*(\nabla_Y Z).$$

Demostración. Notemos primero que de la definición $f_*Z(f(p)) = Df_p(Z_p)$ podemos reescribir $f_*Z(q) = Df_{f^{-1}(q)}(Z_{f^{-1}(q)})$ si $q = f(p) \in \mathrm{im}(f)$. Por otro lado

$$(f^{-1})^*Z(q) = Df_{f^{-1}(q)}Z \circ f^{-1}(q) = Df_{f^{-1}(q)}Z_{f^{-1}(q)},$$

lo que muestra que vale la primera afirmación. El resto de las afirmaciones es consecuencia inmediata de esta. □

Así como el transporte paralelo permite calcular la derivada covariante de un campo (Lema 6.7.6), para calcular la derivada de Lie podemos usar el pull-back:

Lema 7.3.8 (El pull-back vs. el corchete de Lie)**.** *Si X, Y son campos en M, y φ_t es el flujo de X, entonces para todo t en el dominio del flujo*

1. $[X, Y] = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\rho_t^*Y$
2. $\frac{d}{dt}\rho_t^*Y = \rho_t^*[X, Y]$
3. $\rho_t^*X = X$
4. $\rho_t^*[X, Y] = [X, \rho_t^*Y]$

Demostración. Pasando a coordenadas locales, operaremos en el espacio de Banach E que modela M. Como $\rho_{-t} = \rho_t^{-1}$, entonces $D(\rho_t^{-1})_{\rho_t(p)} = (D_p\rho_t)^{-1}$. Luego

$$\rho_t^* Y(p) = (D_p\rho_t)^{-1} Y_{\rho_t(p)} = A_t(p)\nu_t(p),$$

donde $A_t(p) = (D_p\rho_t)^{-1}$ es un operador lineal inversible de E en E, mientras que $\nu_t(p) = Y_{\rho_t(p)}$ es un vector de E. Recordemos que la inversión es suave y que si T_t es una curva de operadores inversibles, entonces $(T_t^{-1})' = -T_t^{-1}T_t'T_t^{-1}$. Notemos que $A_0 = \mathrm{Id}_E$ ya que $\rho_0 = \mathrm{id}_M$ y que $\nu_0 = Y$. Entonces

$$A_0' = \frac{d}{dt}|_{t=0}(D_p\rho_t)^{-1} = -A_0\frac{d}{dt}|_{t=0}(D_p\rho_t)A_0 = -\frac{d}{dt}|_{t=0}D_p\rho_t.$$

Por otro lado, como ρ_t es el flujo de X, tenemos que $\rho_t'(p) = X(\rho_t(p))$, luego

$$\frac{d}{dt}D_p\rho_t = D_p\frac{d}{dt}\rho_t = D_p(X\rho_t(p)) = DX_{\rho_t(p)}D_p\rho_t$$

y evaluendo en $t = 0$ vemos que $A_0' = -\frac{d}{dt}|_{t=0}D_p\rho_t = -DX_p$, puesto que $\rho_0 = \mathrm{id}_M$. Ahora bien,

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}A_t(p)\nu_t(p) = A_0'(p)\nu_0(p) + A_0(p)\nu_0'(p) = -DX_pY_p + DY_pX_p = [X,Y](p),$$

puesto que ρ_t es el flujo de X, y esto prueba la primera identidad enunciada. Para probar la segunda identidad, usamos la propidedad del flujo $\rho_{t+s} = \rho_t \circ \rho_s$ para reescribir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_t^*Y &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\rho_{t+s}^*Y = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}D\rho_{-t}D\rho_{-s}Y\circ\rho_s\circ\rho_t \\ &= \rho_t^*\left\{\frac{d}{ds}|_{s=0}D\rho_{-s}Y\circ\rho_s\right\} = \rho_t^*\frac{d}{ds}|_{s=0} \quad \rho_s^*Y = \rho_t^*[X,Y]\end{aligned}$$

donde en la ultima igualdad usamos lo probado anteriormente. La tercer identidad se deduce tomando $X = Y$ de manera que la derivada en el segundo item es nula. Esto prueba que ρ_t^*X debe ser constante y como $\rho_0 = \mathrm{id}$ tenemos la conclusión. Por último,

$$\begin{aligned}\rho_t^*[X,Y](p) &= D\rho_{-t}\frac{d}{ds}|_{s=0}\rho_s^*Y(\rho_t(p)) = \frac{d}{ds}|_{s=0}D\rho_{-s}D\rho_{-t}Y\circ\rho_t\circ\rho_s(p) \\ &= \frac{d}{ds}|_{s=0}D\rho_{-s}\rho_t^*Y(\rho_s(p)) = [X,\rho_t^*Y](p)\end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos lo probado en la primer identidad, pero ahora aplicado al campo ρ_t^*Y. □

Recordemos que si ∇ denota la derivada covariante del spray F en la variedad M, denotamos con Γ el operador bilineal de la conexión, $\nabla_X Y = Y'X - \Gamma(X,Y)$. Para una función $\rho : M \to M$, con $D_p\rho$ denotamos la diferencial de ρ en $p \in M$ y con $D_p^2\rho$ denotaremos el Hessiano de dicha función $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ (su diferencial segunda); ambas expresiones dadas en coordenadas locales.

Teorema 7.3.9 (Campos de Killing). *Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, sea ρ_t el flujo de X. Son equivalentes:*

1. *ρ_t es automorfismo de la conexión para todo t*
2. *Para para todo t y todo $p \in M$, $v \in T_pM$,*
$$F_{\rho_t(p)}(D_p\rho_t v) = D_p^2\rho_t(v,v) + D_p\rho_t(F_p(v)). \tag{7.4}$$
3. *Para toda geodésica $\gamma \subset M$, el campo X es Jacobi a lo largo de γ.*
4. *Para todo par de campos Y, Z se tiene*
$$[X, \nabla_Y Z] = \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y[X,Z]. \tag{7.5}$$

Un campo X que verifica estas condiciones es un campo de Killing en (M,g), y denotamos $\mathrm{Kill}(M,\nabla)$ al conjunto de todos los campos de Killing.

Demostración. Supongamos que ρ_t es automorfismo de la conexión para todo t, tomemos la geodésica γ que pasa por p con velocidad inical v y consideremos $v_t(s) = \rho_t(\gamma(s))$. Denotemos $\frac{d}{ds} = '$, luego $v' = (\rho_t)_*\gamma'$. Entonces si calculamos, con t fijo, la derivada covariante a lo largo de v_t, tenemos

$$D_{v'}v' = \nabla_{(\rho_t)_*\gamma'}(\rho_t)_*\gamma' = (\rho_t)_*D_{\gamma'}\gamma' = (\rho_t)_*(0) = 0$$

puesto que γ es una geodésica y ρ_t es un automorfismo de la conexión. Entonces v_t es una geodésica para cada t fijo, y la identidad del segundo ítem se obtiene escribiendo explícitamente la ecuación de Euler de las derivadas $v_t'' = F_{v_t}(v_t')$ y evaluando luego en $s = 0$. Si vale la segunda identidad, y γ es una geodésica, tomamos de nuevo la variación $v_t = \rho_t \circ \gamma$ y observamos que para cada s fijo,

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}v_t(s) = \frac{d\rho}{dt}|_{t=0}(\gamma(s)) = X(\gamma(s))$$

ya que ρ_t es el flujo de X. Poniendo $p = \gamma(s)$, $v = \gamma'(s)$ en la identidad arribamos a la ecuación de Euler $v_t''(s) = F_{v_t(s)}(v_t'(s))$. Esto prueba que v_t es una goedésica para todo t, y entonces X es un campo de Jacobi a lo largo de γ por el Teorema 7.2.2,

lo que prueba que vale la tercer afirmación. Supongamos ahora que X es campo de Jacobi a lo largo de cualquier geodésica γ. Entonces

$$D^2_{\gamma'}(X\circ\gamma) = R(X\circ\gamma,\gamma')\gamma',$$

que en términos de Γ se escribe

$$(X\circ\gamma)'' = \Gamma_{*\gamma,X\circ\gamma}(\gamma',\gamma') + 2\Gamma((X\circ\gamma)',\gamma')$$

por la ecuación (7.3). Como $(X\circ\Gamma)' = DX_\gamma(\gamma')$, derivando nuevamente tenemos $(X\circ\gamma)'' = D^2_\gamma X(\gamma',\gamma') + DX_\gamma(\gamma'')$. Dado un campo Y tomamos γ geodésica que pasa por p y tal que $\gamma'(0) = Y_p$, entonces notando que como γ es geodésica se tiene $\gamma'' = F_\gamma(\gamma')$, la ecuación de Jacobi se escribo (omitiendo el punto genérico p de evaluación)

$$D^2X(Y,Y) + DX(F(Y)) = \Gamma_{*X}(Y,Y) + 2\Gamma(DX(Y),Y).$$

Estamos suponiendo que todas las funciones son de clase C^2 luego D^2X es un operador bilineal simétrico; cambiando Y por $Y+Z$ polarizamos esta identidad para obtener

$$D^2X(Y,Z) + DX(\Gamma(Y,Z)) = \Gamma_{*X}(Y,Z) + \Gamma(DX(Y),Z) + \Gamma(DX(Z),Y). \tag{7.6}$$

Por otro lado calculamos

$$\begin{aligned}[X,\nabla_Y Z] &= D(\nabla_Y Z)(X) - DX(\nabla_Y Z) = D^2Z(X,Y) + DZ(DY(X)) + \Gamma_{*X}(Y,Z)\\ &\quad - \Gamma(DY(X),Z) + \Gamma(Y,DZ(X)) - DX(DZ(Y)) + DX(\Gamma(Y,Z))\\ &= D^2Z(X,Y) + DZ(DY(X)) + \Gamma(DY(X),Z) + \Gamma(Y,DZ(X))\\ &\quad + X(DZ(Y)) - \Gamma(DX(Y),Z) - \Gamma(DX(Z),Y) + D^2X(Y,Z)\end{aligned}$$

donde en la última igualdad utilizamos la identidad (7.6) que proviene de la hipótesis de que X es Jacobi a lo largo de cualquier geodésica. Ahora calculamos

$$\begin{aligned}\nabla_Y[X,Z] &= D^2Z(X,Y) - D^2X(Y,Z) + DZ(DX(Y)) - DX(DZ(Y))\\ &\quad - \Gamma(Y,DZ(X)) + \Gamma(Y,DX(Z))\end{aligned}$$

y también

$$\nabla_{[X,Y]}Z = DZ(DY(X)) - DZ(DX(Y)) + \Gamma(Z,DX(Y)) - \Gamma(Z,DY(X)).$$

Sumando estas dos últimas obtenemos $[X,\nabla_Y Z]$ y esto prueba la igualdad de la cuarta afirmación del teorema. Ahora supongamos que vale esta última igualdad, fijamos $p\in M$ y sea

$$\beta(t) = D\rho_t\nabla_{\rho_t^*\gamma}\rho_t^*Z(\rho_{-t}(p)) = \rho_{-t}^*W_t(p)\in T_pM.$$

donde $W_t = \nabla_{\rho_t^* Y}\rho_t^* Z$. Notamos que $W_{t+s}(p) = W_t(p) + sW_t'(p) + o(s^2)$ (Observación 1.5.2), y entonces

$$\begin{aligned}\beta'(t) &= \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\rho_{-t-s}^* W_{t+s}(p) = \rho_{-t}^* \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\rho_{-s}^* W_{t+s}(p)\\ &= \rho_{-t}^* \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\{\rho_{-s}^* W_t + s\rho_{-s}^* W_t' + o(s^2)\}(p)\\ &= \rho_{-t}^*\{-[X, W_t] + \rho_0^* W_t' + 0\}(p) = \rho_{-t}^*\{-[X, W_t] + W_t'\}(p),\end{aligned}$$

por la primera identidad del Lema 7.3.8. Para derivar W_t notamos que como $\nabla_Y Z$ es un operador $\mathbb{R}$-bilineal en Y, Z, tenemos

$$W_t' = \nabla_{(\rho_t^* Y)'}\rho_t^* Z + \nabla_{\rho_t^* Y}(\rho_t^* Z)' = \nabla_{[X,\rho_t^* Y]}\rho_t^* Z + \nabla_{\rho_t^* Y}[X, \rho_t^* Z],$$

nuevamente por el Lema 7.3.8. Como estamos asumiendo la propiedad de derivación (4) del enunciado, tenemos

$$W_t' = [X, W_t]$$

y con esto $\beta'(t) = 0$ lo que nos dice que debe ser constante e igual a $\beta(0)$, es decir $\rho_{-t}^* W_t(p) = W_0(p) = \nabla_Y Z(p)$. Como esto es cierto para todo $p \in M$, tenemos $\rho_{-t} W_t = \nabla_Y Z$ como campos y entonces

$$\nabla_{\rho_t^* Y}(\rho_t^* Z) = \rho_t^*(\nabla_Y Z).$$

Esto nos dice que ρ_t es un automorfismo de ∇ para todo t. □

Observación 7.3.10 (Automorfismos del spray F). Si $F : TM \to TTM$ denota al spray recordemos para una función suave $\rho : M \to M$ denotamos $\rho_* : TM \to TM$ a la diferencial global $\rho_*(p, v) = (\rho(p), D\rho_p(v))$. Luego podemos definir $\rho_{**} = (\rho_*)_* : TTM \to TTM$ a su diferencial global, que estará dada por $\rho_{**}(p, v; \dot{p}, \dot{v}) = (\rho_*(p, v), D(\rho_*)_{(p,v)}(\dot{p}, \dot{v}))$. Para calcular esta última expresión tomamos una curva $(p_t, v_t) \subset TM$ y encontramos que

$$\begin{aligned}D(\rho_*)_{(p,v)}(\dot{d}, \dot{v}) &= \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\rho_*(p_t, v_t) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(\rho(p_t), D\rho_{p_t} v_t)\\ &= (D\rho_p v, D_p^2\rho(\dot{p}, v) + D\rho_p(\dot{v})).\end{aligned}$$

En particular

$$\rho_{**}(p, v, v, F_p(v)) = (\rho(p), D\rho_p v, D\rho_p v, D_p\rho^2(v, v) + D\rho_p(F_p(v)).$$

Esto nos dice que la segunda condición del teorema de campos de Xilling puede reescribirse como

$$F((\rho_t)_* V) = (\rho_t)_{**} F(V)$$

para todo t y todo $V \in TM$. Por este motivo podemos decir también que un campo X es de Killing para el spray *si su flujo es un automorfismo del spray* F, en el sentido recién enunciado. Notemos que la prueba del teorema anterior nos dice que

$$\mathrm{Aut}(M, F) = \mathrm{Aut}(M, \nabla)$$

si ∇ es la derivada covariante del spray F (o viceversa). Notemos que polarizando la identidad (7.4), si $\rho \in \mathrm{Aut}(M, F)$ obtenemos

$$\Gamma_{\rho(p)}(D\rho_p v, D\rho_p w) = D^2\rho_p(v, w) + D\rho_p \Gamma_p(v, w) \tag{7.7}$$

para todo $v, w \in T_pM$.

El siguiente lema de Neeb [72] extiende los resultados de Lang [59, Ch. XIII]:

Lema 7.3.11 (Los automorfismos están determinados a orden 1)**.** *Sea* (M, F) *conexa y* $f, g : M \to M$ *dos automorfismos del spray* F*. Si existe* $p \in M$ *tal que* $f(p) = g(p)$*,* $Df_p = Dg_p$*, entonces* $f = g$ *en* M*.*

Demostración. De $f_{**}F(V) = F(f_*V)$ para todo $V \in TM$ es claro que f preserva geodésicas y su dominio, luego f_* preserva el dominio de la exponencial $\exp : D \subset TM \to M$ de la conexion. Además como $\beta(t) = f(\exp_x(tv))$ es una geodésica con $\beta(0) = f(x)$ y $\beta'(0) = Df_x v$, es claro que $f \circ \exp = \exp \circ f_*$ en el dominio de la exponencial. Esto dice que si $U \in T_xM$ es un abierto tal que $\exp_x|_U$ es un difeomorfismo con su imagen $V = \exp_x(U)$, entonces si $y = \exp_x(v)$ podemos escribir $f(y) = \exp_{f(x)}(Df_x v)$, lo que prueba que los valores de f en un entorno de x están únivocamente determinados por $f(x), Df_x$. Las mismas consideraciones aplican para g, luego si $f(x) = g(x)$ y $Df_x = Dg_x$ entonces f y g coinciden en algún entorno de x. Ahora sea $N \subset M$ el conjunto de puntos x tales que f y g coinciden en un entorno de x, diferenciando obtenemos también $Df_x = Dg_x$. Luego $N = \{x \in M : f(x) = g(x), Df_x = Dg_x\}$, y esto muestra que N es cerrado. Como $p \in N$ por hipótesis y M es conexa, debe ser $N = M$ o sea $f = g$. □

Lema 7.3.12 (Los campos de Killing están determinados a orden 1)**.** *Sea* (M, F) *conexa sean* X, Y *campos de Killing en* M*. Si existe* $p \in M$ *tal que* $X(p) = Y(p)$*,* $DX_p = DY_p$*, entonces* $X = Y$*.*

Demostración. Si X es Killing su flujo ρ_t es un automorfismo para todo t, en particular si $z = \exp_q(v)$ está en un entorno normal de $q \in M$ entonces $\rho_t(z) = \rho_t(\exp_q(v)) = \exp_{\rho_t(q)}((D\rho_t)_q v)$. Escribimos $\exp(q, w) = \exp_q(w)$, derivando respecto de t en $t = 0$ obtenemos

$$X(z) = \partial_1 \exp_{(q,v)} X(q) + \partial_2 \exp_{(q,v)} DX_q v$$

Si τ_t es el flujo de Y obtenemos de manera similar

$$Y(z) = \partial_1 \exp_{(q,v)} Y(q) + \partial_2 \exp_{(q,v)} DY_q v.$$

Esto muestra que si X, Y y sus diferenciales coinciden en q entonces X, Y coinciden en un entorno de q. En particular el conjunto $\mathcal{N} \subset M$ de puntos q tales que X, Y coinciden en un entorno q es abierto. Además es claro que si $X_q = Y_q$ y $DX_q = DY_q$ entonces X, Y coinciden en un entorno de q, y si X, Y coinciden en un entorno de q entonces diferenciando también tenemos $DX_q = DY_q$. Resumiendo, podemos afirmar que

$$\mathcal{N} = \{q \in M : X_q = Y_q, \quad DX_q = DY_q\}$$

con lo cual N resulta también cerrado. Como es no vació por hipótesis y M es conexa, debe ser $X = Y$. □

Observación 7.3.13 (Campos de Killing en términos del tensor de curvatura). La condición (4) del teorema anterior puede rescribirse usando el hecho de que la conexión no tiene torsión, con lo cual $\nabla_V W - \nabla_W V = [V, W]$ para todo par de campos V, W en M. Con esto la condición de Killing para X es equivalente a

$$R(X, Y)Z = \nabla_{\nabla_Y Z} X - \nabla_Y \nabla_Z X$$

para todo par de campos Y, Z en M.

Teorema 7.3.14 (Campos de Killing como álgebra de Lie). *Los campos de Killing* $\mathrm{Kill}(M, \nabla)$ *forman una subálgebra de Lie real del conjunto de todos los campos* $\mathfrak{X}(M)$.

Demostración. Supongamos que $X, \overline{X}$ son campos de Killing en M. De la condición (4) del teorema anterior es evidente que cualquier combinación lineal de $X, \overline{X}$ es también un campo de Killing. Para probar que es cerrado por el corchete de Lie, calculamos usando la identidad de Jacobi

$$[[X, \overline{X}], \nabla_Y Z] = [[X, \nabla_Y Z], \overline{X}] + [X, [\overline{X}, \nabla_Y Z]].$$

Ahora usamos la identidad (4) para X y para $\overline{X}$, luego de una nueva aplicación de Jacobi obtenemos

$$\nabla_{[[X,\overline{X}],Y]} Z + \nabla_Y [[X, \overline{X}], Z],$$

de donde concluimos nuevamente por la identidad (4) que $[X, \overline{X}]$ también es de Killing. □

Definición 7.3.15. Dado $p \in M$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$, denotamos $\nabla X(p) \in B(T_pM)$ al endomorfismo $\nabla X(p)v = DX_p(v) - \Gamma_p(X_p, v)$. Consideremos los subespacios

$$\mathfrak{k}_p = \{Y \in \mathrm{Kill}(M) : Y_p = 0\}; \quad \mathfrak{m}_p = \{X \in \mathrm{Kill}(M) : \nabla X(p) = 0\}.$$

Notemos que si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $\nabla X(p)Y_p = DX_p(Y_p) = \Gamma_p(X_p, Y_p)$, luego

$$\mathfrak{m}_p = \{X \in \mathrm{Kill}(M) : \nabla_Y X(p) = 0 \qquad \forall\, Y \in \mathfrak{X}(M)\}.$$

Observación 7.3.16. Si $X \in \mathrm{Kill}(M)$, $X_p = 0$, $\nabla X(p) = 0$, entonces $DX_p(v) = \Gamma_p(X_p, v) = 0$ luego por el Lema 7.3.12 debe ser $X = 0$. Esto prueba que estos subespacios están en suma directa. Por otro lado, podemos considerar la aplicación $I : \mathrm{Kill}(M) \to T_pM \times B(T_pM)$ dada por $I(X) = (X_p, \nabla X(p))$; por lo recién observado, esta aplicación es inyectiva.

En particular si M tiene dimensión finita, tanto T_pM como $B(T_pM)$ tienen dimensión finita y entonces el álgebra de Lie $\mathrm{Kill}(M)$ es también de dimensión finita.

Proposición 7.3.17 (El álgebra de Cartan de los campos de Killing)**.** *Dado $p \in M$, tenemos*

1. $\mathfrak{m}_p \oplus \mathfrak{k}_p \subset \mathrm{Kill}(M)$ *es subálgebra de Lie, y además*
2. $[\mathfrak{k}_p, \mathfrak{k}_p] \subset \mathfrak{k}_p$, $[\mathfrak{m}_p, \mathfrak{m}_p] \subset \mathfrak{k}_p$, $[\mathfrak{k}_p, \mathfrak{m}_p] \subset \mathfrak{m}_p$,
3. *Para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{m}_p$ se tiene*

$$R(X_p, Y_p)Z_p = [Z, [X, Y]](p) = -[[X, Y], Z](p).$$

Demostración. Que están en suma directa lo sabemos por la observación previa, veamos que valen las relaciones del segundo ítem y en particular esta suma será subálgebra de Lie de $\mathrm{Kill}(M)$. Comencemos por $X, Y \in \mathfrak{k}_p$, entonces de

$$[X, Y](p) = DX_p(Y_p) - DY_p(X_p)$$

es inmediato que $[X, Y](p) = 0$ pues $X_p = Y_p = 0$. Ahora tomemos $X, Y \in \mathfrak{m}_p$, entonces

$$[X, Y](p) = DX_p(Y_p) - DY_p(X_p) = \Gamma_p(X_p, Y_p) - \Gamma_p(Y_p, X_p) = 0$$

luego $[X, Y] \in \mathfrak{k}_p$ también. Por último, si $Y \in \mathfrak{m}_p$, $X \in \mathfrak{k}_p$ por la ecuación (7.5), para cualquier campo Z tenemos

$$\begin{aligned} \nabla_Z [X, Y](p) &= [X, \nabla_Z Y](p) - \nabla_{[X,Z]} Y(p) \\ &= (D\nabla_Z Y)_p(X_p) - \Gamma_p(X_p, \nabla_Z Y(p)) - 0 \\ &= 0 - 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

y entonces $[X,Y] \in \mathfrak{m}_p$. Para probar la identidad del tensor R, notemos primero que por la Observación 7.3.13,

$$R(X,Y)Z(p) = \nabla_{\nabla_Y Z} X(p) - \nabla_Y \nabla_Z X(p) = -\nabla_Y \nabla_Z X(p)$$

pues $X \in \mathfrak{m}_p$. Por otro lado, usando que ∇ tiene torsión nula podemos escribir

$$\nabla_Y(\nabla_Z X)(p) = \nabla_{\nabla_Z X} Y(p) - [Y, \nabla_Z X](p) = -[Y, \nabla_Z X](p).$$

Por últimos, usamos la identidad (7.5) para escribir

$$[Y, \nabla_Z X](p) = \nabla_{[Y,X]} Z(p) - [Z,[Y,X]](p) = -[Z,[Y,X]](p).$$

□

7.4. La curvatura y las transformacions afines

Dada una derivada covariante ∇ sin torsión ∇ en M (equivalentemente, un spray cuadrático F en M), vimos que a partir de allí deducimos las nociones de transporte paralelo y de curvatura. Recíprocamente, la derivada covariante permite recuperar la conexión ∇ como muestra el Lema 6.7.6. En esta sección veremos cómo es posible, a partir de información del tensor de curvatura R, recuperar en ciertos casos la conexión ∇ de la que proviene (y por ende el transporte paralelo). Esto será especialmente útil cuando abordemos los espacios simétricos y localmente simétricos en la siguiente sección, donde la curvatura es invariante por el transporte paralelo.

Estos resultados que probaremos aquí se enmarcan en lo que se conoce como *Teorema de Ambrose-Cartan*, y la presentación que damos sigue los lineamientos para espacios de Banach dados por Wilkins en [89]. Cabe mencionar que como en nuestro texto nos enfocamos en las conexiones sin torsión, lo mismo ocurrirá en esta sección, pero que sin embargo estos resultados se extienden a conexiones con torsión como puede verse en el citado trabajo de Wilkins.

Empezaremos discutiendo el objeto local R^* dado en un entorno normal de $p \in M$ por el transporte paralelo del tensor de curvatura.

Definición 7.4.1 (El tensor local R^*)**.** Sea (M,F) variedad con spray, sea $p \in M$ y $U \subset M$ entorno normal simético, $U = \exp_p(B)$ con B bola del tangente T_pM. Dado $q \in U$ existe un único $z \in T_pM$ tal que $q = \exp_p(z)$ y denotamos γ_q a la única geodésica que une p con q, esto es $\gamma_q(t) = \exp_p(tz)$. Observemos que $P_0^t(\gamma_q) : T_pM \to T_{\gamma_t}M$ y en particular P_0^1 es un isomorfismo entre T_pM y T_qM. Consideremos la función $R^* : U \to B(T^pM^2; T_pM)$ dada por

$$R^*_q(x,y,z) = P_1^0(\gamma_q) R_q(P_0^1(\gamma_q)x, P_0^1(\gamma_q)y, P_0^1(\gamma_q)z)$$

donde R_q es el tensor de curvatura de ∇ y $x,y,z \in T_pM$.

Ahora introducimos la notación de dos clases de campos que utilizaremos en esta sección, así como del operador lineal que los relaciona:

Definición 7.4.2. Dado $x \in T_pM$, sea $\eta^x \in \mathfrak{X}(U)$ dado por

$$\eta^x(q) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p(z + sx) = (\exp_p)_{*z}x$$

para $q = \exp_p(z) \in U$. Sea $X : U \times T_pM \to TM$ dada por $X(q, v) = P_0^1(\gamma_q)v$, sea $X^v \in \mathfrak{X}(U)$ dado por $X^v(q) = X(q, v)$, denominamos a estos *campos paralelos*. Consideramos el operador lineal inversible $A_q : T_pM \to T_pM$ dado por $A_q x = P_1^0(\gamma_q)\eta^x(q)$; esto es

$$A_q = P_1^0(\gamma_q) \exp_{*\exp_p^{-1}(q)}.$$

Denotamos $A : U \to B(T_pM)$ a la función suave que parametriza esta familia de operadores lineales, notamos que son inversibles y que $A_p = id_{T_pM}$.

Observación 7.4.3. Algunas observaciones útiles a partir de las definiciones: tenemos $DX^v_q = \partial_1 X_{(q,v)}(-, 0)$ y los campos η^v, X^v se vinculan por A vía

$$\eta^v(q) = X(q, A_q v) = X^{A_q v}(q).$$

Fijado q, si $\gamma = \gamma_q$ entonces $A_{\gamma_t}x = P_t^0(\gamma)\eta^x(\gamma_t)$. Además $[\eta^x, \eta^y] = (\exp_p)_*[x, y] = 0$ pues los campos x, y son constantes en T_pM.

Lema 7.4.4 (R^* caracteriza A). *La función suave $A : U \to GL(T_pM)$ dada por $A_q v = P_1^0(\gamma_q)(\exp_p)_{*z}v$ (donde $\gamma_q(t) = \exp_p(tz)$) está unívocamente determinada por la función $R^* : U \to B(T_pM^3; T_pM)$ vía la ecuación diferencial lineal*

$$(tA_{\gamma_t}v)'' = R^*_{\gamma_t}(z, tA_{\gamma_t}v, z).$$

Demostración. Dado $q \in U$ sea γ_q la geodésica que une p, q con velocidad inicial $z \in T_pM$, y dado $v \in T_pM$ sea $V(t) = t\eta^v(\gamma_t) = \frac{d}{ds}\big|_{s=0} \exp_p(t(z + sv))$, luego V es campo de Jacobi a lo largo de γ. Como $P_t^0(\gamma)V(t) = tA_{\gamma_t}v$, entonces el Lema 6.7.6 nos dice que

$$P_0^t(\gamma)(tA_{\gamma_t}v)'' = D_t^2V(t) = R_{\gamma_t}(\gamma_t', V_t)\gamma_t' = P_0^t(\gamma)R^*_{\gamma_t}(\gamma_0', tA_{\gamma_t}v)\gamma_0',$$

y esto nos da la ecuación diferencial enunciada. Sea $x(t) = tA_{\gamma_t}v$, entonces $x_0 = 0$ y $x_0' = A_pv = v$ luego la solución está unívocamente determinada por la función R^*, y los datos iniciales z, v. En particular evaluando en $t = 1$ obtenemos A_qv unívocamente determinado por R^*, y los vectores v, z. Como $q = \exp_p(z)$, en realidad el único dato inicial es q y por ende A está unívocamente determinado por R^*. □

Veamos ahora cómo R^* caracteriza la derivada covariante de los campos paralelos X^v, $v \in T_pM$ definidos más arriba.

Definición 7.4.5. Dados $v, w \in T_pM$ sean $X^v, X^w \in \mathfrak{X}(U)$, sea $B : U \to B(T_pM^2; T_pM)$ dada por la forma bilineal

$$B_q(v,w) = P_1^0(\gamma_q)\nabla_{X^v}X^w(q),$$

Lema 7.4.6 (R^* caracteriza B)**.** *Dados $v, w \in T_pM$, si $q = \gamma(1) = \exp_p(z)$ entonces*

$$B_q(v,w) = \int_0^1 R^*_\gamma(z, tA_{\gamma_t}A_q^{-1}v, w)dt,$$

en particular la función B está unívocamente determinada por R^*.

Demostración. Sea $G \in \mathfrak{X}(U)$ dado por $G(r) = \eta^u(r) = (\exp_p)_{*u}u$ si $r = \exp_p(u)$, notamos que $G(\gamma_r(t)) = \exp_{*tu}tu = t\gamma_r'(t)$. Por otro lado, dado $v \in T_pM$, tomamos $T \in B(T_pM)$ tal que $v = T\gamma_0'$ $(= Tz)$, y sea $V \in \mathfrak{X}(U)$ dado por $V(r) = \eta^{Tu}(r) = \exp_{*u}Tu$ para $r = \exp_p(u)$; notamos que $V(\gamma_t) = (\exp_p)_{*tz}tTz = t\eta^v(\gamma_t)$. Luego $P_t^0(\gamma)V(\gamma_t) = tA_{\gamma_t}v$. Como G, V están $\exp_p$ relacionados con los campos id y Tid de T_pM respectivamente, y estos conmutan, entonces $[G,V] = 0$ en U. Por otro lado, dado $w \in T_pM$

$$\begin{aligned}\nabla_G X^w(r) &= \nabla_G X^w(\gamma_r(1)) = \nabla_{\gamma_r'}X^w(\gamma_r(1)) = P_0^1(\gamma_r)\frac{d}{dt}\Big|_{t=1}P_t^0(\gamma_r)X^w(\gamma_r(t))\\ &= P_0^1(\gamma_r)\frac{d}{dt}\Big|_{t=1}P_t^0(\gamma_r)P_0^t(\gamma_r)w = P_0^1(\gamma_r)\frac{d}{dt}\Big|_{t=1}w = 0,\end{aligned}$$

es decir $\nabla_G X^w = 0$ en U. De la definición de la curvatura R y las observaciones previas obtenemos

$$R(G,V)X^w(\gamma_t) = \nabla_G\nabla_V X^w(\gamma_t) - \nabla_V\nabla_G X^w(\gamma_t) - \nabla_{[G,V]}X^w(\Gamma_t) = \nabla_G\nabla_V X^w(\gamma_t).$$

Calculamos por separado ambos términos. Comenzamos por el lado derecho: tenemos $V(\gamma_t) = P_0^t(\gamma)tA_{\gamma_t}v = tX(\gamma_t, A_{\gamma_t}v = tX^{A_q v}(\gamma_t)$. Como la derivada covariante $\nabla_X Y$ sólo depende del valor de X en el punto, entonces

$$\nabla_V X^w(\gamma_t) = t\nabla_{X^{A_q v}}X^w(\gamma_t) = tP_0^t(\gamma)B_{\gamma_t}(A_{\gamma_t}v, w) = P_0^t(\gamma)b_t$$

donde $b_t = B_{\gamma_t}(tA_{\gamma_t}v, w)$ por la misma definición de B. Entonces

$$\nabla_G\nabla_V X^w(\gamma_t) = t\nabla_{\gamma'}P_0^t(\gamma)b_t = tP_0^t(\gamma)b_t'$$

por el Lema 6.7.6. Por otro lado, de la definición de R^* obtenemos.

$$R(G,V)X^w(\gamma_t) = R_{\gamma_t}(tP_0^t(\gamma)z, tP_0^t(\gamma)A_{\gamma_t}v, P_0^t(\gamma)w) = tP_0^t(\gamma)R^*_{\gamma_t}(z, tA_{\gamma_t}v, w),$$

y entonces $b_t' = R^*_{\gamma_t}(z, tA_{\gamma_t}v, w)$. Como $b_0 = 0$, integrando en $[0,1]$ y reemplazando v por $A_q^{-1}v$ obtenemos el resultado enunciado. □

En principio este último resultado nos dice que R^* caracteriza la derivada covariante, pero sólo para los campos paralelos X^w. Para extender esta caracterización a todos los campos tenemos el siguiente lema:

Lema 7.4.7. *Sean* $v \in T_pM$, $Y \in \mathfrak{X}(U)$. *Sea* $y : U \to T_pM$ *dada por* $y(q) = P_1^0(\gamma_q)Y_q$. *Si* $w_q = Dy_q(X^v(q)) + B_q(v, y(q))$ *entonces*

$$\nabla_{X^v} Y(q) = X(q, w_q) = X^{w_q}(q) = P_0^1(\gamma_q)w_q.$$

Demostración. Observamos que $Y_q = P_0^1(\gamma_q)y(q) = X(q, y(q))$, luego para cada $u \in T_qM$ tenemos

$$\begin{aligned} DY_q(u) &= DX_{(q,y(q))}(u, Dy_q(u)) = DX_{(q,y(q))}(0, Dy_q(u)) + DX_{(q,y(q))}(u, 0) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} X(q, y(\exp_q(tX^v(q)))) + \partial_1 X_{(q,y(q))}(u) \\ &= P_0^1(\gamma_q)Dy_q(X^v(q)) + (DX^{y(q))})_q u \end{aligned}$$

donde la última igualdad es por el Lema 6.7.6. En particular para $u = X^v(q)$ obtenemos

$$\begin{aligned} (\nabla_{X^v} Y)_q &= DY_q(X^v(q)) - \Gamma_q(y(q), X^v(q)) \\ &= P_0^1(\gamma_q)Dy_q(X^v(q)) + (DX^{y(q)})_q(X^v(q)) - \Gamma_q(y(q), X^v(q)) \\ &= P_0^1(\gamma_q)Dy_q(X^v(q)) + (\nabla_{X^v} X^{y(q)})(q) \\ &= P_0^1(\gamma_q)\left(Dy_q(X^v(q)) + B_q(v, y(q))\right) = P_0^1(\gamma_q)w_q. \end{aligned}$$

□

Como anunciamos al principio de esta sección podemos enunciar y probar ahora un teorema local que permite vincular la curvatura con las transformaciones afines:

Teorema 7.4.8 (Teorema de Ambrose-Cartan local)**.** *Sean* $M, \overline{M}$ *variedades con spray, sean* $\nabla, \overline{\nabla}$ *las respectivas conexiones. Sea* $L : T_pM \to T_{\overline{p}}\overline{M}$ *isomorfismo lineal, y sea* $\rho : U \to \overline{U}$ *el difeomorfismo definido en entornomos normales convenientes como*

$$\rho(\exp_p(v)) = \exp_{\overline{p}}(Lv).$$

Notamos que $D\rho_q = L$, *denotamos* $\overline{q} = \rho(q)$, *y* $\overline{R}, \overline{P}$ *para la curvatura y el transporte paralelo de* $\overline{\nabla}$. *Son equivalentes*

1. $LR_q^*(x, y, z) = \overline{R}_{\overline{q}}^*(Lx, Ly, Lz)$ *para todo* $q \in U$.
2. ρ *es transformación afín:* $\rho_*(\nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\rho_* X}(\rho_* Y)$ *para todo* $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$.

En tal caso $D\rho_q = \overline{P}_0^1(\gamma_{\overline{q}})D\rho_p P_0^1(\gamma)_q$ *para todo* $q \in U$.

Demostración. Supongamos que ρ es transformación afín entre M y $\overline{M}$, veamos que la condición sobre $L = D\rho_q$ es necesaria. Abreviando $P = P_0^1(\gamma)$ y similarmente $\overline{P} = \overline{P}_0^1(\tilde{\gamma})$, sabemos que ρ_* preserva las curvaturas y el transporte paralelo (Observaciones 7.3.5 y 7.3.4); en particular $\rho_* Px = \overline{P} D\rho_p x = \overline{P} Lx$. Entonces

$$\begin{aligned}\rho_* R_q^*(x,y,z) &= \rho_* P^{-1} R_q(Px,Py,Pz) = \overline{P}^{-1}\overline{R}_{\overline{q}}(\rho_* Px, \rho_* Py, \rho_* Pz)\\ &= \overline{P}^{-1}\overline{R}_{\overline{q}}(\overline{P}Lx, \overline{P}Ly, \overline{P}Lz) = \overline{R}_{\overline{q}}^*(Lx,Ly,Lz).\end{aligned}$$

Supongamos ahora que vale la hipótesis sobre $L = D\rho_q$, y veamos que ρ es transformación afín. Sea $\overline{A} : \overline{U} :\to B(T_{\overline{p}}\overline{M})$ el mapa que relaciona en $\overline{M}$ los campos η y X (Observación 7.4.3 y la definición anterior). Esto es, si $\overline{X}(\overline{q},\overline{v}) = \overline{P}_0^1(\gamma_{\overline{q}})\overline{v}$ y $\overline{\eta}^{\overline{v}}(\overline{q}) = (\exp_{\overline{p}})_{*Lz}\overline{v}$ (donde por la definición de ρ, $\gamma_{\overline{q}}(t) = \rho\gamma_q(t) = \exp_{\overline{p}}(tLz)$ si $\gamma_q(t) = \exp_p(tz)$), entonces

$$\overline{\eta}^{\overline{v}}(\overline{q}) = \overline{X}^{\overline{A}_{\overline{q}}\overline{v}}(\overline{q}). \tag{7.8}$$

Observamos que para todo $v \in T_pM$, los campos η^v y $\overline{\eta}^{Lv}$ están ρ-relacionados por la misma definición de ρ:

$$D\rho_q\eta^v(q) = D\rho_q(\exp_p)_{*z}v = (\exp_{\overline{p}})_{*Lz}Lv = \overline{\eta}^{Lv}(\overline{q}). \tag{7.9}$$

Por otro lado, por el Lema 7.4.4 del lado de $\overline{M}$ tenemos, fijando $Lv \in T_{\overline{p}}\overline{M}$,

$$(t\overline{A}_{\overline{\gamma}_t}Lv)'' = \overline{R}^*_{\overline{\gamma}_t}(Lz, t\overline{A}_{\overline{\gamma}_t}Lv, Lz) = LR^*_{\gamma_t}(z, tL^{-1}\overline{A}_{\overline{\gamma}_t}Lv, z)$$

donde usamos la hipótesis que vincula L y R. Multiplicando por L^{-1} a la izquierda, notamos que $tL^{-1}\overline{A}_{\overline{\gamma}_t}Lv$ verifica la misma ecuación diferencial que $tA_{\gamma_t}v$ (y con las mismas condiciones iniciales), luego ambas funciones deben ser iguales. En particular tomando $t = 1$ obtenemos $L^{-1}\overline{A}_{\overline{q}}L = A_q$. Luego a partir de esto y de las ecuaciones (7.8) y (7.9) obtenemos

$$\overline{X}^{LA_qv}(\overline{q}) = \overline{X}^{\overline{A}_{\overline{q}}Lv}(\overline{q}) = \overline{\eta}^{Lv}(\overline{q}) = D\rho_q\eta^v(q) = D\rho_q X^{A_qv}(q).$$

Esto es, los campos $\overline{X}^{LA_qv}$ y X^{A_qv} están ρ-relacionados; como A_q es un isomorfismo deducimos que los campos X^v y $\overline{X}^{Lv}$ están ρ-relacionados para todo $v \in T_pM$. En otros términos también tenemos

$$D\rho_q P_0^1(\gamma_q)v = D\rho_q X^v(q) = \overline{X}^{Lv}(\overline{q}) = \overline{P}_0^1(\gamma_{\overline{q}})Lv,$$

luego

$$\overline{P}_1^0(\gamma_{\overline{q}})D\rho_q P_0^1(\gamma_q) = L. \tag{7.10}$$

Ahora afirmamos que $LB_q(v,w) = \overline{B}_{\overline{q}}(Lv, Lw)$ para todo $v, w \in T_pM$: para probarlo sea como antes $b_t(v,w) = tB_{\gamma_t}(v,w)$ y sea $\overline{b}_t(Lv, L_w)$ la correspondiente función del lado de $\overline{M}$. Por el Lema 7.4.6, la hipótesis y lo recién probado $L^{-1}A_{\overline{q}}L = A_q$ tenemos

$$\begin{aligned}\overline{b}_t'(Lv, Lv) &= \overline{R}^*_{\overline{\gamma}_t}(Lz, t\overline{A}_{\overline{\gamma}_t}Lv, Lw) = LR^*_{\gamma_t}(z, tL^{-1}\overline{A}_{\overline{\gamma}_t}Lv, w)\\ &= LR^*_{\gamma_t}(z, tA_{\gamma_t}v, w),\end{aligned}$$

luego $L^{-1}\overline{b}_t(Lv, Lw)$ tiene la misma derivada que $b_t(v,w)$; como ambas funciones son nulas en $t = 0$, evaluando en $t = 1$ tenemos la afirmación

$$B_{\overline{q}}(Lv, Lw) = LB_q(v,w). \tag{7.11}$$

En síntesis, A y B están unívocamente determinadas por R^* y la hipótesis nos dice cómo determinar sus correspondientes del lado de $\overline{M}$, que son esencialmente los mismos conjugando con L. Con esto podemos probar que ρ es automorfismo de la conexión: basta probar que $\rho_*\nabla_X Y = \overline{\nabla}_{\rho_* X}\rho_* Y$ para un campo paralelo $X = X^v$, ya que la derivada covariante sólo depende del valor de X en q. Usando el lema anterior y el hecho de que X^z, $\overline{X}^{Lz}$ están ρ-relacionados tenemos por un lado

$$\rho_*(\nabla_{X^v}Y)(q) = D\rho_q(\nabla_{X^v}Y)(q) = D\rho_q X^{w_q} = \overline{X}^{Lw_q}(\overline{q}), \tag{7.12}$$

con $w_q = Dy_q(X^v(q)) + B_q(v, y_q)$ según la notación de ese lema ($y(q) = P_1^0(\gamma_q)Y_q$). Por otro lado, y por el mismo lema

$$(\overline{\nabla}_{\rho_* X^v}\rho_* Y)(\rho(q)) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}^{Lv}}\overline{Y})(\overline{q}) = \overline{X}^{\overline{w}_{\overline{q}}}(\overline{q}), \tag{7.13}$$

donde $\overline{Y}(\overline{q}) = \rho_* Y(\overline{q}) = D\rho_q Y_q$. Luego

$$\overline{y}(\overline{q}) = \overline{P}_1^0(\gamma_{\overline{q}})\overline{Y}_{\overline{q}} = \overline{P}_1^0(\gamma_{\overline{q}})D\rho_q P_0^1(\gamma_q)P_1^0(\gamma_q)Y_q = Ly(q)$$

por la ecuación (7.10). Así $D\overline{y}_{\overline{q}} = LDy_q$, y entonces

$$D\overline{y}_{\overline{q}}\overline{X}^{Lv}(\overline{q}) = D\overline{y}_{\overline{q}}D\rho_q X^v(q) = LDy_q X^v(q).$$

Si combinamos esto con la ecuación (7.11) obtenemos

$$\overline{w}_{\overline{q}} = D\overline{y}_{\overline{q}}(\overline{X}^{Lv}(\overline{q})) + \overline{B}_{\overline{q}}(Lv, \overline{y}_{\overline{q}}) = LDy_q(X^v(q)) + LB_q(v, y(q)) = Lw_q,$$

lo que prueba la igualdad de las ecuaciones (7.12) y (7.13), concluyendo la prueba de que ρ es automorfismo de la conexión. La aseveración final enunciada en el teorema es inmediata de la ecuación (7.10) que probamos más arriba. □

Observación 7.4.9. Si ambas variedades $M, \overline{M}$ son completas y simplemente conexas, mediante el transporte paralelo a lo largo de geodésicas a trozos, puede probarse con las hipótesis del Teorema 7.4.8 que el mapa afín ρ se extiende a un difeomorfismo global afín. La prueba puede verse en [89, Teorema 2.2].

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 197

Aplicando el teorema de Ambrose a la transformación lineal $L = \mathrm{id}$, obtenemos un criterio para ver cuando dos conexiones coinciden en M:

Corolario 7.4.10. *Si* $F, \overline{F}$ *son dos sprays en* M*, entonces* $R^* = \overline{R}^*$ *en algún entonrno normal de* $p \in M$ *si y sólo si* F *y* $\overline{F}$ *coinciden allí.*

Observación 7.4.11. Cabe destacar que si conocemos la curvatura R de M en un entorno de p, y el transporte paralelo *radial emanando desde* $p \in M$, entonces conocemos R^* en un entorno de p, y el teorema de Ambrose nos dice que podemos recuperar la conexión ∇ en todo este entorno. Por supuesto que si tuviéramos conocimiento del transporte paralelo en *todas las direcciones* en un entorno de p, podríamos recuperar la conexión sin recurrir a la curvatura.

7.5. Espacios simétricos

En esta sección estudiamos los espacios simétricos según Loos [61], aunque nuestra presentación le debe mucho a Neeb [72] y Lang [59].

Definición 7.5.1 (Espacio simétrico)**.** Sea M variedad, $\mu : M \times M \to M$ suave, denotamos $\mu(x, y) = x \cdot y = S_x(y)$. Decimos que (M, μ) es un espacio simétrico si se satisfacen los axiomas para todo $x, y, z \in M$:

(S1) $x \cdot x = x$

(S2) $x \cdot (x \cdot y) = y$

(S3) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$

(S4) Para todo $x \in M$ existe un entorno U tal que para todo $y \in U$, si $x \cdot y = y$ entonces $x = y$.

Observación 7.5.2. Notemos que para cada $p \in M$, $S_p : M \to M$ es un difeomorfismo por (S2), ya que es equivalente a $S_p^2 = \mathrm{id}_M$. El primer axioma nos dice que p es punto fijo de S_p y el último axioma nos dice que p es un punto fijo aislado de S_p. Estos mapas S_p se conocen como simetrías del espacio (M, μ).

Definición 7.5.3 (Automorfismos del espacio simétrico)**.** Sea (M, μ) espacio simétrico. Diremos que $f : M \to M$ difeomorfismo local es automorfismo de (M, μ) si $f(\mu(x), \mu(y)) = \mu(f(x), f(y))$ para todo $x, y \in M$. Denotamos este conjunto como $\mathrm{Aut}(M, \mu)$. Es inmediato del axioma (S3) que todas las simetrías S_p $(p \in M)$ son automorfismos del espacio simétrico.

Lema 7.5.4. *Si* (M, μ) *es un espacio simétrico entonces para todo* $p \in M$ *se tiene* $(S_p)_{*p} = -\mathrm{id}_{T_pM}$.

Demostración. De la propiedad (S2) tenemos que $S_p^2 = \mathrm{id}_M$ luego $(S_p)_{*p}^2 = \mathrm{id}_{T_pM}$. Componiendo con una carta (U, φ) alrededor de p, con $\varphi(p) = 0$, $\varphi(U) = V \subset E$ con E el espacio que modela M. Podemos suponer que $S_p(U) \subset U$ y que p es el único punto fijo de S_p en U. Consideramos $f = \varphi \circ S_p \circ \varphi^{-1} : V \to E$, que es una involución $f^2 = \mathrm{id}_V$ y además 0 es el único punto fijo de f en V. Sea $T = Df_0$, entonces $T^2 = \mathrm{id}_E$, luego $E = E_+ \oplus E_+$ donde $E_+ = \ker(T-1)$, $E_- = \ker(T+1)$. Afirmamos que $E_+ = \{0\}$, para probarlo consideramos $g(x,y) = f(x,y) - (x,y)$ con respecto a la descomposición de E, y calculamos

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = T|_{E_+} - \mathrm{id}_{E_+} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = T|_{E_-} - \mathrm{id}_{E_-} = -2\mathrm{id}_{E_-}.$$

Por el teorema de la función implícita existe un entorno W de 0 en E_+ y una función suave $\psi : W \to E_-$ tal que $g(x, \psi(x)) = 0$ para todo $x \in W$, y esto es equivalente a $f(x, \psi(x)) = (x, \psi(x))$ o sea $(x, \psi(x))$ son todos puntos fijos de f. Esto nos dice que debe ser $W = E_+ = \{0\}$. Entonces $E = \ker(T + 1)$ o equivalentemente $T = -\mathrm{id}$. Notando que T es la expresión local de $(S_p)_{*p}$ se tiene la conclusión. □

Lema 7.5.5. *Sea (M, μ) espacio simétrico. Para $V, W \in TM$ el producto $V \cdot W = \mu_*(V, W)$ define una estructura de espacio simétrico en TM, y si $v, w \in T_pM$ entonces $V \cdot W = 2V - W$. Además si $f \in \mathrm{Aut}(M, \mu)$ entonces $f_* \in \mathrm{Aut}(M, \mu_*)$.*

Demostración. La demostración de las primeras tres propiedades $(S1-3)$ es formal, se deduce de las propiedades funtoriales de la diferencial, y queda como ejercio. Ahora notamos que si $\pi : TM \to M$ es la proyección al punto base del fibrado entonces $\pi \circ \mu_* = \mu \circ (\pi \times \pi)$, y en particular $T_pM \cdot T_pM \subset T_pM$. Si $V = (p, v)$, $W = (p, w)$ entonces en primer lugar de $x \cdot x = x$ escribimos $\mu(p_t, p_t) = p_t$ y derivando respecto de t, suponiendo que la velocidad es $\dot{p}_t = v$, obtenemos $\mu_{*(p,p)}(v, v) = v$. También tenemos

$$\mu_{*(p,p)}(0, v) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\mu(p, p_t) = \frac{d}{dt}|_{t=0}S_p(p_t) = (S_p)_{*p}v = -v$$

por el Lema 7.5.4. Entonces

$$\mu_{*(p,p)}(v, 0) = \mu_{*(p,p)}(v, v) - \mu_{*(p,p)}(0, v) = v - (-v) = 2v,$$

con lo cual

$$v \cdot w = \mu_{*(p,p)}(v, w) = \mu_{*(p,p)}(v, 0) + \mu_{*(p,p)}(0, w) = 2v - w.$$

Con esto podemos también verificar $(S4)$, para eso sea $V = (p, v) \in TM$ y tomamos un entorno U de p tal que S_p es el único punto fijo de S_p en U; si $W \in \pi^{-1}U \subset TM$ verifica $V \cdot W = W$ entonces en particular $S_p(\pi(w)) = \mu(\pi(v), \pi(w)) = \pi(w)$. Por la

unicidad debe ser $\pi(w) = p$, con lo cual también $w = 2v - w$ y de aquí se concluye que $w = v$ luego $V = W$. Por último, si $f \in \mathrm{Aut}(M, F)$, de $f\mu(p, q) = \mu(f(p), f(q))$, derivando obtenemos

$$f_*\mu_{*(p,q)}(\dot{p}, \dot{q}) = \mu_{*(f(p),f(q))}(Df_p\dot{p}, Df_p\dot{q})$$

y esto prueba que f_* es automorfismo de (TM, μ_*). □

Para $V = (p, v) \in TM$, sea $\Sigma_V : TM \to TM$ dada por $\Sigma_V(W) = \mu_*(V, W)$, más precisamente

$$\Sigma_{(p,v)}(q, W) = \mu_{*(p,q)}(v, w).$$

Denotaremos con $Z : M \to TM$ la sección nula, $Z(q) = (q, 0)$ para $q \in M$.

Teorema 7.5.6 (La conexión de un espacio simétrico)**.** *Sea (M, μ) espacio simétrico conexo. Si $V = (p, v) \in TM$, $\Sigma_V \circ Z : M \to TM$ y $(\Sigma_V \circ Z)_* : TM \to TTM$. Entonces*

1. *$F(V) = -(\Sigma_{V/2} \circ Z)_*V$ es un spray cuadrático en M.*
2. *$\mathrm{Aut}(M, F) = \mathrm{Aut}(M, \mu)$.*
3. *F es el único spray cuadrático en M invariante por todas las simetrías S_p, y de hecho $F_p(v) = \frac{1}{2}(D^2S_p)_p(v, v)$ para todo $v \in T_pM$.*

Demostración. La primera afirmación queda a cargo del lector, hay que verificar que F es cuadrático y que es una sección tanto para π_{TM} como para $(\pi_M)_*$. Para probar la segunda, supongamos primero que $\rho \in \mathrm{Aut}(M, \mu)$, entonces $\rho \in \mathrm{Aut}(TM, \mu_*)$ y en particular para todo $V = (p, v) \in TM$

$$\begin{aligned}\rho_*\Sigma_{V/2} \circ Z(q) &= \rho_*\mu_{*(p,q)}(v/2, 0) = \mu_{*(\rho(p),\rho(q))}(D\rho_pV/2, 0)\\ &= \Sigma_{\rho_*V/2} \circ Z \circ \rho(q).\end{aligned}$$

Diferenciando respecto de q en (p, v), obtenemos $\rho_{**}(-F(V)) = -F(\rho_*V)$, y esto prueba que $\rho \in \mathrm{Aut}(M, F) = \mathrm{Aut}(M, \nabla)$. En particular, todas las simétrias S_x, $x \in M$, resultan automorfismos de ∇. Para probar la inclusión opuesta, dado $\rho \in \mathrm{Aut}(M, \nabla)$, y $p \in M$, consideremos $f = \rho \circ S_p$, $g = S_{\rho(p)} \circ \rho$, que son entonces ambos automorfismos de ∇. Notemos que $f(p) = \rho(S_p(p)) = \rho(p)$ y que $g(p) = S_{\rho(p)}(\rho(p)) = \rho(p)$ luego f y g coinciden en p. Por otro lado

$$Df_p = D\rho_{S_p(p)}(DS_p)_p = -D\rho_p$$

por el Lema 7.5.4. Ahora calculamos

$$Dg_p = (DS_{\rho(p)})_{\rho(p)}D\rho_p = -D\rho_p$$

por el mismo lema. Como f, g coinciden a orden uno en el punto $p \in M$, el Lema 7.3.11 nos dice que debe ser $f = g$ en M. Luego para todo $q \in M$,

$$\rho(\mu(p,q)) = \rho(S_p(q)) = f(q) = g(q) = S_{\rho(p)}\rho(q) = \mu(\rho(p), \rho(q)),$$

y esto prueba que $\rho \in \mathrm{Aut}(M,\mu)$. Por lo recién probado, como S_p son automorfismos de μ, es claro que F es invariante por todas las simetrías. Por otro lado, si F es un spray invariante por las simetrías S_p, de la ecuación (7.7) y el Lema 7.5.4 obtenemos

$$\begin{aligned} F_p(v) &= F_{S_p(p)}((DS_p)_p v) = (D^2 S_p)_p(v,v) + (DS_p)_p F_p(v) \\ &= (D^2 S_p)_p(v,v) - F_p(v). \end{aligned}$$

Luego $2F_p(v) = (DS_p^2)_p(v,v)$ así que las simetrías determinan unívocamente al spray. □

Veamos que las simétrías del espacio son efecto simetrías geodésicas:

Lema 7.5.7 (Simetrías). *Sea γ geodésica de (M,F). Entonces $S_{\gamma_a} \circ \gamma(s) = \gamma(2a-s)$ en el dominio de γ, y además*

$$(DS_{\gamma_a})_{\gamma_b} = -P_b^{2a-b}(\gamma).$$

Demostración. Como S_{γ_a} es automorfismo, $\beta = S_{\gamma_a} \circ \gamma$ es geodésica de (M,F). Tenemos $\beta(a) = S_{\gamma_a}\gamma_a = \gamma_a$ y además $\beta'(a) = (DS_{\gamma_a})_{\gamma_a}\gamma_a' = -\gamma_a'$ por el Lema 7.5.4. Como $s \mapsto \gamma(2a-s)$ también es godésica con las mismas condiciones iniciales en $s = a$, se tienen la primer afirmación del lema. Ahora bien, como S_{γ_a} es automorfismo de la conexión, manda transporte paralelo en transporte paralelo (Observación 7.3.4), en particular para todo $w \in T_{\gamma_a}M$ tenemos

$$(DS_{\gamma_a})_{\gamma_b} P_a^b(\gamma)w = P_a^b(S_{\gamma_a} \circ \gamma)(DS_{\gamma_a})_{\gamma_a} w = -P_a^b(S_{\gamma_a} \circ \gamma)w.$$

Sea $\mu(s) = P_a^s(S_{\gamma_a} \circ \gamma)w$, notemos que $\mu(a) = w$ y por otro lado

$$\mu'(s) = \Gamma_{\gamma(2a-s)}(-\gamma'(2a-s), \mu(s))$$

por la ecuación de transporte paralelo. Sea $\eta(x) = \mu(2a-x)$, entonces $\eta(a) = \mu(a) = w$ y además

$$\eta'(x) = -\mu'(2a-x) = \Gamma_{\gamma(x)}(\gamma'(x), \eta(x)),$$

luego $\eta(x) = P_a^x(\gamma)\eta(a) = P_a^x(\gamma)w$. Por consiguiente $\mu(s) = \eta(2a-s) = P_a^{2a-s}(\gamma)w$ y con esto

$$\begin{aligned} (DS_{\gamma_a})_{\gamma_b} P_a^b(\gamma)w &= -P_a^b(S_{\gamma_a} \circ \gamma)w = -\mu(b) \\ &= -P_a^{2a-b}(\gamma)w = -P_b^{2a-b}(\gamma) \circ P_a^b(\gamma)w \end{aligned}$$

por propiedad del transporte paralelo. Como $P_a^b(\gamma)$ es un isomorfismo, obtenemos la conclusión. □

Con estas herramientas a mano, podemos probar un teorema central de la geometría de los espacios simétricos:

Teorema 7.5.8. *Sea* (M,μ) *espacio simétrico y* F *el spray cuadrático inducido. Entonces*

1. (M,F) *es geodésicamente completa.*
2. *Si* γ *es geodésica de* M*, entonces* $\tau_t = S_{\gamma(t/2)}\circ S_{\gamma_0} \in \mathrm{Aut}(M,F)$ *es un grupo a un parámetro, que verifica* $\tau_t(\gamma_s)=\gamma_{t+s}$ *y*
$$(D\tau_t)_{\gamma_s} = P_s^{t+s}(\gamma).$$
3. *Para cada* $v\in T_pM$ *sea* X^v *el campo* $X^v(p)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\tau_t(p)$*, esto es,* τ_t *es el flujo de* X^v*. Entonces* X^v *es Killing,* $X^v(p)=v$ *y* $X^v\in\mathfrak{m}_p$*.*
4. *Fijado* $p\in M$ *la asignación evaluar en* p*,* $\mathrm{Kill}(M)\ni X\to X(p)\in T_pM$ *produce una sucesión exacta corta cuya sección es el mapa* $v\mapsto X^v$ *del ítem anterior*
$$0\to\mathfrak{k}_p\to \mathrm{Kill}(M)=\mathfrak{k}_p\oplus\mathfrak{m}_p\to T_pM\to 0.$$
5. $\nabla R=0$*. Esto es, para todo campo* V *en* M*, se tiene* $\nabla_V R=0$ *(Observación 7.1.2).*

Demostración. Tomemos geodésica por p, notemos que por el lema anterior se tiene $S_p\circ\gamma(t)=\gamma(-t)$. En particular el dominio de γ es simétrico alrededor de $t=0$. Ahora supongamos que $\mathrm{Dom}(\gamma)=(-\delta,\delta)$ con $\delta>0$, y tomando $c\in(0,\delta)$, sea $q=\gamma_c$. Tomamos la geodésica $\lambda(s)=S_q\circ\gamma(c-s)$ que a priori está definida en $(-\delta+c,c+\delta)$, y verifica $\lambda_0=S_q\gamma_c=S_q(q)=\gamma_c$. También $\lambda_0'=(DS_q)_q(-\gamma_c')=\gamma_c'$; por la unicidad debe ser $\lambda(s)=\gamma(c+s)$ o equivalentemente $\gamma(t)=\lambda(t-c)$. Notemos que si $\delta\le t<\delta+2c$ entonces $t-c\in\mathrm{Dom}(\lambda)$, pero esto nos dice que γ está definida en (al menos) $[0,\delta+2c)$, una contradicción con la maximalidad asumida del dominio original. Luego debe ser $\mathrm{Dom}(\gamma)=\mathbb{R}$ y esto muestra que (M,F) es completa. Un razonamiento muy parecido al anterior (de hecho, similar al del lema previo) usando la unicidad de las geodésicas prueba que $\tau_t(\gamma(s))=\gamma(t+s)$. Para probar la afirmación sobre transporte paralelo usamos la regla de la cadena y el lema previo dos veces

$$\begin{aligned}(D\tau_t)_{\gamma_s} &= (DS_{\gamma(t/2)})_{S_p\gamma_s}(DS_p)_{\gamma_s}\\ &= (DS_{\gamma(t/2)})_{\gamma_{-s}}(-P_s^{-s}(\gamma))\\ &= P_{-s}^{2(t/2)-(-s)}(\gamma)\circ P_s^{-s}(\gamma)\\ &= P_{-s}^{t+s}(\gamma)\circ P_s^{-s}(\gamma)=P_s^{t+s}(\gamma),\end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de las propiedades del transporte paralelo.

Veamos ahora que τ_t es un grupo a un parámetro; sean $f = \tau_{s+t}$, $g = \tau_s \circ \tau_t$, ambos son automorfismos de la conexión. Evaluando en $p = \gamma_0$ obtenemos $f(p) = g(p) = \gamma(s+t)$. Por otro lado

$$Df_p = (D\tau_{s+t})_{\gamma_0} = P_0^{s+t}(\gamma)$$

por lo recién probado, y también

$$Dg_p = (D\tau_s)_{\gamma_t}(D\tau_t)_{\gamma_0} = P_s^{s+t}(\gamma) \circ (P_0^t) = P_0^{t+s}(\gamma)$$

por propiedades del transporte paralelo. Entonces, por el Lema 7.3.11, $f = g$ en M y esto prueba que τ_t es un grupo a un parámetro de automorfismos. Si definimos $X^v(p) = \dot\tau_0(p)$, es inmediato que X^v es Killing y que τ_t es su flujo. Notemos que como $X_v(\gamma_t) = X_v(\tau_t(\gamma_0)) = \dot\tau_t(\gamma_0) = \gamma_t'$, en particular $X_v(p) = \gamma_0' = v$. Por otro lado $(D\tau_t)_p w = P_0^t(\gamma)w = \eta_w(t)$ para todo $w \in T_pM$ también por el ítem previo, luego derivando en $t = 0$ obtenemos

$$DX_p^v w = \dot\eta_w(0) = \Gamma_p(\gamma_0', \eta_w(0)) = \Gamma_p(v, w),$$

esto es $DX_p^v = \Gamma_p(v, \cdot)$. Esto prueba que $\nabla X^v(p) = 0$ luego $X^v \in \mathfrak{m}_p$. Que $\mathfrak{k}_p$ y $\mathfrak{m}_p$ están en suma directa lo probamos en la Proposición 7.3.17, veamos que todo campo de Killing está en esta suma directa. Para ello, dado $Z \in \mathrm{Kill}(M)$, sea $v = Z(p)$ y sea $X^v \in \mathfrak{m}_p$ el campo de Killing obtenido en la discusión previa. Entonces podemos escribir $Z = Z - X^v + X^v$, y como $(Z - X^v)(p) = Z_p - X_p^v = v - v = 0$, hemos probado que $Z \in \mathfrak{k}_p \oplus \mathfrak{m}_p$.

Por último, veamos la afirmación sobre el paralelismo del tensor de curvatura. Para abreviar, llamamos $S = S_p$, que es un automorfismo de la conexión. Por la Observación 7.3.5, como $S(p) = p$ y $S_{*p} = -\mathrm{id}$, tenemos

$$\begin{aligned} -(\nabla_V R)(X,Y,Z)(p) &= S_{*p}\{(\nabla_V R)(X,Y,Z)(p)\} = S_*\{(\nabla_V R)(X,Y,Z)\}(S(p)) \\ &= \nabla_{S_*V} R(S_*X, S_*Y, S_*Z)(p) \\ &= (\nabla_{S_*V} R)_p(S_{*p}X, S_{*p}Y, S_{*p}Z) \\ &= -(\nabla_{S_*V} R)_p(X_p, Y_p, Z_p), \end{aligned}$$

puesto que tanto R como $\nabla_V R$ son tensores y entonces su valor en p sólo depende de los valores de los campos en p. Es más, como observamos en la Definición 7.1.1, la derivada covariante en la dirección de S_*V sólo depende del valor de S_*V en p, esto es $S_*V(S(p)) = S_{*p}V_p = -V_p$, y esto nos dice que $(\nabla_{S_*V} R)_p = -(\nabla_V R)_p$. Luego $-\nabla_V R = \nabla_V R$ y esto prueba que $\nabla_V R = 0$ para todo V. □

En principio para obtener Γ (la forma bilineal del operador cuadrático F) habría que polarizar pero el siguiente lema nos muestra que su expresión es más simple:

Lema 7.5.9. *Si* $V, W \in TM$ *entonces*

$$\Gamma_p(V,W) = -\frac{1}{2}(\Sigma_V \circ Z)_{*p}W = -\frac{1}{2}(\Sigma_W \circ Z)_{*p}V$$

es el operador bilineal del spray.

Demostración. Dados $V = (p,v) \in TM$, $W = (p,w) \in TM$, sean X, Y los campos de Killing tales que $X_p = v$, $Y_p = w$ y sean ρ_t, τ_s sus respectivos flujos. Sea

$$f(s,t) = \mu(\tau_s(p), \rho_t(p)) = \rho_t \mu(\rho_{-t}\tau_s(p), p),$$

donde utilizamos que ρ_t es automorfismo de μ. Procederemos a calcular

$$\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}f\big|_{t=s=0} = \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}f\big|_{t=s=0},$$

la primera con la primer expresión de f y la segunda con la segunda expresión de f. En primer lugar

$$\frac{d}{ds}\big|_{s=0}\mu(\tau_s(p), \rho_t(p)) = \mu_{*(p,\rho_t(p))}(\tau_0'(p), 0) = (\Sigma_W \circ Z)(\rho_t(p))$$

puesto que $\tau_0'(p) = Y_p = w$. Derivando ahora respecto de t en $t = 0$ obtenemos

$$(f')^{\cdot}(0,0) = (\Sigma_W \circ Z)_{*p}V,$$

puesto que $\dot{\rho}_0(p) = X_p = v$. Ahora derivamos la segunda expresión respecto de t en $t = 0$ para obtener

$$\begin{aligned} \dot{f}(0,s) &= X(\mu(\tau_s(p),p)) - \mu_{*(\tau_s(p),p)}(X(\tau_s(p)),0) \\ &= X(\mu(\tau_s(p),p)) - A(s). \end{aligned} \tag{7.14}$$

Mediante el Lema 7.3.8, escribimos $\tau_s^* X(p) = X_p + s[Y,X](p) + o(s^2)$. Por otro lado, como τ_s es automorfismo de (M,μ), por el Lema 7.5.5 $(\tau_s)_*$ es automorfismo de (TM, μ_*). Esto nos permite escribir

$$\begin{aligned} A(s) &= (\tau_s)_*(\tau_{-s})_* A(s) = (\tau_s)_* \mu_{*(p,\tau_{-s}(p))}(\tau_s^* X(p), 0) \\ &= (\tau_s)_* \{\mu_{*(p,\tau_{-s}(p))}(X(p),0) + s\mu_{*(p,\tau_{-s}(p))}([Y,X](p),0) + o(s^2)\} \\ &= (\tau_s)_* W_s, \end{aligned}$$

y de allí $A'(0) = (\tau_0')_* W_0 + \tau_0 W'0 = DY_p W_0 + W_0'$. Como $\mu_{*(p,\tau_{-s}(p))}(X_p, 0) = (\Sigma_V \circ Z)(\tau_{-s}(p))$, observemos que

$$W_0 = \mu_{*(p,p)}(X_p, 0) = 2X_p$$

y que

$$W_0' = -(\Sigma_V \circ Z)_{*p} W + \mu_{*(p,p)}([Y,X](p),0) + 0 + 0 = -(\Sigma_V \circ Z)_{*p} W + 2[Y,X](p).$$

En ambos cálculos usamos la relación $\mu_{*(p,p)}(z,0) = 2z$ obtenida en el Lema 7.5.5. Luego, derivando (7.14) en $s = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{f}'(0,0) &= DX_p \mu_{*(p,p)}(Y_p,0) - A'(0) \\
&= 2DX_p(Y_p) - DY_p W_0 - W_0' \\
&= 2DX_p(Y_p) - 2DY_p(X_p) + (\Sigma_V \circ Z)_{*p} W - 2[Y,X](p) \\
&= 2[Y,X](p) + (\Sigma_V \circ Z)_{*p} W - 2[Y,X](p) \\
&= (\Sigma_V \circ Z)_{*p} W.
\end{aligned}$$

□

Con este lema podemos ver que, al igual que la conexión de una subvariedad de un espacio vectorial con una familia de proyectores (Sección 7.1.1), la expresión local para la curvatura R de un espacio simétrico sólo tiene términos con Γ (y no aparecen sus derivadas):

Corolario 7.5.10 (La curvatura de un espacio simétrico)**.** *Sea (M,μ) espacio simétrico, F el spray inducido y R el tensor de curvatura de la conexión. Entonces en coordenadas locales*

$$R(u,v)w = \Gamma(u,\Gamma(v,w)) - \Gamma(v,\Gamma(u,w)),$$

y en particular

$$R(u,v) = \frac{-1}{4}\{(\Sigma_U \circ Z)_*(\Sigma_V \circ Z)_* - (\Sigma_V \circ Z)_*(\Sigma_U \circ Z)_*\}.$$

Demostración. De la definición de curvatura en coordenadas locales (7.1), lo que afirmamos es que los términos con Γ_* se cancelan, esto es $\Gamma_{*v}(u,w) = \Gamma_{*u}(v,w)$. Para verlo, notemos que como $-2\Gamma_p(v,w) = (\Sigma_W \circ Z)_* pV$ por el lema previo, entonces derivando en $\dot{p} = u$ tenemos

$$-2\Gamma_{*p,u}(v,w) = D^2(\Sigma_W \circ Z)_p(u,v) = D^2(\Sigma_W \circ Z)_p(v,u)$$

pues todas las funciones son C^2. Por otro lado, de la identidad $-4\Gamma_p(u,w) = (\Sigma_W \circ Z)_{*p} U$, derivando en $\dot{p} = v$ también obtenemos

$$-2\Gamma_{*p,v}(u,w) = D^2(\Sigma_W \circ Z)_p(v,u)$$

y esto prueba la primer afirmación. La segunda es simplemente reescribir la primera utilizando la expresión de Γ del lema previo. □

Observación 7.5.11. También sabemos, por el Teorema 7.5.8 y la Proposición 7.3.17, que dados $x, y, z \in T_pM$ existe únicos campos de Killing $X, Y, Z \in \mathfrak{m}_p$ tales que

$$R_p(x, y)z = -[[X, Y], Z](p).$$

7.5.1. Espacios localmente simétricos

La última afirmación del Teorema 7.5.8 la resumimos denotando $\nabla R = 0$. Esta propiedad nos dice que en un espacio simétrico, el tensor de curvatura se comporta bien con el transporte paralelo, como puede verse en el siguiente teorema:

Teorema 7.5.12 (El paralelismo del tensor de curvatura)**.** *Sea* (M, F) *variedad con spray, sea* R *su tensor de curvatura. Son equivalentes:*

1. $\nabla R = 0$.
2. *Para toda curva* $\gamma \subset M$*, si* $P = P_a^b(\gamma) : T_{\gamma_a}M \to T_{\gamma_b}M$ *denota el transporte paralelo, entonces para todo* $x, y, z \in T_{\gamma_a}M$ *se tiene*

$$PR(x, y, z) = R(Px, Py, Pz)$$

En ese caso diremos que (M, F) *es un espacio localmente simétrico.*

Demostración. Tomamos $\mu_x(t) = P_a^t(\gamma)x$ y similarmente con y, z y consideramos $\eta(t) = R_{\gamma_t}(\mu_x(t), \mu_y(t), \mu_z(t))$ que verifica $\eta(a) = R(x, y, z)$. Por la fórmula (7.1.2) tenemos

$$\begin{aligned} D_t\eta &= (\nabla_{\gamma'}R)(\mu_x, \mu_y, \mu_z) + R(D_t\mu_x, \mu_y, \mu_z) \\ &\quad + R(\mu_x, D_t\mu_y, \mu_z) + R(\mu_x, \mu_y, D_t\mu_z) \\ &= (\nabla_{\gamma'}R)(\mu_x, \mu_y, \mu_z). \end{aligned}$$

Supngamos que $\nabla R = 0$, entonces $D_t\eta = 0$ y η es el transporte paralelo de $\eta(a)$, y en particular (tomando $t = b$) se tiene la relación enunciada en el lema. Recíprocamente, tomamos γ tal que $\gamma_0 = p, \gamma_0' = V(p)$, tomamos $x = X_p$, etc. y definimos η como antes. Si vale la relación del segundo ítem, tenemos $D_t\eta = 0$, y entonces $(\nabla_V R)(X, Y, Z)(p) = 0$, luego $\nabla R = 0$. □

Observación 7.5.13. Notemos que por el último item del Teorema 7.5.8, todo espacio simétrico es localmente simétrico. Además, es claro que fijado $p \in M$ y un entorno normal U de p, en un espacio localmente simétrico el tensor local de curvatura R^* es constante e igual a R_p (Definición 7.4.1).

Observación 7.5.14. Veamos cómo se relaciona la definición con las simetrías geodésicas. Dado $p \in M$, tenemos una simétria geodésica S_p definida en un entorno normal de p, dada por

$$S_p(\exp_p(v)) = \exp_p(-v).$$

Es claro que $S_p(p) = p$ y que $S_p^2 = \mathrm{id}$. La idea es que en un espacio localmente simétrico, estas simetrías le dan al entorno normal una estructura local de espacio simétrico, en el sentido de que valen los axiomas $(S1), (S2), (S4)$, mientras que el axioma $(S3)$ (que nos dice que las simetrías son automorfismos del espacio simétrico) vale con las restricciones apropiadas del dominio de cada simetría. De hecho (con una demostración idéntica a la del Teorema 7.5.6) S_p es automorfismo de la conexión si y sólo si es automorfismo de la estructura simétrica definida en el entorno normal U de p en M; esto es si y sólo si

$$S_p(S_q(x)) = S_p\mu(q,x) = \mu(S_p(q), S_p(x)) = S_{S_p(q)}(S_p(x)) \quad \forall q, x \in U.$$

A continuación probaremos que al igual que en el Lema 7.5.7 de espacios simétricos, en un espacio localmente simétrico la diferencial de las simetrías nos da el transporte paralelo, y esto será suficiente para probar que S_p es un automofismo de la conexión gracias al Teorema de Ambrose-Cartan. También recuperamos el spray a partir de la diferencial segunda de la simetría, y esto nos dice que las simetrías geodésicas caracterizan la conexión de un espacio localmente simétrico.

Teorema 7.5.15 (Las simetrías geodésicas como automorfismos)**.** *Sea (M, F) variedad con spray. Entonces M es localmente simétrico si y sólo si cada simetría geodésica S_p es automorfismo de la conexión. En ese caso si $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, entonces $(DS_p)_{\gamma_t} = -P_t^{-t}(\gamma)$, y además $(D^2S_p)_p(v,w) = 2\Gamma_p(v,w)$ para todo $v, w \in T_pM$.*

Demostración. Supongamos que M es localmente simétrico, entonces por las observaciones anteriores el tensor local R^* es constante e igual a R_p. Fijado $p \in M$ y un entorno normal de p, sea S_p la simetría geodésica y $L : T_pM \to T_pM$ dada por $L = DS_p = -\mathrm{id}$, es claro que $R_p(Lx, Ly, Lz) = LR_p(x, y, z)$. Luego por el Teorema de Ambrose (Teorema 7.4.8) S_p es transformación afín entre (M, ∇) y ella misma, es decir es un automorfismo de ∇. Recíprocamente si S_p es automorfismo de la conexión entonces razonando como en la prueba del último ítem del Teorema 7.5.8 obtenemos el paralelismo del tensor de curvatura R. Suponiendo entonces que M es localmente simétrico, el mismo teorema recién citado nos dice que $(DS_p)_q = -P_1^{-1}(\gamma)$ para $q = \gamma(1) = \exp_p(v)$, y cambiando v por tv se tiene la afirmación sobre DS_p. Por último,

$$DS_{\gamma_t}\dot{\gamma}(t) = -P_t^{-t}\dot{\gamma}(t) = -\dot{\gamma}(-t).$$

Derivando en $t = 0$ obtenemos

$$(D^2 S_p)_p(v,v) + (DS_p)_p \ddot{\gamma}(0) = \ddot{\gamma}(0),$$

luego $(DS_p^2)_p(v,v) = 2\ddot{\gamma}(0) = F_p(v)$. Polarizando se obtiene la afirmación que relaciona Γ_p con $D^2 S_p$. □

Corolario 7.5.16 (Espacios localmente simétricos)**.** *Sea* (M, F) *variedad con spray. Entonces* $\nabla R = 0$ *si y sólo si* R *es invariante por el transporte paralelo, si y sólo si las simetrías geodésicas son automorfismos de la conexión. En tal caso* $F_p(v) = (D^2 S_p)_p(v,v)$ *para todo* $p \in M$, $v \in T_p M$.

Observación 7.5.17. Esta caracterización puede globalizarse para espacios conexos, completos y simplemente conexos: en tal caso si M es localmente simétrico la simetría geodésica S_p se extiende a un difeomorfismo de todo M que es automorfismo de la conexión (único por el Lema 7.3.11). La prueba es a partir del transporte paralelo a lo largo de geodésicas a trozos, y puede verse en [89, Teorema 2.2].

Observación 7.5.18 (Campos de Killing y curvatura en espacios localmente simétricos). Como cada entorno normal de $p \in M$ tiene una estructura local de espacio simétrico, valen todos los resultados del Teorema 7.5.8 con la misma demostración, con una excepción: la completitud geodésica no está garantizada por las simetrías porque las simetrías sólo están definidas localmente. Tenemos la descomposición $\mathfrak{Kill}(M,\nabla) = \mathfrak{m}_o \oplus \mathfrak{k}_o$ y el isomorfismo $s : T_o M \to \mathfrak{m}_0$ dado por $v \mapsto X^v$ donde $X^v(q) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \tau_t(q)$ (recordar que $\tau_t = S_{\gamma_{t/2}} \circ S_{\gamma_0}$ es el flujo de X^v para la geodésica que pasa por $o \in M$ con velocidad inicial v).

En particular la transformación de curvatura $R_o(v,w)$ está descripta por los campos de Killing, por la Proposición 7.3.17

$$R_o(v,w)z = -\mathfrak{ad}_{[X^v, X^w]} X^z(o)$$

Como la curvatura es invariante por transporte paralelo, en realidad esto nos da una descripción completa del tensor de curvatura R en M.

Notemos que en general $[\mathfrak{m}_o, \mathfrak{m}_o] \subset \mathfrak{k}_o$; diremos que M es *irreducible* si $\mathfrak{Kill}(M,\nabla)$ es un álgebra de Lie semisimple y $[\mathfrak{m}_o, \mathfrak{m}_o] = \mathfrak{k}_o$ (ver la Observación 7.5.26). En ese caso todos los operadores de curvatura son de la forma $\mathfrak{ad}V$ con $V \in \mathfrak{k}_o$; como el álgebra es semisimple podemos identificar $\mathfrak{ad}\mathfrak{k}_o$ con $\mathfrak{k}_o$. Luego la curvatura de M está descripta esencialmente por la acción irreducible de $\mathfrak{k}_o$ en $\mathfrak{m}_o$.

7.5.2. Espacios simétricos de Cartan

Definición 7.5.19. Dado un grupo de Lie G, con un automorfismo $\sigma : G \to G$, decimos que (G, σ) es un *grupo de Lie simétrico* si $\sigma^2 = \mathrm{id}_G$. Sea

$$G^\sigma = \{g \in G : \sigma(g) = g\},$$

subgrupo cerrado de puntos fijos de σ en G. Dado $K \subset G^\sigma$ subgrupo abierto, el espacio $M = G/K$ es un *espacio simétrico de Cartan.*

Denotamos $q : G \to M$ al mapa cociente, denotamos también $o = q(1)$ y $g \cdot o = gK$ a los elementos del cociente, y

$$\pi(g, h \cdot o) = \pi_{h\cdot o}(g) = \ell_g(h \cdot o) = (gh) \cdot o$$

a la acción de G en M.

Proposición 7.5.20. *Si $\sigma_* : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G)$ denota la diferencial de σ en la identidad de G, entonces $\sigma_*^2 = 1$, luego $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{k}$ donde*

$$\mathfrak{m} = \{x \in \mathrm{Lie}(G) : \sigma_* x = -x\}, \quad \mathfrak{k} = \{y \in \mathrm{Lie}(G) : \sigma_* y = y\}.$$

Además

1. *$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{k}$ es una descomposición de Cartan, esto es*

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}.$$

2. *K es subgrupo de Lie embebido de G, y $\mathrm{Lie}(K) = \mathfrak{k}$.*

3. *M tiene una estructura diferenciable que hace de q un mapa cociente suave, $q_{*1} : \mathfrak{m} \to T_o M$ es un isomorfismo y $\ker q_{*1} = \mathfrak{k}$. Una carta de M alrededor de o está dada por la inversa de $\mathrm{Exp} : \mathfrak{m} \to M$ restringida a un entorno adecuado de $0 \in \mathfrak{m}$.*

Demostración. La involución σ_*, que es además morfismo de álgebras de Lie, nos da la suma directa enunciada $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}$ junto con las propiedades de álgebra de Cartan. Por otro lado es claro que G^σ es subgrupo cerrado de G, y del ítem previo es inmediato que $\mathfrak{k}$ es subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Tomando la carta exponencial y restringiéndola a $U \cap \mathfrak{k}$, donde U es un entorno abierto de $0 \in \mathfrak{g}$ donde la exponencial es un difeomorfismo, tenemos $\exp(\mathfrak{k} \cap U) \subset G^\sigma \cap \exp(U)$ de manera automática. Reduciendo U, podemos suponer que $\sigma_*(U) \subset U$. Por otro lado, si $g = e^\nu \in G^\sigma \cap \exp(U)$, en particular $e^\nu = g = \sigma(g) = e^{\sigma_* \nu}$ y entonces $\nu = \sigma_* \nu$ lo que nos dice que $\nu \in \mathfrak{k}$, luego $G^\sigma \cap \exp(U) = \exp(U \cap \mathfrak{k})$ y esto prueba que G^σ es subgrupo de Lie

embebido de G, cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{k}$ (Teorema 3.2.4). Claramente esto mismo será válido para cualquier subgrupo abierto $K \subset K^\sigma$, que tendrá la misma álgebra de Lie. Le damos el cociente la estructura de espacio topológico cociente por medio de q, y apelamos al Teorema 3.5.6 para la estructura diferenciable, y la identidad $\ker q_{*1} = \mathfrak{k}$ se sigue del Lema 3.5.5 ya que G actúa en el cociente $M = G/K$ de manera suave, y la isotropía de esta acción es exactamente

$$\{g \in G : g \cdot q(1) = q(1)\} = \{g \in G : gK = K\} = K.$$

La última afirmación sobre la carta exponencial se deduce de que $(x, y) \mapsto e^x e^y$ cubre un entorno de $1 \in G$, y los detalles son similares a los de la prueba del Lema 3.5.11. □

Observación 7.5.21 (La estructura de espacio simétrico del cociente). En $M = G/K$, definimos

$$\mu(g \cdot o, h \cdot o) = g\sigma(g)^{-1}\sigma(h) \cdot o.$$

Es fácil ver que μ está bien definida y que (M, μ) cumple los tres primeros axiomas de espacio simétrico, dejamos esa verificación para el lector; en particular por el axioma (S3) tenemos que G actúa en M por automorfismos de μ:

$$\ell_g \mu(p, q) = \mu(\ell_g p, \ell_g q).$$

Para ver que todo $p \in M$ es punto fijo aislado de $S_p = \mu(p, \cdot)$, veamos que esto es cierto primero para $p = o$. Para ello tomamos (la mitad de) el entorno exponencial de o dado por $x \mapsto e^x \cdot o$ con $x \in \mathfrak{m}$ chico, y observamos que si $S_o(q) = q = e^x \cdot o$ entonces como $\sigma(e^x) = e^{-x}$ tenemos

$$e^{-x} \cdot o = \sigma(o, e^x \cdot o) = S_o(q) = q = e^x \cdot o,$$

luego $e^{2x} \cdot o = o$ y por la inyectividad de la carta obtenemos $2x = 0$ o equivalentemente $q = o$. El caso general es inmediato de la acción transitiva de ℓ_g por automorfismos.

Observación 7.5.22 (Spray del espacio simétrico de Cartan). En lo que sigue dotamos a M del spray F compatible con la estructura μ, según el Teorema 7.5.6. De la definición de μ, si tomamos $x \in \mathfrak{m}$ y $v = q_{*g}(gx) \in T_{g \cdot o}M$ entonces

$$\gamma_t = ge^{tx}\sigma(g)^{-1}\sigma(h) \cdot o = ge^{tx/2}\sigma(ge^{tx/2})^{-1}\sigma(h) \cdot o = \mu(ge^{tx/2} \cdot o, h \cdot o).$$

Derivando en $t = 0$ tenemos

$$(\Sigma_{v/2} \circ Z)(h \cdot o) = \mu_{*(g \cdot o, h \cdot o)}(v/2, 0) = q_{*g\sigma(g)^{-1}\sigma(h)}(gx\sigma(g)^{-1}\sigma(h)).$$

Ahora escribimos $h_s = ge^{sy}$ con $y \in \mathfrak{m}$, sea entonces $w = q_{*g}(gy) \in T_{g\cdot o}M$. Notemos que $\sigma(h_s) = \sigma(g)e^{-sy}$; recordando la fórmula de Γ dada en (7.5.9) y usando las relaciones de la acción (3.13), obtenemos

$$(\Sigma_{v/2} \circ Z)(ge^{sy} \cdot o) = (\ell_{ge^{-sy}g^{-1}})_{*g\cdot o} q_{*g}(ge^{s\,ad_y} x).$$

Derivando en $s = 0$ tenemos

$$-\Gamma_{g\cdot o}(v, w) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (\ell_{e^{-s\,Ad_{gy}}})_{*g\cdot o} q_{*g}(gx) + q_{*g}(g[y, x]).$$

Pero como $x, y \in \mathfrak{m}$ entonces $[y, x] \in \mathfrak{k} = \ker q_{*1}$ así $g[y, x] \in \ker q_{*g}$. Obtenemos entonces la fórmula para el spray del espacio simétrico, en términos de las operaciones del grupo de Lie:

$$\begin{aligned} -\Gamma_{g\cdot o}(v, w) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (\ell_{e^{s\,Ad_{gy}}})_{*g\cdot o}(v) \\ &= (\ell_g)_{*o} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (\ell_{e^{-sy}})_{*o}(q_{*1}x) \\ &= \frac{d^2}{ds\,dt}\Big|_{s=t=0} q(ge^{-sy}e^{tx}), \end{aligned} \tag{7.15}$$

provided $v = q_{*g}(gx)$, $w = q_{*g}(gy)$.

Teorema 7.5.23 (Geodésicas, transporte paralelo y campos de Killing)**.** *Sea* $M = G/K$ *conexa con* (G, σ) *grupo involutivo y* $K \subset G^\sigma$ *abierto. Sea* (M, F) *el spray dado por la estructura simétrica* μ *de la observación anterior. Entonces*

1. *Si* $x \in \mathfrak{m}$ *entonces* $\rho_t(q) = e^{tx} \cdot q$ *es el flujo del único campo de Killing* $X \in \mathfrak{m}_o$ *con* $X(o) = q_{*1}x$.

2. *Dado* $p = g \cdot o \in M$ *y* $v = q_{*1}x \in T_oM$ *con* $x \in \mathfrak{m}$. *La única geodésica* γ *de* (M, F) *con* $\gamma_0 = p, \gamma_0' = (\ell_g)_{*1}v = q_{*g}x$ *está dada por* $\gamma(t) = ge^{tx} \cdot o$.

3. *Las traslaciones* τ_t *a lo largo de* γ *están dadas por*

$$\tau_t(p) = ge^{tx}g^{-1} \cdot p.$$

4. *El transporte paralelo a lo largo de* γ *está dado por*

$$P_0^t(\gamma)w = (D\tau_t)_{\gamma_0} w = (\ell_{e^{t\,Ad_g x}})_{*g\cdot o} w.$$

Demostración. Suopngamos primero que $g = 1$ luego $p = o$, $v = q_{*1}x$ con $x \in \mathfrak{m}$, sea γ dicha geodésica y τ_t la traslación a lo largo de ella, notemos que de la definición es inmediato que $\gamma(t) = \tau_t(o)$. Por el Teorema 7.5.8, tenemos que $\tau_t(p)$ es el flujo del campo de Killing $X = X_v$ dado por $X(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\tau_t(p)$, que verifica

$$X_o = \frac{d}{dt}|_{t=0}\gamma_t = v = q_{*1}x = v.$$

Además $(D\tau_t)_o w = P_0^t(\gamma)w = \eta_w(t)$ para todo $w \in T_oM$ por el mismo teorema, luego derivando en $t = 0$ obtenemos

$$DX_o w = \dot{\eta}_w(0) = \Gamma_o(\gamma_0', \eta_w(0)) = \Gamma_o(v, w),$$

esto es $DX_o = \Gamma_o(v, \cdot)$ (en otro términos, $X \in \mathfrak{m}_o$ según vimos en dicho teorema). Ahora consideramos $\rho_t(p) = e^{tx} \cdot p$ que es un grupo a un parámetro, luego es el flujo de un campo vectorial $Y(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\rho_t(p)$. Se verifica fácilmente que ρ_t es un automorfismo de μ para todo t, esto es $\mu(\rho_t(p), \rho_t(q)) = \rho_t\mu(p, q)$. Pero entonces y por el mismo teorema recién citado, $\rho_t \in \mathrm{Aut}(M, F)$ y esto nos dice que Y también es un campo de Killing en M. Es claro que

$$Y_o = \frac{d}{dt}|_{t=0}\rho_t(o) = \frac{d}{dt}|_{t=0}q(e^{tx}) = q_{*1}x = v.$$

Por otro lado, si $w = q_{*1}y$ con $y \in \mathfrak{m}$, notamos que $\sigma(e^{tx}) = e^{t\sigma_{*x}} = e^{-tx}$ (y lo mismo con y). Podemos entonces escribir

$$\rho_s(e^{ty} \cdot o) = e^{sx}e^{ty} \cdot o = \mu(e^{sx/2} \cdot o, e^{-ty} \cdot o) = \mu(q(e^{sx/2}), q(e^{-ty})).$$

Derivando respecto de s en $s = 0$ obtenemos

$$Y(q(e^{ty})) = Y(e^{ty} \cdot o) = \mu_{*(o,q(e^{-ty}))}(q_{*1}(x)/2, 0) = \Sigma_{V/2} \circ Z(q(e^{-ty}))$$

donde $V = (o, v) \in TM$. Luego derivando con respecto a t en $t = 0$ obtenemos

$$DY_0 w = DY_o q_{*1}y = (\Sigma_{V/2} \circ Z)_{*o}q_{*1}(-y) = -(\Sigma_{V/2} \circ Z)_{*o}w = \Gamma_o(v, w)$$

donde la última igualdad es debida al Lema 7.5.9. Pero entonces X, Y son campos de Killing en X que coinciden a primer orden en el punto o, y deben ser idénticos por el Lema 7.3.12. Esto nos dice que tienen exactamente el mismo flujo y en particular

$$\gamma(t) = \tau_t(o) = \rho_t(o) = e^{tx} \cdot o.$$

Por la Observación 7.5.21, $\ell_g \in \mathrm{Aut}(M, \mu) = \mathrm{Aut}(M, F)$ para todo $g \in G$, luego la afirmación para la geodésica genérica se sigue aplicando este automorfismo a la geodésica obtenida por o. Los items segundo y tercero del teorema son consecuencias inmediatas del primero, y del Teorema 7.5.8. □

Proposición 7.5.24 (Curvatura). *Dados* $x, y, z \in \mathfrak{m}$, *si* $X = q_{*g}(gx) \in T_{g\cdot o}M$ *etc, la curvatura en* $p = g \cdot o \in M$ *tiene la expresión*

$$R_p(X,Y)Z = -q_{*g}(g[[x,y],z]) = -(\ell_g)_{*o}q_{*1}([[x,y],z]).$$

Demostración. Supongamos primero que $p = o$, luego $X = q_{*1}x \in T_oM$, etc; sean $\rho_t(q) = e^{tx} \cdot q$, $\bar{\rho}_s(q) = e^{sy} \cdot q$, $\bar{\bar{\rho}}_l(q) = e^{lz} \cdot q$. Por el teorerma anterior estos son los flujos de los respectivos campos de Killing $U, V, W \in \mathfrak{m}_o$ tales que $U(o) = X, V(o) = Y, W(o) = Z$. Consideramos

$$f(s,t,l) = \bar{\bar{\rho}}_{-l}\rho_{-t}\bar{\rho}_s\rho_t\bar{\bar{\rho}}_l(o).$$

Derivamos en $s = 0$ para obtener

$$f'(0,t,l) = D\bar{\bar{\rho}}_{-l}D\rho_{-t}V(\rho_t\bar{\bar{\rho}}_l(o)) = \bar{\bar{\rho}}_l^*\rho_t^*V(o)$$

pues $\bar{\rho}_0' = V$. Derivamos ahora respecto de t en $t = 0$ y mediante el Lema 7.3.8 obtenemos

$$\dot{f}'(0,0,l) = \bar{\bar{\rho}}_l^*[U,V](o)$$

pues $\rho_0' = U$. Derivando en $l = 0$ entonces obtenemos

$$\frac{d^3f}{dl\,dt\,ds}f\Big|_{(0,0,0)} = [W,[U,V]](o) = R_o(X,Y)Z$$

por la Observación 7.5.11. Ahora bien, explícitamente

$$f(s,t,l) = q(\exp(se^{-l\mathrm{ad}z}e^{-t\mathrm{ad}x}y)),$$

luego derivando en $s = 0$ obtenemos $q_{*1}(e^{-l\mathrm{ad}z}e^{-t\mathrm{ad}x}y)$. Derivando entonces en $t = 0$ y en $l = 0$ obtenemos

$$R_o(X,Y)Z = q_{*1}(-\mathrm{ad}z \circ -\mathrm{ad}x(y)) = q_{*1}([z,[x,y]]) = -q_{*1}([[x,y],z]).$$

Ahora supongamos que $p = g \cdot o = e^c \cdot o$ con $c \in \mathfrak{m}$, y dados $X, Y, Z \in T_pM$ son de la forma $X = q_{*g}(gx) = (\ell_g)_{*o}q_{*1}x$ para $x \in \mathfrak{m}$, etc. Por lo recién probado, el teorema anterior y la propiedad de invariancia de la curvatura por el transporte paralelo (Teorema 7.5.12), si $\gamma(t) = e^{tc} \cdot o$ que conecta o con p, tenemos

$$\begin{aligned} -q_{*g}(g[[x,y],z]) &= -(\ell_g)_{*o}q_{*1}([[x,y],z]) = (\ell_{e^c})_{*o}R_o(q_{*1}x, q_{*1}y)q_{*1}z \\ &= R_p((\ell_{e^c})_{*o}q_{*1}x, (\ell_{e^c})_{*o}q_{*1}y, (\ell_{e^c})_{*o}q_{*1}z) \\ &= R_p(X,Y)Z. \end{aligned}$$

Por último, como M es conexa existen $c_1, \ldots, c_k \in \mathfrak{m}$ tales que $p = g_1 \ldots g_k \cdot o = e^{c_1} \ldots e^{c_k} \cdot o$, y repitiendo el razonamiento anterior tenemos la conclusión. □

Definición 7.5.25 (Espacios simétricos euclideos)**.** Un espacio simétrico es *euclideo* si $\mathfrak{m}$ es abeliana. Notamos que entonces la variedad M es plana, es decir tiene curvatura nula. Luego localmente hay un isomorfismo afín entre M y su espacio tangente via la exponencial; si M es simplemente conexa, M es afinmente difeomorfa a su espacio tangente en cualquier punto (Teorema 7.4.8 y observación siguiente).

Definición 7.5.26 (Espacios simétricos irreducibles)**.** Decimos que M es irreducible si $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{k}$ es irreducible como par de Cartan: esto es, $\mathfrak{g}$ es semisimple y además $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] = \mathfrak{k}$. Todo espacio simétrico simplemente conexo y de dimensión finita (riemanniano) puede descomponerse de manera única (salvo el orden de los factores) en producto de espacios simétricos irreducibles, mediante la descomposición de de Rham (ver [83, Chapter III.6]).

En el caso no riemanniano, no hay un teorema de descomposición en factores irreducibles (espacios simétricos irreducibles), pero puede probarse que un espacio irreducible es euclideo o bien $\mathfrak{g}$ es semisimple, y M. Berger obtuvo una clasifcación completa de estos en [18]. Veremos en el capítulo de geometría riemanniana que los espacios simétricos que no son euclideos se clasifican en dos grandes grupos, los compactos y los no compactos, esencialmente separados por curvatura seccional no negativa y no positiva respectivamente.

Definición 7.5.27 (Rango de un espacio simétrico)**.** Sea $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ una subálgebra abeliana maximal. La dimensión de una tal subálgebra es el *r*ango del espacio simétrico $M = G/K$. Notemos que exponenciando $\mathfrak{a}$ y pasándola al cociente obtenemos una subvariedad de curvatura nula en M por la proposición previa. Una tal subvariedad es un *toro maximal* en M. Cuando el rango es 1, los únicos toros maximales son las geodésicas, que están generadas por grupos a un parámetro.

Observación 7.5.28 (Rango del espacio simétrico y rango del álgebra del Lie). Si el espacio simétrico es irreducible, y si $\mathfrak{g}$ es un álgebra compleja, hay relaciones entre las subálgebras abelianas maximales de $\mathfrak{m}$ y las subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. En ese contexto y para álgebras de dimensión finita, todas las subálgebras de Cartan son conjugadas por un automorfismo adjunto, $\mathfrak{a}' = \mathrm{Ad}_g \mathfrak{a}$ para algún $g \in K_0$ (la componente conexa de la identidad de K), y $\mathfrak{m} = \cup_{g \in K_0} \mathrm{Ad}_g \mathfrak{a}$ para una subálgebra de Cartan dada. Luego puede verse que todos los toros maximales son conjugados en M, y la dimensión de una subálgebra de Cartan está relacionada entonces con rango del espacio simétrico $M = G/K$. Por ejemplo, si el álgebra $\mathfrak{g}$ es compacta, entonces un álgebra de Cartan es lo mismo que un álgebra abeliana maximal en $\mathfrak{g}$.

Considerando sólo álgebras simples $\mathfrak{g}$, podemos primero clasificarlas en compactas o no compactas, de acuerdo a si la forma de Killing es definida positiva o negativa. Se dice entonces que el espacio simétrico $M = G/K$ es compacto o no-compacto de

acuerdo a esta clasificación de su álgebra de Lie (veremos luego que esto se corresponde con tener curvatura seccional positiva o negativa).

7.5.2.1. De espacios simétricos a espacios de Cartan

Dado un espacio simétrico conexo (M, μ), podemos considerar el grupo $G = \mathrm{Aut}(M, \mu)$ con la topología dada por los abiertos

$$C(K, U) = \{f \in G : f(K) \subset U\}$$

para U abierto en M y K cerrado en el dominio de una carta (V, φ) tal que $\varphi(V) \subset E$ es un conjunto acotado (si M tiene dimensión finita K es compacto y esta es la topología compacto abierta en G). Fijado un punto $o \in M$ tenemos el morfismo $\sigma : G \to G$ dado por

$$\sigma(g) = S_o \circ g \circ S_o, \tag{7.16}$$

que resulta automorfismo involutivo de G. Tenemos la acción $A : G \times M \to M$ dada por la evaluación $A(f, p) = f(p)$ y fijando $o \in M$ tenemos el mapa cociente $q : G \to M$ dado por $f \mapsto f(o)$ que es sobreyectivo. Luego $M \simeq G/K$.

Si $g \in \ker q = K$ entonces $\sigma(g)(o) = S_o(gS_o(o)) = S_o(g(o)) = S_o(o) = o$, y además como

$$\sigma(g)(h) = S_o \circ g \circ S_o(h),$$

derivando en $h = o$ obtenemos $\sigma(g)_{*o} = (S_o)_{*o} g_{*o} (S_o)_{*o} = g_{*o}$. Luego $\sigma(g) = g$ por el Lema 7.3.11, esto es $g \in K^\sigma$. Hemos probado que $K \subset G^\sigma$, el subgrupo de puntos fijos de σ. Por otra parte si $g \in K$ y $f \in G^\sigma$ está cerca de g en la topología compacto abierta, entonces $f(o)$ está cerca de $g(o) = o$ pues la evaluación es continua. Entonces de $\sigma(f) = f$ evaluando en o obtenemos $S_o(f(o)) = f(o)$ y como los puntos fijos de S_o son aislados (axioma S4), resulta $f(o) = o$, esto es $f \in K$. Esto nos dice que en realidad, $K \subset G^\sigma$ es abierto (y cerrado).

Supongamos que G es localmente compacto con esta topología, y actúa en M variedad diferenciable. Entonces un teorema de Montgormery y Zippin [67, pag. 208] nos dice que G es un grupo de Lie y que la acción $A : G \times M \to M$ es suave.

Proposición 7.5.29. *Sea (M, μ) espacio simétrico conexo. Supongamos que $G = \mathrm{Aut}_0(M, \nabla)$ tiene estructrura de grupo de Lie que hace de la acción $(g, p) = g(p)$ un mapa suave, sea σ definido como en (7.16). Entonces*

1. $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Kill}(M, \nabla)$.
2. K^σ *es subgrupo de Lie embebido con álgebra de Lie*

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathrm{Kill}(M, \nabla) : S_o^* X = X\} = \{X \in \mathrm{Kill}(M, \nabla) : X_o = 0\}.$$

3. *Si* $K = \ker q = \{g \in G : g(o) = o\}$ *entonces* $K \subset K^\sigma$ *es subgrupo de Lie abierto y* $M \simeq G/K$ *como espacios simétricos.*

Demostración. La estructura de grupo de Lie está determinada por la estructura de la componente conexa de la identidad de G. Y usando el mapa exponenial de G es sencillo ver que

$$\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{T}_1 G = \{v = \rho_o' : \ \rho : I \to G \text{ grupo a un parámetro suave }\}.$$

Si $\rho : I \to \mathrm{Aut}_o(M, \nabla)$ es un grupo a un parámetro de automorfismos, entonces ρ_0' es un campo vectorial en M, y además el Teorema 7.3.9 nos dice que es un campo de Killing. Recíprocamente, todo campo de Killing induce un grupo a un parámetro en G que es su flujo. En síntesis si $\mathrm{Aut}(M, \nabla)$ tiene estructura suave, entonces $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Kill}(M, \nabla)$. Observemos también que como la acción es suave el automorfismo σ definido más arriba resulta suave. Con la misma demostración que en la Proposición 7.5.20, $G^\sigma \subset G$ es subgrupo de Lie embebido, como ya observamos que $K \subset G^\sigma$ es abierto y cerrado, también K es grupo de Lie embebido, con la misma álgebra de Lie. Derivando $\sigma(\rho_t)(h) = \rho_t(h)$ en $t = 0$ obtenemos que el álgebra de Lie de G^σ es

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathrm{Kill}(M, \nabla) : (S_o)_{*S_o(p)} X_{S_o(p)} = X_p \forall p \in M\}.$$

Es claro que si $X \in \mathfrak{k}$ entonces evaluando en $p = o$ debe ser $X_o = 0$, pero por otro lado, derivando $q(\rho_t) = \rho_t \cdot o = o$ en $t = 0$ obtenemos $\mathfrak{k} \subset \{X : X_o = 0\} = \mathrm{Lie}(K)$; como K es abierto en G^σ estas álgebras de Lie deben coincidir. En estas condiciones, el Teorema 7.5.8 nos dice que la descomposición $\mathrm{Kill}(M) = \mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{m}_o$ es la descomposición de Cartan del álgebra de Lie del grupo de automorfismos, y entonces M es un espacio simétrico de Cartan por la acción del par $(\mathrm{Aut}_0(M, \nabla), \sigma)$ donde σ está dada por (7.16). Claramente $M \simeq G/K$ porque la acción es transitiva ya que M es conexa. Resta ver que las estructuras simétricas coinciden en M. Para verlo, usamos la definición de la Observación 7.5.21, y como $g \in \mathrm{Aut}(M, \mu)$ calculamos

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(g(o), h(o)) &= \tilde{\mu}(g \cdot o, h \cdot o) = g\sigma(g)^{-1}\sigma(h) \cdot o \\ &= gS_o g^{-1} S_o S_o h S_o(o) = gS_o g^{-1} h(o) \\ &= g\mu(o, g^{-1}h(o)) = \mu(g(o), h(o)). \end{aligned}$$ □

§ Si suponemos además que S_o tiene sólo a o como punto fijo, y $g \in G^\sigma$ entonces $S_o \circ g(h) = g \circ S_o(h)$ y evaluando en $h = o$ obtenemos $S_o(g(o)) = g(o)$ y aquí debe ser $g(o) = o$, esto es $g \in K$. Luego en este caso especial

$$K = \{f \in G : f(o) = o\} = \ker q = \{f \in G : \sigma(f) = f\} = G^\sigma.$$

7.6. Ejemplos de conexiones en variedades

En esta sección estudiamos algunos ejemplos relevantes de grupos y espacios homogéneos de grupos lineales. En cada uno de ellos introducimos un spray y calculamos todos los invariantes vinculados. Veremos que todos ellos son en realidad, ejemplos de espacios simétricos.

7.6.1. Espacios lineales

Si $M = E$ es un espacio de Banach, entonces $TTE = E^4$ y podemos poner el spray trivial $F = 0$ (es decir, en la notación de la Observación 6.1.4, estamos eligiendo $f_2 = 0$). Como mencionamos antes, fijados $v \in E = M$, $z \in T_vE = E$, tenemos una única solución al problema $\alpha''(t) = 0$, $\alpha(0) = v$, $\dot\alpha(0) = z$, que es el segmento

$$\alpha(t) = v + tz.$$

Observemos que está definido en todo $\mathbb{R}$. La derivada covariante es simplemente $\nabla_X Y = Y'X$. La conexión asociada es la conexión nula, y el transporte paralelo a lo largo de una curva $\alpha \subset E$ se obtiene de la ecuación (6.3), $\dot\mu = 0$ de donde se desprende que para $v \in T_{\alpha(a)}E = E$, se tiene $P_a^b(\alpha)v = v$. Es decir que Pv se obtiene de v moviéndolo en forma *paralela* a su estado inicial a lo largo de la curva α. Para algunos, esto explica el nombre. Los formas de curvatura $\mathfrak{R}$, R son idénticamente nulas.

7.6.2. La esfera de un espacio de Hilbert

Si $M = S$, con $S = \{x \in \mathcal{H} : \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 1\}$, la esfera unitaria de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, podemos tomar, para $p \in S$, $v \in T_pS = span(p)^\perp$ el spray

$$F_p(v) = F(p, v) = -\|v\|^2 p.$$

Esta es una forma cuadrática que proviene de la forma bilineal simétrica

$$\Gamma_p(v, w) = -Re\langle v, w\rangle p.$$

Afirmamos que este spray es el que se obtiene al derivar y proyectar (Teorema 6.6.1) usando los suplementos naturales de T_pS dados por el producto interno de $\mathcal{H}$, es decir la descomposición

$$\mathcal{H} = T_pS \oplus span(p),$$

donde nos quedamos con la estructura de espacio con producto interno *real* de $\mathcal{H}$.

Para verlo, notemos que para $p \in S$, $E_p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dado por $E_p(w) = w - Re\langle w, p\rangle p$ es el proyector ortogonal sobre T_pS. Tomando $p_t \in S$ y derivando en $t = 0$ obtenemos

$$\Gamma_p(v, w) = E_{*p,v}w = -Re\langle w, v\rangle p - Re\langle w, p\rangle v \tag{7.17}$$

que para $v = w \in T_pS = span(p)^\perp$ coincide con el spray que introdujimos. Las soluciones son las geodésicas usuales de la esfera, es decir, círculos máximos. Con mayor precisión, sea $p \in S$ y tomemos cualquier $q \in S$ tal que $q \perp p$. Para $k \in \mathbb{R}$, consideremos

$$\gamma(t) = \cos(kt)p + \operatorname{sen}(kt)q, \tag{7.18}$$

que es una curva suave en S con $\gamma(0) = p$. Entonces

$$\dot\gamma(t) = [-\operatorname{sen}(kt)p + \cos(kt)q]k,$$

con lo cual $\|\dot\gamma(t)\| = cte = |k|$, y por otra parte

$$\ddot\gamma(t) = [\cos(kt)p + \operatorname{sen}(kt)q](-k^2) = -k^2\gamma(t),$$

con lo cual γ verifica $F_\gamma(\dot\gamma) = \ddot\gamma$. Si $v \in T_pS = span(p)^\perp$, poniendo $q = v/\|v\|$ y $k = \|v\|$, la exponencial de la variedad $\exp_p : T_pS \to S$ está dada entonces por $\gamma(1)$, es decir

$$\exp_p(v) = \cos(k)p + \frac{\operatorname{sen}(k)}{k}v$$

La derivada covariante de este spray es

$$\nabla_X Y(p) = Y'X(p) + \langle X_p, Y_p\rangle p,$$

es decir en curvas $\beta \in Lev(\alpha)$,

$$D_{\alpha'}\beta = \dot\beta + \langle\beta, \dot\alpha\rangle\alpha.$$

La conexión afín asociada está dada por la forma bilineal Γ, y su rango es $span(p)$ que en efecto es un suplemento para T_pS. El transporte paralelo a lo largo de $\alpha \subset S$ se construye con la ecuación

$$\dot\mu = -\langle\dot\alpha, \mu\rangle\alpha, \qquad \mu(0) = v \in T_{\alpha(0)}S. \tag{7.19}$$

En general no es fácil dar una expresión explícita del transporte paralelo. Sin embargo, si $\gamma \subset S$ es una geodésica, dada por (7.18), entonces hay una manera geométrica de presentarlo: el transporte a lo largo de γ está dado por una rotación del plano $\Pi = span(p, q)$ que fija el resto del espacio. Veamos los detalles: descomponemos el espacio de Hilbert como

$$\mathcal{H} = span(p) \oplus span(q) \oplus (span(p) \oplus span(q))^\perp. \tag{7.20}$$

Para $v, w \in \mathcal{H}$, denotamos $v \otimes w \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ al *tensor elemental* dado por

$$v \otimes w(z) = Re\langle w, z\rangle v$$

para $z \in \mathcal{H}$, que resulta un operador de rango uno. Observemos que

$$(v \otimes w)(w \otimes z) = \|w\|^2 v \otimes z$$

para todo $v, w, z \in \mathcal{H}$. Sea $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ el proyector al subespacio $(span(p) \oplus span(q))^\perp$. Entonces $P = (p \otimes p + q \otimes q)^\perp$ y

$$p \otimes p + q \otimes q + P = 1,$$

con cada proyector $P, p\otimes p, q\otimes q$ disjunto respecto del otro (es decir que los productos son nulos). Sea

$$U_t = \cos(kt)(p \otimes p + q \otimes q) + \operatorname{sen}(kt)(q \otimes p - p \otimes q) + P.$$

Entonces es fácil ver que $U_t \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$, de hecho, en la representación matricial correspondiente a la descomposición (7.20), se escribe así:

$$U_t = \begin{pmatrix} \cos(kt) & -\operatorname{sen}(kt) & 0 \\ \operatorname{sen}(kt) & \cos(kt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y es en efecto una rotación del plano $\Pi = span(p, q)$ que fija el ortogonal. Si $v \in T_pS = T_{\gamma(0)}S$, entonces

$$P_0^t(\gamma)v = U_t v = Re\langle v, q\rangle(-\operatorname{sen}(kt)p + \cos(kt)q) + Pv$$

verifica la ecuación diferencial (7.19).

De acuerdo a la ecuación del proyector (7.17) y la ecuación general de la curvatura para subvariedades (7.2), obtenemos

$$R_p(x, y)z = Re\langle y, z\rangle x - Re\langle x, z\rangle y.$$

para $p \in S$, $x, y, z \in T_pS = span(p)^\perp$.

Para simplificar las cuentas, supongamos que la geodésica α está parametrizada por longitud de arco. Entonces es fácil ver que el único campo de Jacobi $\eta = \eta_{v,w}$ a lo largo de α y tal que

$$\eta(0) = v, \qquad D'_\alpha\eta(0) = \dot\eta(0) + \langle\dot\alpha(0), \eta(0)\rangle p = w$$

con $v, w \in T_pS$, está dado por

$$\eta(t) = v\cos(t) + (w - Re\langle v, q\rangle p)\operatorname{sen}(t).$$

7.6.2.1. La esfera como espacio simétrico

Es claro que podemos presentar a la esfera como el cociente del grupo unitario $\mathcal{U}$ del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, por la acción $U \cdot p = U(p)$ sobre un punto dado de la esfera (que podemos suponer que es el polo norte en dimensión finita).

Como espacio simétrico es de tipo compacto ya que el grupo unitario tiene (en dimensión finita) como álgebra de Lie u_n, que es compacta porque su forma de Killing es semidefinida negativa.

El grupo de isotropía K de la acción son los operadore que fijan p, que se represanta como matrices unitarias por bloques como

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

donde u es unitaria y actúa en $\mathcal{H}' = \{p\}^{\perp}$ (con la precaución de que el ortogonal es respecto de la estructura de espacio con producto interno *real*).

Para esta descomposición en bloques, consideramos la involución

$$\sigma : \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u & -v \\ -w & z \end{pmatrix},$$

donde v, w son vectores fila/columna, mientras que $z \in C$. Puede el lector verificar que se trata de un morfismo de grupos $\sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. El subgrupo de puntos fijos de σ es exactamente K, y así la esfera se identifica con el cociente $S \simeq \mathcal{U}/K$, mediante la biyección

$$j : UK \mapsto U(p).$$

La estructura de espacio simétrico está dada por la fórmula de la Observación 7.5.21,

$$\mu(UK, WK) = U\sigma(U)^* \sigma(W) \cdot K,$$

y podemos definir una estructura de espacio simétrico en la esfera S de manera natural, haciendo que sea compatible con el mapa j:

$$j \circ \mu(UK, WK) = j(UK) \cdot j(WK).$$

Puede el lector verificar que esta estructura en la esfera es la dada por

$$\mu(p, q) = S_p(q) = -q + 2Re\langle q, p\rangle p,$$

que corresponde en las coordendas dadas por la descomposición $\mathcal{H}' \oplus \{p\}$ a la simetría

$$(v, z) \mapsto (-v, z),$$

y dicha simetría invierte el sentido de los arcos máximos (geodésicas) que pasan por p.

En la descomposición por bloques del álgebra de Lie de $\mathcal{U}$, el espacio modelo de la esfera es

$$T_pS \simeq \mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v \\ -\bar{v}^t & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ya que el álgebra de Lie son los operadores anti-hermitianos. Ahora bien, si $x, y \in \mathfrak{m}$ son matrices identificadas con los vectores v, w respectivamente, puede el lector verificar muy fácilmente que $[x, y] = 0$ si y solo si

$$\begin{pmatrix} | \\ w \\ | \end{pmatrix} \cdot (-\bar{v}^t -) = \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix} \cdot (-\bar{w}^t -) \,. \tag{7.21}$$

Un argumento usando inducción muestra que esto sólo es posible si $v = \lambda w$, y así $x = \lambda y$. Entonces el rango de la esfera como espacio simétrico es 1, porque un álgebra maximal abeliana en $\mathfrak{m}$ tiene dimensión 1 (Definición 7.5.27).

7.6.3. El grupo de inversibles de un álgebra de Banach

Si $\mathcal{B}$ es un álgebra de Banach (real o compleja), y $G = G_{\mathcal{B}}$ es el grupo de elementos inversibles de $\mathcal{B}$, con su estructura de variedad como abierto en $\mathcal{B}$, podemos considerar el *spray canónico*

$$F(gv) = gv^2$$

para $g \in G_{\mathcal{B}}$, $v \in \mathcal{B}$, $gv \in T_gG$. Las geodésicas del spray son los grupos a un parámetro

$$\gamma(t) = ge^{tv}.$$

Si llamamos $w = gv \in T_gG$, entonces $v = g^{-1}w$ y este spray se describe como

$$F_g(w) = wg^{-1}w.$$

Observemos que engañosa que es la notación en coordenadas. Si elegimos la carta local alrededor de $g \in G$ dada por $\phi(h) = \exp^{-1}(g^{-1}h)$ -definida en un entorno conveniente de g-, entonces $\phi \circ \gamma(t) = tv$. Luego en coordenadas $\gamma'(t) = (tv, v)$ y con esto $\gamma''(t) = (tv, v; v, 0)$. Con lo cual el spray canónico en estas coordenadas es

$$F(x, v) = (x, v; v, 0).$$

Observación 7.6.1 (Grupos de Lie como espacios simétricos). Todo grupo de Lie tiene una estructura de espacio simétrico canónica dada por $\mu(g, h) = gh^{-1}g$. Si consideremos $H = G \times G$ con el automorfismo involutivo del flip $\sigma(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$, obtenemos un grupo simétrico (H, σ) cuyo subgrupo de puntos fijos es la diagonal $K = H^\sigma = \nabla G = \{(g, g) : g \in G\}$. Dejamos como ejercicio para el lector (Problema 7.11) probar que H/K se identifica naturalmente con G, y que la estructura simétrica

obtenida en el cociente coincide con el μ recién dado. También dejamos como ejercicio para el lector probar que el spray de esta estructura simétrica (Teorema 7.5.6) es el spray canónico mencionado más arriba.

La conexión afín está dada por

$$\Gamma_g(v,w) = \tfrac{1}{2}(vg^{-1}w + wg^{-1}v)$$

para $g \in G$, $v,w \in T_gG = g\mathcal{B}$. En particular

$$\Gamma_1(v,w) = \tfrac{1}{2}(vw + wv).$$

La derivada covariante del spray está dada por

$$\nabla_X Y(g) = Y'X(g) - \tfrac{1}{2}(X_g g^{-1} Y_g + Y_g g^{-1} X_g). \tag{7.22}$$

Es fácil verificar que las geodésicas de esta conexión son las curvas dadas por traslaciones a izquierda de los grupos a un parámetro, $\alpha(t) = ge^{tv}$. Para una tal geodésica, si β es un campo a lo largo de ella, entonces se tiene

$$D_{\alpha'}\beta = \dot{\beta} - \tfrac{1}{2}[\beta v + gvg^{-1}\beta].$$

Teniendo en cuenta la Observación 7.6.1, la simetría geodésica está dada por $S_g(h) = \mu(g,h) = gh^{-1}g$ y es claro que

$$S_g(\alpha(t)) = g\alpha(t)^{-1}g = ge^{-tv}g^{-1}g = ge^{-tv} = \alpha(-t).$$

Si X,Y son los campos invariantes a izquierda $X(g) = gv$, $Y(g) = gw$ para $g \in G$, $v,w \in \mathfrak{g} = \mathcal{B}$, entonces derivando $Y(ge^{tv}) = ge^{tv}w$ en $t = 0$ obtenemos

$$Y'X(g) = Y_{*g}(X(g)) = Y_{*g}(gv) = gvw.$$

Luego

$$\nabla_X Y(g) = gvw - \tfrac{1}{2}(gvw + gwv) = \tfrac{1}{2}g[v,w] = \tfrac{1}{2}[X,Y](g).$$

El transporte paralelo a lo largo de $\alpha \subset G_{\mathcal{B}}$ está dado por la ecuación

$$\dot{\mu} = \tfrac{1}{2}[\mu\alpha^{-1}\dot{\alpha} + \dot{\alpha}\alpha^{-1}\mu],$$

y si $\alpha(t) = ge^{tv}$ es una geodésica del spray, entonces si R, L denotan los operadores multiplicar a derecha e izquierda respectivamente,

$$\dot{\mu} = \tfrac{1}{2}[\mu v + gvg^{-1}\mu] = \tfrac{1}{2}[R_v + L_{gvg^{-1}}]\mu = A\mu.$$

Luego $\mu(t) = e^{tA}\mu_0$, y como L, R conmutan entonces

$$\mu(t) = e^{R_{tv}/2}e^{L_{gtvg^{-1}}/2}\mu_0 = e^{gtvg^{-1}/2}\mu_0 e^{tv/2}.$$

Operando con gg^{-1} en μ_0, obtenemos

$$P_g^{ge^v}(\alpha)z = ge^{v/2}g^{-1}ze^{v/2} \in T_{ge^v}G \tag{7.23}$$

para $z \in T_gG = g\mathcal{B}$. En particular, para $g = 1$,

$$P_1^{e^v}(\alpha)z = e^{v/2}ze^{v/2} \in T_{e^v}G$$

para $z \in \mathfrak{g} = \mathcal{B}$.

Si $x, y, z \in T_gG$, entonces el tensor de curvatura se calcula directamente usando la forma bilineal Γ y su expresión local (7.1), obteniéndose

$$g^{-1}R_g(x, y, z) = -1/4[[g^{-1}x, g^{-1}y], g^{-1}z].$$

llamando $x = gx_0$, etc. para $x_0, y_0, z_0 \in \mathfrak{g} = \mathcal{B}$, se tiene

$$g^{-1}R_g(x, y, z) = -1/4[[x_0, y_0], z_0]. \tag{7.24}$$

Ahora tomemos la geodésica $\alpha(t) = ge^{g^{-1}tv} = \exp_g(tv)$. Dados $z, w \in T_gG$, tomamos $\beta(s) = ge^{sg^{-1}z} = \exp_g(sz)$ y consideramos el transporte paralelo

$$\xi(s) = P_0^s(\beta)(v + sw) = ge^{\frac{s}{2}g^{-1}z}g^{-1}(v + sw)e^{\frac{s}{2}g^{-1}z}.$$

De acuerdo a la construcción del Teorema 7.2.2, a partir de la variación de α dada por

$$\alpha_s(t) = \exp_{\beta(s)}(t\xi(s))$$

construimos el único campo de Jacobi η a lo largo de α tal que $\eta(0) = z$, $D_{\alpha'}\eta(0) = w$. Este es $\eta(t) = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\alpha_s(t)$, dado por

$$\eta(t) = ze^{tg^{-1}v} + tg\exp_{*tg^{-1}v}\left(g^{-1}w + 1/2[g^{-1}vg^{-1}z - g^{-1}zg^{-1}v]\right).$$

Si llamamos $V = g^{-1}v, W = g^{-1}w, Z = g^{-1}z$, se tiene

$$\begin{aligned} g^{-1}\eta(t) &= Ze^{tV} + t\exp_{*tV}(W + 1/2[V, Z]) \\ &= Ze^{tV} + t\exp_{*tV}(W) + 1/2\exp_{*tV}\operatorname{ad}tV(Z). \end{aligned} \tag{7.25}$$

Si recordamos la fórmula de la diferencial de la exponencial (Lema 3.1.14), como $F(\lambda)\lambda = 1 - e^{-\lambda}$, se simplifican los términos Ze^{tV}. Llamando $\mu = \alpha^{-1}\eta$ se obtiene la expresión

$$\mu(t) = 1/2[Z + e^{-tV}Ze^{tV}] + F(\operatorname{ad}tV)(tW).$$

7.6.4. El grupo de operadores unitarios

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*, consideremos $M = \mathcal{U}$ el grupo de Lie-Banach real de operadores unitarios en $\mathcal{A}$, cuya álgebra de Lie-Banach es el espacio de operadores antihermitianos $\mathcal{A}_{ah}$. Este puede pensarse como la superficie de nivel (del punto $(0,0) \in \mathcal{A}_h \times \mathcal{A}_h$) de la función $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_h \times \mathcal{A}_h$ dada por

$$g(v) = (v^*v - 1, vv^* - 1).$$

Entonces, para $u \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{A}$, $Dg_u(y) = 2(Re(u^*y), uRe(u^*y)u^*)$. Por supuesto que $T_u\mathcal{U} = uT_1\mathcal{U} = u\mathcal{A}_{ah}$, pero derivando nuevamente esta expresión obtenemos

$$D^2g_u(x,y) = 2(Re(x^*y), Re(xy^*)).$$

Comparando con la Observación 5.2.1, se deduce que, para $u \in \mathcal{U}$, $x, y \in T_u\mathcal{U}$, entonces

$$(u,x;y,w) \in TTM \Leftrightarrow Re(u^*w) = -Re(y^*x).$$

poniendo $x = ux_0$, $y = uy_0$ con $x_0, y_0 \in \mathcal{A}_{ah}$, debe ser $Re(u^*w) = Re(y_0x_0)$.

El *spray canónico* se reduce al subgrupo $\mathcal{U} \subset G_{\mathcal{A}}$, pues podemos poner, para $z \in T_u\mathcal{U} = u\mathcal{A}_{ah}$,

$$F_u(z) = -uz^*z = zu^*z = zu^{-1}z,$$

pues $z = uz_0$, con lo cual $F_u(uz_0) = uz_0^2$. Por supuesto que las geodésicas del spray canónico son los grupos a un parámetro $\gamma(t) = ue^{tv}$ con $v^* = -v$. La derivada covariante, el transporte paralelo y el tensor de curvatura tienen entonces en $\mathcal{U}$ la misma fórmula que en el ejemplo anterior del grupo de inversibles.

Observación 7.6.2 (El grupo unitario como espacio simétrico). Por la Observación 7.6.1, este es el spray de la estructura simétrica de $\mathcal{U}$ como grupo de Lie,

$$S_u(w) = \mu(u,w) = uw^*u.$$

La presentación como cociente es $\mathcal{U} = {}^{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}/_{\Delta}$, donde Δ es la copia de $\mathcal{U}$ dada por el subgrupo diagonal dentro de $G = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$. Entonces en dimensión finita $Lie(G) = \mathfrak{u}_n \times \mathfrak{u}_n$, que es un álgebra de Lie compacta (su forma de Killing es seminegativa) y por ese motivo $\mathcal{U}$ como espacio simétrico es de tipo compacto (Observación 7.5.28).

Como el espacio modelo es $\mathfrak{m} = \mathcal{A}_{ah}$, un álgebra maximal abeliana $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ es un conjunto de matrices antihermitianas que conmutan; luego se pueden diagonalizar simultáneamente y así se puede identificar a la subálgebra diagonal de matrices reales (o puramente imaginarias, para ser precisos). Esta tiene dimensión n en el caso que $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$, y así $U_n(\mathbb{C})$ tiene rango n como espacio simétrico.

Observemos que para cada $u \in \mathcal{U}$, $T_u\mathcal{U} = u\mathcal{A}_{ah}$ tiene un suplemento natural en $\mathcal{A}$ que es $u\mathcal{A}_h$. El único idempotente $E_u : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tal que

$$ran(E_u) = u\mathcal{A}_{ah} = T_u\mathcal{U}, \quad ker(E_u) = u\mathcal{A}_h$$

está dado por $E_u(w) = \frac{1}{2}u[u^*w - w^*u]$. Reemplazando u por $u(t) = ue^{tu^*v}$ y derivando en $t = 0$ obtenemos

$$E_{*u,v}w = -1/2[vw^*u + uw^*v].$$

Si $w = v = uz_0 \in T_u\mathcal{U}$, con $z_0^* = -z_0$, entonces $E_{*u,uz_0}uz_0 = uz_0^2$, y entonces el Teorema 6.6.1 nos dice que el spray canónico (que es el spray como espacio simétrico de $\mathcal{U}$) coincide con el spray dado por los suplementos naturales y sus proyectores.

7.6.5. Operadores positivos e inversibles

Sea $M = G_{\mathcal{A}}^+$, el espacio de elementos positivos invertibles de un álgebra C^*.

7.6.5.1. El spray trivial

Podemos tomar para $a \in G_{\mathcal{A}}^+$, $v \in \mathcal{A}_h = TG_{\mathcal{A}}^+$ el spray trivial $F = 0$. Como $G_{\mathcal{A}}^+ \subset \mathcal{A}_h$ es un abierto convexo, las geodésicas son los segmentos usuales

$$\gamma(t) = a + tv,$$

que en este caso *no están definidas para todo* $t \in \mathbb{R}$. En efecto, si $a \in G_{\mathcal{A}}^+$ y $v \in \mathcal{A}_h$ entonces $a + tv \in \mathcal{A}_h$, pero además como los elementos inversibles forman un abierto, $\gamma \subset G_{\mathcal{A}}^+$ para $t \in (-t_1, t_2)$, con $t_1, t_2 > 0$ suficientemente pequeños.

7.6.5.2. El spray canónico

También si $M = G_{\mathcal{A}}^+$, podemos tomar para $a \in G_{\mathcal{A}}^+$, $v \in \mathcal{A}_h = TG_{\mathcal{A}}^+$ el spray

$$F_a(v) = va^{-1}v.$$

La conexión afín está dada por

$$\Gamma_a(v, w) = 1/2(va^{-1}w + wa^{-1}v). \tag{7.26}$$

Sabemos que las geodésicas del spray son las curvas a un parámetro ae^{tz}, pero este tiene que ser un elemento positivo, y en general no es cierto que producto de positivos sea positivo. Sin embargo, reescribiendo adecuadamente los grupos a un parámetro descubrimos que no hay contradicción: sean $a, b \in G_{\mathcal{A}}^+$, entonces $a^{-1/2}ba^{-1/2} \in G_{\mathcal{A}}^+$, luego tiene un único logaritmo analítico autoadjunto,

$$v = \ln(a^{-1/2}ba^{-1/2}) \in \mathcal{A}_h.$$

Por otra parte, por el Lema A.2.2

$$\sigma(a^{-1}b) = \sigma(a^{-1/2}\,a^{-1/2}b) = \sigma(a^{-1/2}ba^{-1/2}) \subset (0,+\infty)$$

pues ambos son inversibles. Entonces $a^{-1}b$ tambien tiene un logaritmo analítico (con el mismo cálculo funcional), sólo que en este caso no resulta autoadjunto. Consideremos el grupo a un parámetro

$$\gamma_{a,b}(t) = ae^{t\ln(a^{-1}b)},$$

entonces $\gamma_{a,b}$ es una curva de inversibles que une a con b. Pero por otra parte,

$$\gamma_{a,b}(t) = a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}\exp[t\ln(a^{-1}b)]a^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\exp(tv)a^{\frac{1}{2}},$$

luego $\gamma_{a,b} \subset G_{\mathcal{A}}^+$ es la geodésica del spray que une a con b en $G_{\mathcal{A}}^+$. En particular:

- Las geodésicas que comienzan en $a = 1$ son los grupos a un parámetro $\gamma(t) = e^{tv}$ con $v \in \mathcal{A}_h$.
- Dados $a, b \in G_{\mathcal{A}}^+$ existe una única geodésica del spray que los une, que es la curva $\gamma_{a,b}$.
- La exponencial $\exp_a : \mathcal{A}_h \to G_{\mathcal{A}}^+$ está dada por

$$\exp_a(v) = a^{\frac{1}{2}}\exp(a^{-\frac{1}{2}}va^{-\frac{1}{2}})a^{\frac{1}{2}}.$$

La derivada covariante del spray está dada por la expresión (7.22), para $g = a \in G_{\mathcal{A}}^+$. El transporte paralelo a lo largo de $\gamma_{a,b}$ se calcula usando (7.23) y la reescritura de $b = ge^v$, obteniéndose

$$P_a^b(\gamma_{a,b})Z = a^{\frac{1}{2}}(a^{-\frac{1}{2}}ba^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}Za^{-\frac{1}{2}}(a^{-\frac{1}{2}}ba^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}},$$

para $Z^* = Z$; en particular

$$P_1^a(\gamma_{a,b})Z = a^{\frac{1}{2}}Za^{\frac{1}{2}}.$$

El tensor de curvatura se calcula usando la expresión en coordendas usando Γ (aunque también puede deducirse de la fórmula de la Proposición 7.5.24 ya que como observaremos debajo, esta conexión es la conexión de la Grassmanniana como espacio simétrico de Cartan). La fórmula es

$$R_a(x,y,z) = -\frac{1}{4}a^{1/2}[[x_0,y_0],z_0]a^{1/2},$$

donde $x_0 = a^{-1/2}xa^{-1/2}$ es el transporte paralelo de x a la identidad, y lo mismo cabe para y_0, z_0. Vemos que la curvatura es invariante por la acción del grupo de inversibles, esto es, invariante por transporte paralelo.

Los campos de Jacobi $\eta \in Lev(\gamma_{a,b})$ con una reescritura adecuada son los mismos que los del grupo lineal. Explícitamente, a partir de la ecuación (7.25), usando la expresión de la diferencial de la exponencial en el espacio de operadores positivos (Teorema 4.6.1) se tiene que el único campo de Jacobi a lo largo de $\gamma_{a,b}$ con $\eta(0) = v$, $D_t\eta(0) = w$ es

$$\gamma_{a,b}^{-\frac{1}{2}}\,\eta\,\gamma_{a,b}^{-\frac{1}{2}} = \cosh(\operatorname{ad} tV)Z + \frac{\operatorname{senh}(\operatorname{ad} tV/2)}{\operatorname{ad} tV/2}tW,$$

donde en este caso $Z = a^{-\frac{1}{2}}ba^{-\frac{1}{2}}$, $V = a^{-\frac{1}{2}}va^{-\frac{1}{2}}$, $W = a^{-\frac{1}{2}}wa^{-\frac{1}{2}}$.

7.6.5.3. Operadores positivos como espacio simetrico

Podemos presentar esta última conexión como la conexión de un espacio simétrico de Cartan (Sección 7.5.2).

Para ello consideramos $G = G_{\mathcal{A}}$ el grupo de inversibles del álgebra y el automorfismo involutivo $\sigma(g) = (g^*)^{-1}$. Vemos que el conjunto de puntos fijos de σ es el grupo unitario del álgebra

$$K = \mathcal{U}_{\mathcal{A}},$$

cuya álgebra de Lie son los operadores anti-hermitianos $\mathfrak{k} = \{X^* = -X : X \in \mathcal{A}\}$. Como $\sigma_{*1}(v) = -v$, vemos que en efecto es el subespacio de puntos fijos de la diferencial de σ en la identidad.

Por otro lado, el espacio que modela el cociente es el autoespacio de autovalor -1 de σ_{*1}, que no es otra cosa que

$$\mathfrak{m} = \{X^* = X : X \in \mathcal{A}\},$$

los operadores hermitianos en $\mathcal{A}$.

Con la acción concreta de $G_{\mathcal{A}}$ en los operadores positivos dada por $(g, a) \mapsto gag^*$, notamos este espacio es la órbita de $a = 1$ por la acción, y vemos que el cociente abstracto G/K se identifica naturalmente con el espacio de operadores positivos mediante el mapa

$$j : g\mathcal{U} \mapsto gg^*,$$

que es de hecho una biyección; notemos que se identifican $o = q(1) = \mathcal{U}$ en G/K, con $1 \in \mathcal{A}$ mediante este mapa.

El mapa de acción simétrica $\mu : G/K \to G/K$, de acuerdo a su definición (Observación 7.5.21), está dado por

$$\mu(g\mathcal{U}, h\mathcal{U}) = g\sigma(g)^{-1}\sigma(h)\mathcal{U} = gg^*(h^*)^{-1}\mathcal{U},$$

pero entonces podemos pasar este producto simétrico a $G_{\mathcal{A}}^+$ mediante

$$a \cdot b = ab^{-1}a.$$

Esta operación es la que hace de j una identifiación natural entre las estructuras de espacio simétrico del cociente abstracto y del espacio de operadores positivos, como en los ejemplos anteriores, y con un pequeño abuso de notación, podemos llamar $\mu(a,b) = a \cdot b = ab^{-1}a$.

Recordemos las fórmulas

$$\Sigma_V(W) = \mu_*(V,W) \qquad \Gamma(V,W) = -\frac{1}{2}(\Sigma_V \circ Z)_{*W}, \quad V,W \in TG^+_{\mathcal{A}} \simeq G^+_{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{A}_h$$

para el spray del espacio simétrico $(G^+_{\mathcal{A}}, \mu)$ (aquí Z era la sección nula del fibrado tangente, $Z(a) = (a,0)$). Entonces dados $V = (a,v)$, $W = (b,w)$ con $v,w \in \mathcal{A}_h$, calculamos

$$\Sigma_V(W) = vb^{-1}a + ab^{-1}v - ab^{-1}wb^{-1}a$$

derivando $a_t b_t^{-1} a_t$, con curvas tales que $(a_0, \dot{a}) = (a,v) = V$, y $(b_0, \dot{b}) = (b,w) = W$. Luego

$$\Sigma_V \circ Z(p) = vp^{-1}a + ap^{-1}v.$$

Si tomamos una curva p_t y derivamos, obtenemos

$$(\Sigma_V \circ Z)_*(p,\dot{p}) = -vp^{-1}\dot{p}p^{-1}a - ap^{-1}\dot{p}p^{-1}v.$$

En particular si $(p_0,\dot{p}) = (a,w) = W$ vemos que

$$\begin{aligned}\Gamma_a(v,w) = \Gamma(V,W) &= -\frac{1}{2}(\Sigma_V \circ Z)_{*W} \\ &= -\frac{1}{2}(\Sigma_V \circ Z)_*(a,w) = \frac{1}{2}\left\{va^{-1}wa^{-1}a + aa^{-1}wa^{-1}v\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{va^{-1}w + wa^{-1}v\right\},\end{aligned}$$

que no es otra cosa que la forma bilineal del spray canónico introducido en (7.26).

De aquí vemos que las expresiones para las geodésicas, el transporte paralelo y la curvatura las podriamos deducir directamente de las fórmulas que obtuvimos cuando estudiamos espacios homogéneos de Cartan. En particular las geodésicas son de la forma $ge^{tv} \cdot o$ con $v \in \mathfrak{m} = \mathcal{A}_h$. Aplicando el mapa j vemos que las geodésicas son en efecto de la forma $t \mapsto ge^{tv}e^{tv^*}g^* = ge^{2tv}g^*$, mientras que la simetría geodésica es

$$S_a(b) = \mu(a,b) = ab^{-1}b,$$

la cual transforma $\gamma_{a,b}(t)$ en $\gamma_{a,b}(-t)$.

Respecto del rango de $G^+_{\mathcal{A}}$ como espacio simétrico (Definición 7.5.27), una subálgebra de Lie conmutativa maximal

$$\mathfrak{a} \subset \mathcal{A}_h \simeq \mathfrak{m} = T_1 G^+_{\mathcal{A}}$$

es lo mismo que una subálgebra conmutativa maximal asociativa de $\mathcal{A}_h$, y todo conjunto de operadores hermitianos que conmuta se puede diagonalizar en una misma base. Entonces toda álgebra conmutativa maximal $\mathfrak{a}$ se asimila al álgebra diagonal de operadores (fijando una base).

En particular si $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ (cuya dimensión real es $2n \times 2n$), la dimensión de $\mathfrak{m}$ es la mitad de este número: $\dim(G^+_{\mathcal{A}}) = 2n^2$. Mientras que la dimensión real de las matrices diagonales reales en una base (el álgebra conmutativa maximal) es n: entonces el *rango* del espacio simétrico $GL^+_n(\mathbb{C})$ es n.

7.6.6. La Grassmanniana

Tomemos $M = Gr(p) \subset \mathcal{A}_h$, la Grassmanniana de un proyector $p \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, en una C^*-álgebra $\mathcal{A}$. Consideramos $g : \mathcal{A}_h \to \mathcal{A}_h$ dada por $g(q) = q^2 - q$, para pensar a $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ como superficie de nivel de $g = 0$. Tomando $\alpha(t) = p + tx$ con $p \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ y $x \in \mathcal{A}_h$, descubrimos que

$$Dg_p(x) = px + xp - x,$$

lo que nos dice que $T_p\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{x = xp + px : x^* = x\} = \mathcal{A}^C_h$. Tomando $\beta(t) = p + ty$ con $y^* = y$ descubrimos derivando en $t = 0$ la expresión $Dg_\beta(x)$, que

$$D^2g_p(x, y) = xy + yx.$$

Comparando con la Observación 5.2.1 en la Sección 5.2, si $w \in \mathcal{A}_h$ entonces

$$(p, x; y, w) \in T\mathcal{M} \Leftrightarrow x, y \in \mathcal{A}^C_h, \quad pw + wp - w = -(xy + yx).$$

Si escribimos $w = pwp + p^\perp wp^\perp + p^\perp wp + pwp^\perp$, tenemos $pw + wp - w = pwp - p^\perp wp^\perp$ y entonces

$$pwp = -p(xy + yx)p, \qquad p^\perp wp^\perp = p^\perp(xy + yx)p^\perp.$$

Observemos que $x \in \mathcal{A}^C_h$ es equivalente a $x = xp + px$, y entonces $x^2 = xpx + px^2p$ y también $x^2p = px^2 = px^2p$ con lo cual podemos considerar el spray

$$F_p(x) = -2\epsilon_p x^2 = -2px^2p + 2xpx = -2px^2p + 2p^\perp x^2p^\perp,$$

que corresponde a tomar $x = y$ en la construcción del w de arriba y suponer que w es p-diagonal. La forma bilineal asociada es

$$\Gamma_p(x, y) = -\epsilon_p[xy + yx]$$

para $x, y \in T_p\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^C_h$. Observemos que este es el spray natural proveniente del suplemento que tiene $\mathcal{A}^C_h$ en los operadores Hermitianos, que es el espacio $\mathcal{A}^D_h$. En efecto, si ponemos, para $w \in \mathcal{A}_h$,

$$E_p(w) = wp + pw - 2pwp$$

entonces es fácil verificar que E_p es el único idempotente $E_p : \mathcal{A}_h \to \mathcal{A}_h$ con

$$\operatorname{ran}(E_p) = \mathcal{A}_h^C = T_p\mathcal{P}(\mathcal{A}) \text{ y } \ker(E_p) = \mathcal{A}_h^D.$$

Entonces, de acuerdo a la construcción del Teorema 6.6.1, calculamos

$$\begin{aligned} E_{*p,v}w = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} E_{\alpha(t)}(w) &= wv + vw - 2vwp - 2pwv \\ &= -[\epsilon_p wv + vw\epsilon_p] \end{aligned} \tag{7.27}$$

donde $\alpha(t) \subset Gr(p)$. En el caso en el que también $w \in T_p\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_h^C$, operando algebraicamente con esta expresión se obtiene

$$E_{*p,v}w = -[\epsilon_p wv + vw\epsilon_p] = -\epsilon_p[wv + vw] = \Gamma_p(v, w), \tag{7.28}$$

luego nuestro spray coincide con $E_{*p,v}v$, por lo tanto es el spray canónico dado por el suplemento natural de los tangentes, y como veremos en la Sección 10.1.1.1, se trata del spray métrico de la Grassmanniana cuando a la misma le damos la métrica de subespacio inducida por la norma Frobenius de los operadores, dada por $\|x\|_2 = \operatorname{Tr}(x^*x)^{1/2}$.

Las geodésicas del spray deben verificar la ecuación

$$\ddot{\alpha} = -2\epsilon_\alpha\dot{\alpha}^2,$$

y es fácil ver que son las curvas

$$\gamma(t) = e^{tz}pe^{-tz} = \pi_p \circ \exp(tz) = Q(tz) \tag{7.29}$$

para $z \in \mathcal{A}_{ah}^C$. Recordando que todo $x = xp + px \in \mathcal{A}_h^C = T_p\mathcal{P}(\mathcal{A})$ se levanta a un $z \in \mathcal{A}_{ah}^C$ como $z = xp - px$, la exponencial de la variedad está dada por $\exp_p : \mathcal{A}_h^C \to \mathcal{P}(\mathcal{A})$ con la expresión

$$\exp_p(x) = e^{(xp-px)}pe^{-(xp-px)}.$$

la derivada covariante se deduce directamente de la expresión que dedujimos para Γ, obteniéndose

$$D_{\dot{\alpha}}\mu = \dot{\mu} + \epsilon_\alpha(\dot{\alpha}\mu + \mu\dot{\alpha}). \tag{7.30}$$

para $\mu \in Lev(\alpha)$ y $\alpha \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$ de clase C^2. En consecuencia, el transporte paralelo a lo largo de $\alpha \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$ está dado por la ecuación

$$\dot{\mu} = -\epsilon_\alpha(\dot{\alpha}\mu + \mu\dot{\alpha}).$$

En particular, para una geodésica γ como en (7.29), y un vector $x \in T_p\mathcal{P}(\mathcal{A})$, se tiene

$$\mu_t = P_0^t x = e^{tz}xe^{-tz}.$$

La verificación es sencilla y requiere primero comprobar que $\epsilon_\alpha\dot{\alpha} = -z$ y $\epsilon_\alpha\mu = -\mu\epsilon_\alpha$, lo que nos dice que $\mu \in T_\alpha\mathcal{P}(\mathcal{A})$, y además permite calcular fácilmente

$$\dot{\mu} = z\mu - \mu z = -\epsilon_\alpha(\dot{\alpha}\mu + \mu\dot{\alpha}).$$

El tensor de curvatura se obtiene iterando (7.27), usando la expresión local

$$R_p(x,y,z) = \Gamma(x,\Gamma(y,z)) - \Gamma(y,\Gamma(x,z))$$

y para $x,y,z \in T_p\mathcal{P}(\mathcal{A})$ se tiene

$$R_p(x,y,z) = [[x,y],z].$$

Los campos de Jacobi a lo largo de geodésicas se pueden calcular a partir de variaciones usando el Teorema 7.2.2, como en el ejemplo del grupo lineal, y lo dejamos como ejercicio.

Observación 7.6.3. La variedad de involuciones $\epsilon^2 = 1$ en un espacio de Banach complejo X fue estudiada por Z. Kovarik en [54]; los autores equipan a esta variedad de una conexión afín como en (7.30) y caracterizan las geodésicas. Luego estudian el caso particular en el que X es un espacio de Hilbert, restringiéndose a la parte autoadjunta de la variedad de involuciones, es decir a la variedad de simetrías $\epsilon = \epsilon^* = \epsilon^1$. Recordando que la asignación $p \mapsto 2p - 1$ es un isomorfismo entre las simetrías y la Grassmanniana de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, eso nos remite al ejemplo recién estudiado.

7.6.6.1. La Grassmanniana como espacio simétrico

Podemos presentar esta conexión en la Grassmaniana como la conexión de un espacio simétrico de Cartan. Para ello consideramos $G = \mathcal{U}$ el grupo unitario del álgebra, y fijado $p = p^2 = p^*$ consideramos la simetría asociada $\epsilon_p = 2p - 1$ y el automorfismo involutivo en $\mathcal{U}$ dado por $\sigma(u) = \epsilon_p u \epsilon_p$. Vemos que el conjunto de puntos fijos de σ es

$$K_p = \{u \in \mathcal{U} : u\epsilon_p = \epsilon_p u\} = \{u \in \mathcal{U} : up = pu\}$$

los operadores unitarios que conmutan con p, llamados p-diagonales en la Sección 4.7.3.

La diferencial de σ en $u = 1$ está dada por $\sigma_{*1}v = \epsilon_p v \epsilon_p$ y de aquí obtenemos que el álgebra de Lie de K_p (el autoespacio de autovalor -1 de σ_{*1}) es

$$\mathcal{A}_{ah}^D = \{v^* = -v : vp = pv\}$$

los operadores antihermitianos p-diagonales. Mientras que el autoespacio de autovalor -1 es

$$\mathcal{A}_{ah}^{C} = \{w^* = -w : w = wp - pw\},$$

los que anti-conmutan con p, que de acuerdo a lo discutido en la sección sobre espacios simétricos de Cartan (y antes de eso, en la Sección 4.7.3 donde presentamos la Grassmanniana), es el espacio que modela el cociente $G/K = \mathcal{U}/K_p$.

Con la acción concreta de $\mathcal{U}$ en $Gr(p) = \mathcal{O}(p) \subset \mathcal{A}_h$ dada por $(u, q) \mapsto uqu^*$, y como la Grassmaniana es exactamente la órbita de p por esta acción, tenemos la identificación

$$j : uK_p \mapsto upu^*$$

entre el cociente abstracto $\mathcal{U}/K_p$ y la órbita $\mathcal{O}(p)$. En esta identificación $o = q(1) \in G/K$ se identifica con p en la órbita.

El mapa de acción simétrica $\mu : G/K \to G/K$, de acuerdo a su definición (Observación 7.5.21), está dado por

$$\mu(gK_p, hK_p) = g\sigma(g)^{-1}\sigma(h)K_p = g\epsilon_p g^*\epsilon_p\epsilon_p h\epsilon_p K_p = g\epsilon_p g^* h\epsilon_p K_p,$$

puesto que $g^* = g^{-1}$ y $\epsilon_p = \epsilon_p^* = \epsilon_p^{-1}$.

Pero entonces podemos pasar este producto simétrico a la órbita mediante

$$q_1 \cdot q_2 = \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_1,$$

donde $\epsilon_i = 2q_i - 1$ es la simetría asociada a $q_i \in \mathcal{O}(p)$.

Esta operación es la que hace de j una identificación natural entre las estructuras de espacio simétrico del cociente abstracto y del espacio de operadores positivos, ya que verifica:

$$j \circ \mu(gK_p, hK_p) = j(gK_p) \cdot j(hK_p).$$

Es claro por la forma de la acción, que para esta presentación resulta más conveniente pensar a la Grassmanniana como la órbita de la simetría ϵ_p por la acción coadjunta del grupo unitario (ambas órbitas están relacionadas por el isomorfismo afín $x \mapsto 2x-1$).

Entonces llamemos $\mu(\epsilon, \xi) = \epsilon\xi\epsilon$ al producto de espacio simétrico en $M = \mathcal{O}(\epsilon_p)$, y nuevamente recordemos las fórmulas

$$\Sigma_V(W) = \mu_*(V, W) \qquad \Gamma(V, W) = -\frac{1}{2}(\Sigma_V \circ Z)_{*W}, \quad V, W \in TGr(p)$$

para el spray del espacio simétrico, con Z la sección nula del fibrado tangente.

Entonces dados $V = (\epsilon, \nu)$, $W = (\xi, w)$ con $\nu, w \in \mathcal{A}_h$, calculamos

$$\Sigma_V(W) = \mu_{*(\epsilon,\xi)}(\nu, w) = \nu\xi\epsilon + \epsilon\xi\nu + \epsilon\nu\epsilon,$$

ahora derivando $\epsilon_t\xi_t\epsilon_t$, con curvas tales que $(\epsilon_0, \dot{\epsilon}) = (\epsilon, \nu) = V$, y $(\xi_0, \dot{\xi}) = (\xi, w) = W$. Luego

$$\Sigma_V \circ Z(\xi) = \nu\xi\epsilon + \epsilon\xi\nu,$$

así que tomando una curva ξ_t con $\xi_0 = \epsilon$ y derivando, obtenemos

$$(\Sigma_V \circ Z)_*(\epsilon, w) = vw\epsilon + \epsilon wv.$$

De aquí deducimos que

$$\Gamma_\epsilon(v, w) = \Gamma(V, W) = -\frac{1}{2}(vw\epsilon + \epsilon wv)$$

que no es otra cosa que la forma bilineal del spray canónico introducido en (7.28).

Nuevamente, remarcamos que las expresiones para las geodésicas, el transporte paralelo y la curvatura las podriamos deducir directamente de las fórmulas que obtuvimos cuando estudiamos espacios homogéneos de Cartan.

En particular las geodésicas por $o = q(1)$ son de la forma $e^{tv} \cdot o$ con $v \in \mathfrak{m} = \mathcal{A}^C_{ah}$. Aplicando el mapa j vemos que las geodésicas por p son en efecto de la forma $t \mapsto e^{tv} p e^{-tv}$ con $v^* = -v$ un operador p-codiagonal.

Como $Gr(p) \simeq \mathcal{U}/K_p$, y en dimensión finita el álgebra de Lie de $\mathcal{U}$ es u_n, que es compacta (la forma de Killing es seminegativa), el espacio simétrico $Gr(p)$ es de tipo compacto.

Respecto del rango de $Gr(p)$ como espacio simétrico (Definición 7.5.27), notemos primero que $\mathfrak{m} = T_1\mathcal{O}(p) = \mathcal{A}^C_{ah}$ y en particular si $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$, podemos calcular su dimensión, que dependerá de la dimensión (el rango) de p. Supongamos que $rg(p) = k$, luego los operadores p-diagonales se escriben como una matriz por bloques donde el primer bloque diagonal es de $k \times k$, y el segundo es de tamaño $(n-k)\times(n-k)$. Eso nos deja libre para elegir el bloque codiagonal de tamaño $(n-k) \times k$ en los codiagonales. Como podemos poner cualquier número complejo allí, esa es la dimensión compleja, luego

$$\dim_{\mathbb{R}} M_n(\mathbb{C})^C_h = 2k(n-k) = \dim(Gr(p)),$$

donde $k = rg(p)$.

Puede probarse, usando un argumento similar al que usamos para la esfera -ecuación (7.21)- que un álgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ tiene dimensión $\min(k, n-k)$, y entonces ese número es el rango de $Gr(p)$ como espacio simétrico. En particular el espacio proyectivo (que se obtiene considerando un proyector de rango $k = 1$) es un espacio simétrico compacto de rango 1.

7.A. Problemas

7.I. Probar que, en coordenadas locales, se tiene la fórmula

$$\mathfrak{R}(X, Y, Z)(p) = \Gamma_p(X_p, \Gamma_p(Y_p, Z_p)) - \Gamma_p(Y_p, \Gamma_p(X_p, Z_p))$$

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 233

$$-\Gamma_{*p,X_p}(Y_p,Z_p)+\Gamma_{*p,Y_p}(X_p,Z_p),$$

para todo $X,Y,Z:M\to TM$ y todo $p\in M$.

7.II. Sea G grupo de Lie, $H=G\times G$ y ∇G la diagonal de H. Sea $\sigma(g_1,g_2)=(g_2,g_1)$ el flip, que es automorfismo involutivo de H con puntos fijos $K=H^\sigma=\nabla G$. Probar

1. H actúa transitivamente en G mediante $(g_1,g_2)\cdot g = g_1 g g_2^{-1}$, con isotropía $K=G^\sigma$, luego $H/K\simeq G$.
2. El automorfismo σ induce en G la estructura de espacio simétrico $\mu(g,h)=gh^{-1}g$.
3. El spray de dicho espacio simétrico es $F_g(w)=vg^{-1}v$.

7.III. Sea $p\in M=\mathcal{P}(\mathcal{A})$, $\alpha(t)=e^{tz}pe^{-tz}$ una geodésica en M con $z^*=-z$ que es p-codiagonal. Si $v,w\in T_p\mathcal{P}(\mathcal{A})$, hallar el único campo de Jacobi η a lo largo de α tal que

$$\eta(0)=v,\quad D_{\alpha'}\eta(0)=w.$$

Parte II

Estructuras Métricas

En esta segunda parte del texto, estudiaremos las variedades diferenciables provistas de una métrica dada en los tangentes que permita medir curvas. Esto, es introduciremos una norma en cada espacio tangente de manera continua, y en los casos que la variedad tenga spray, intentaremos hacerlo de manera que el transporte paralelo a lo largo de geodésicas sea un isometría. Como la mayoría de los ejemplos que estudiaremos provienen de álgebras de operadores, es bueno conocer los fundamentos de la teoría de normas simétricas en álgebras de operadores, que optamos por incluir sobre el final del apéndice de álgebras de operadores de este texto.

En el caso Riemanniano, dada una métrica en una variedad M, siempre es posible hallar un spray (conocido como *spray métrico*) compatible con la métrica, únicamente determinado por cierta condición adicional de compatibilidad, su derivada covariante asociada se conoce como *derivada de Levi-Civita*. En el extremo opuesto, ya que estudiaremos problemas de minimalidad de curvas, decidimos conveniente comenzar con el estudio del problema de curvas continuas y rectificables que resulten cortas o minimizantes en un espacio métrico (X, d) dado, ya que muchas de estas ideas son más claras sin la introducción de objetos adicionales como los dados por la estructura diferenciable.

Capítulo 8

Espacios de Métrica Interior

> Una geometría no puede ser más cierta
> que otra; sólo puede ser más conveniente.
>
> Henri Poincare

Las nociones elementales de espacios de métrica interior nos permitirán en este capítulo probar el Teorema de Hopf-Rinow en este contexto: dados dos puntos, existe una curva continua y rectificable de longitud igual a la distancia entre los puntos, siempre que el espacio sea localmente compacto. Seguimos la exposición del libro de M. Gromov [42] con algunos pequeños desvíos.

8.1. La distancia rectificable

Sea (X, d) un espacio métrico. Dada una curva continua $\gamma : [a, b] \to X$, y una partición $\pi : \{a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{n+1} = b\}$ del intervalo, definimos

$$\ell(\gamma, \pi) = \sum_{i=0}^{n} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})),$$

y a partir de allí

$$\ell(\gamma) = \sup\{\ell(\gamma, \pi) : \pi \text{ partición finita}\}.$$

Diremos que γ es *rectificable* si γ es continua y $\ell(\gamma) < +\infty$. Algunas propiedades relevantes:

1. Al refinar la partición, las sumas aumentan por la desigualdad triangular.
2. $\ell(\gamma) \geq 0$ y $\ell(\gamma) = 0$ si y sólo si γ es constante.

3. Si γ se obtiene mediante α seguida de β, entonces $\ell(\gamma) = \ell(\alpha) + \ell(\beta)$.

Observación 8.1.1. Si $f : [c, d] \to [a, b]$ es un homeomorfismo que preserva la orientación, debe ser estrictamente monótona y entonces $\ell(\gamma \circ f) = \ell(\gamma)$, es decir la longitud es invariante por reparametrizaciones. Y en realidad, la funcional ℓ está definida en las clases de equivalencia de curvas.

Denotemos con $C([a, b], X)$ al conjunto de todas las curvas continuas definidas en $[a, b]$ a valores en X. La *distancia uniforme* entre dos curvas está dada de manera usual por

$$\operatorname{dist}(\alpha, \beta) = \max_{t \in [a,b]} d(\alpha(t), \beta(t)).$$

Es decir que le damos a $C([a, b], X)$ la topología compacto abierta. Denotaremos con $\mathcal{R}([a, b], X)$ al subconjunto de las curvas rectificables. Denotaremos

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}([0, 1], X).$$

Observación 8.1.2. La distancia uniforme no detecta reparametrizaciones, es decir, si α es una reparametrización continua de β, diremos que $\alpha \equiv \beta$. Se le puede dar al espacio de clases (que son las que llamamos *curvas*) la distancia

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{R}}(\alpha, \beta) = \inf\{\operatorname{dist}(f, g) : f \equiv \alpha,\ g \equiv \beta,\ f, g \in \mathcal{R}\}.$$

De esta manera se obtiene un espacio métrico donde funciones con la misma imagen se identifican a la misma curva.

Proposición 8.1.3. *Sean $\gamma_k, \gamma \in C([0, 1], X)$ tales que $\gamma_k \to \gamma$. Si $\gamma_k \in \mathcal{R}$ y además $\ell(\gamma_k) \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $\gamma \in \mathcal{R}$ y*

$$\ell(\gamma) \leq \liminf_{k \to \infty} \ell(\gamma_k),$$

es decir ℓ es semi-continua inferiormente.

Demostración. Primero supongamos que $\ell(\gamma) = +\infty$. Dado $R > 0$ sea

$$\pi = \{0 = t_0, \ldots, t_{n+1} = 1\}$$

una partición del $[0, 1]$ tal que $\ell(\gamma, \pi) \geq R$. Si la partición tiene $(n + 1)$ puntos, sea $\delta = \frac{R}{4(n+1)}$ y tomemos $k_0(R)$ tal que $k \geq k_0$ implique $d(\gamma_k, \gamma) < \delta$. Entonces, para cada $i = 0..n$, y cada $k \geq k_0$,

$$\begin{aligned} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) &\leq d(\gamma(t_i), \gamma_k(t_i)) + d(\gamma_k(t_i), \gamma_k(t_{i+1})) \\ &\quad + d(\gamma_k(t_{i+1}), \gamma(t_{i+1})) \\ &< d(\gamma_k(t_i), \gamma_k(t_{i+1})) + 2\delta. \end{aligned}$$

Sumando sobre i se tiene

$$R \leq \ell(\gamma, \pi) < \ell(\gamma_k, \pi) + 2(n+1)\delta \leq \ell(\gamma_k) + R/2 \leq M + R/2.$$

Luego $M \geq R/2$ para todo $R > 0$, lo que es absurdo y prueba que $\gamma \in \mathcal{R}$. Repitiendo el argumento anterior pero ahora tomando una partición π tal que

$$\ell(\gamma, \pi) > \ell(\gamma) - \epsilon/2,$$

y $\delta = \frac{\epsilon}{4(n+1)}$, se obtiene, para $k \geq k_0(\epsilon)$, $\ell(\gamma) < \ell(\gamma_k) + \epsilon$, lo que prueba que ℓ es semi-continua inferiormente. □

Lema 8.1.4. *Sean* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *y* $\gamma \in \mathcal{R}([a, b], X)$. *Entonces*

1. *La aplicación* $x : [a, b] \to [0, \ell(\gamma)]$ *dada por* $x(t) = \ell(\gamma|_{[a,t]})$ *es continua y creciente. Si* γ *es localmente inyectiva, entonces* x *es estrictamente creciente.*

2. *Para cada* $x \in [0, \ell(\gamma)]$ *existe* $t \in [a, b]$ *con* $\ell(\gamma|_{[0,t]}) = x$. *El conjunto de tales* t *es un intervalo cerrado de* $[a, b]$, *y* γ *es constante allí.*

Demostración. Veamos 1. Para $a \leq s < t \leq b$, tenemos

$$x(t) - x(s) = \ell(\gamma|_{[a,t]}) - \ell(\gamma|_{[a,s]}) = \ell(\gamma|_{[s,t]}),$$

entonces x es creciente y si γ es localmente inyectiva, no puede ser $x(t) = x(s)$, pues acercando t a s y usando la partición trivial de $[s, t]$ se tiene

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq \ell(\gamma|_{[s,t]}) = x(t) - x(s) = 0,$$

una contradicción. Resta ver que x es continua, sea $t \in [a, b]$ y $\epsilon > 0$. Existe, por la continuidad uniforme de γ, un $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow d(\gamma(x), \gamma(y)) < \epsilon/2.$$

Como γ es rectificable, existe un número positivo (que supondremos igual a δ tomando el mínimo) de manera que si una partición π tiene todos sus puntos a distancia menor que δ, entonces $\ell(\gamma) < \ell(\gamma, \pi) + \epsilon/2$. Sea $s \in [a, b]$ tal que $0 \leq t - s < \delta$. Entonces, tomando una partición

$$\pi = \{t_0 = a, t_1, \ldots, s, t, \ldots, t_{n+1} = b\}$$

de manera que todos los t_i disten menos que δ, se tiene

$$\begin{aligned} x(t) - x(s) &= \ell(\gamma|_{[s,t]}) = \ell(\gamma) - \ell(\gamma|_{[a,s]}) - \ell(\gamma|_{[t,b]}) \\ &< \ell(\gamma, \pi) + \epsilon/2 - \ell(\gamma|_{[a,s]}) - \ell(\gamma|_{[t,b]}). \end{aligned}$$

Observando que $\ell(\gamma|_{[a,s]}) \geq \ell(\gamma|_{[a,s]}, \pi)$ y lo mismo vale en el intervalo $[t, b]$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 \leq x(t) - x(s) &\leq \ell(\gamma, \pi) + \epsilon/2 - \ell(\gamma|_{[a,s]}, \pi) - \ell(\gamma|_{[t,b]}, \pi) \\ &= \ell(\gamma|_{[s,t]}, \pi) + \epsilon/2 = d(\gamma(s), \gamma(t)) + \epsilon/2 \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Ahora veamos 2. Como la aplicación x del ítem previo es continua, $x(a) = 0$, $x(b) = \ell(\gamma)$, por el teorema del valor intermedio existe el punto t tal que $x(t) = \ell(\gamma|_{[0,t]}) = x$; nuevamente por la continuidad de x, el conjunto de tales t es cerrado en $[a, b]$. Supongamos ahora que s, t verifican $x(s) = x(t)$, con $s \leq t$. Entonces $0 = x(t) - x(s) = \ell(\gamma|_{[s,t]})$ luego $\gamma|_{[s,t]}$ es constante lo que prueba que estos puntos forman un intervalo. □

Observación 8.1.5. Gracias al lema previo, es posible reparametrizar las curvas rectificables por longitud de arco. Esto es, la función $x : [a, b] \to [0, \ell(\gamma)]$ es una función continua. Definimos

$$\tilde{\gamma} : [0, \ell(\gamma)] \to X$$

como $\tilde{\gamma}(x) = \gamma(t)$ para cada $x = x(t) \in [0, \ell(\gamma)]$ con $t \in [a, b]$. Observemos que esta definición no depende del valor de t tal que $x(t) = x$, pues γ es constante en tales t. Se tiene $\ell(\gamma) = \ell(\tilde{\gamma})$ y además $\ell(\tilde{\gamma}|_{[x(t),x(s)]}) = \ell(\gamma|_{[t,s]}) = |x(t) - x(s)|$, es decir

$$\ell(\tilde{\gamma}|_{[x,y]}) = |x - y|$$

para todo $x, y \in [0, \ell(\gamma)]$. En este caso diremos que $\tilde{\gamma}$ está *parametrizada por longitud de arco*. Observemos que con esta parametrización, la aplicación $\lambda \mapsto \ell(\tilde{\gamma}|_{[0,\lambda]})$ es estrictamente creciente.

Más útil aún es una reparametrización *normal*, es decir con un cambio de variable lineal transformamos $[0, \ell(\gamma)]$ en el intervalo $[0, 1]$ y podemos suponer que $\gamma \in \mathcal{R}$ y además

$$\ell(\tilde{\gamma}|_{[s,t]}) = (t - s)\ell(\gamma).$$

Tomando la partición trivial de cualquier intervalo $[s, t] \subset [0, 1]$ se tiene el siguiente corolario.

Corolario 8.1.6. *Si $\gamma \in \mathcal{R}$ es normal, entonces γ es Lipschitz con constante $\ell(\gamma)$, es decir*

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) \leq \ell(\gamma)|t - s|.$$

La *pseudo-métrica* asociada a la funcional ℓ está dada por

$$d_\ell(x, y) = \inf\{\ell(\gamma) : \gamma \text{ rectificable que une } x \text{ con } y\}.$$

Como siempre podemos suponer que las curvas están parametrizadas por longitud de arco, usaremos que

$$d_\ell(x,y) = \inf\{\ell(\gamma) : \gamma \in \mathcal{R}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}.$$

Observación 8.1.7. Esta métrica d_ℓ induce una topología en X que puede diferir de la original, sin embargo tomando la partición trivial se ve que siempre se tiene $\ell(\gamma) \geq d(x,y)$ para todo γ que una x con y, luego siempre vale

$$d_\ell \geq d.$$

Esto nos dice que, fijado $\epsilon > 0$, $B^\ell_\epsilon(x) \subset B_\epsilon(x)$ donde la segunda bola es con la métrica d. Luego si A es abierto en d, resulta abierto en d_ℓ. Luego la topología de (X, d_ℓ) es más fina (tiene más abiertos) que la de (X, d).

Lema 8.1.8. *Las topologías de* (X,d), (X,d_ℓ) *coinciden si y sólo si para cada* $x \in X$ *y cada* $\epsilon > 0$ *existe un* d*-abierto* V *alrededor de* x *de manera que todo punto allí se puede unir con* x *con un arco rectificable de longitud menor que* ϵ.

Demostración. Supongamos primero que las topologías coinciden, la afirmación es trivial pues $V = B^\ell_\epsilon(x)$ es abierto en ambas topologías y este sirve como d-abierto que verifica las hipótesis. Recíprocamente, sea $C \subset X$ un d_ℓ-cerrado, y sea $\{x_n\} \subset C$ una sucesión que tiende a $x \in X$ en la topología inducida por d. Fijado $\epsilon > 0$, la condición nos dice que hay un entorno d-abierto V de x tal que todo punto allí dista en d_ℓ menos que ϵ. Luego si $n \geq n_0$, $x_n \in V$ y por lo tanto $d_\ell(x_n, x) < \epsilon$. Esto prueba que x está en C pues C es d_ℓ-cerrado, luego C es d-cerrado. □

8.1.1. Espacios de métrica interior

Una relación aún más fuerte entre las métricas es que $d = d_\ell$, es decir que la distancia d entre dos puntos cualesquiera de X se realiza como ínfimo de curvas continuas que los unen. En ese caso diremos que (X,d) es un *espacio de métrica interior*.

Lema 8.1.9. *Sea* $f : X \to Y$ *una función entre espacios métricos que es Lipschitz, i.e. existe* $C > 0$ *tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq C d(x,y)$$

para todo $x, y \in X$. *Entonces* f *se extiende de manera única a las completaciones de* X, Y *a una función que es Lipschitz con la misma constante.*

Demostración. Sean x_0 en la completación de X, $\{x_n\} \in X$ tal que $x_n \to x_0$, entonces $f(x_n)$ es de Cauchy en Y luego tiene un límite y_0 en la completación de Y. Definimos

$f(x_0) = y_0$, veamos que no depende de la sucesión x_n. Si $p_n \to x_0$ es otra sucesión, se tiene

$$d(f(p_n), f(x_n)) \leq Cd(p_n, x_n) \to 0$$

luego $\{f(p_n)\}$, $\{f(x_n)\}$ están en la misma clase de equivalencia, y definen el mismo elemento $y_0 \in Y$. De hecho

$$d(f(x_n), f(x_0)) = \lim_k d(f(x_n), f(x_k)) \leq \lim_k Cd(x_n, x_k) = Cd(x_n, x_0)$$

si $x_k \to x_0$ lo que prueba que f es continua. Por otra parte, si x_0, x_1 están en la completación de X, tomemos $x_n \to x_0$, $p_n \to x_1$ con $x_n, p_n \in X$ y se tiene

$$\begin{aligned} d(f(x_0), f(x_1)) &\leq Cd(x_0, x_n) + Cd(x_n, p_n) + Cd(p_n, x_1) \\ &\to Cd(x_0, x_1) \end{aligned}$$

lo que prueba que la extensión de f es Lipschitz con la misma constante. □

Para $x \in (X, d)$ espacio métrico, denotaremos con $B_r(x)$ a la bola abierta de radio r alrededor de x, y con $\overline{B}_r(x)$ a la bola cerrada. Para $A, B \subset X$, denotamos con $d(A, B)$ al ínfimo de las distancias entre A y B, es decir

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b) = d(B, A).$$

Lema 8.1.10. *Sea (X, d) un espacio métrico. Si X es de métrica interior, entonces dados $x, y \in X$, $r_1, r_2 > 0$ con $r_1 + r_2 \leq d(x, y)$, se tiene*

$$d(\overline{B}_{r_1}(x), \overline{B}_{r_2}(y)) \leq d(x, y) - r_1 - r_2.$$

Recíprocamente, si vale la condición y (X, d) es completo, entonces es de métrica interior.

Demostración. Para la primera implicación, tomamos un arco continuo $\gamma : [0, 1] \to X$ que une x con y de longitud $\ell(\gamma) < d(x, y) + \epsilon$. Sea $t_1 \in [0, 1]$ el primer instante en el que $\gamma(t_1) \in S_{r_1} = \partial\overline{B}_{r_1}(x)$, sea $t_2 \in [0, 1]$ el primer instante, contando hacia atrás desde $t = 1$, en el que $\gamma(t_2) \in S_{r_2} = \partial\overline{B}_{r_2}(y)$. Entonces considerando la partición $t_0 = 0, t_1, t_2, t_3 = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} d(\overline{B}_{r_1}(x), \overline{B}_{r_2}(y)) &\leq d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \\ &= \sum_{i=0}^{2} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) - d(x, \gamma(t_1)) - d(y, \gamma(t_2)) \\ &\leq \ell(\gamma) - r_1 - r_2 < d(x, y) - r_1 - r_2 + \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ era arbitrario, se tiene la propiedad. Supongamos ahora que (X, d) es un espacio métrico que verifica la propiedad. Entonces no es difícil ver que (Ejercicio 8.III), dados $x, y \in X$ y $\epsilon > 0$, existe $z \in X$ tal que

$$\text{máx}\{d(x,z), d(z,y)\} \leq {}^1\!/\!_2 d(x,y) + \epsilon.$$

Sean $x, y \in X$, $\delta = d(x,y)$. Buscamos curvas continuas que unan x con y tales que $\ell(\gamma) \leq \delta + \epsilon$. Dada una sucesión $\{\epsilon_k\}$ de números positivos, existe un punto $z_{1/2}$ tal que

$$\text{máx}\{d(x, z_{1/2}), d(z_{1/2}, y)\} \leq {}^\delta\!/\!_2 + \epsilon_1 {}^\delta\!/\!_2 = {}^\delta\!/\!_2(1+\epsilon_1),$$

y puntos $z_{\frac{1}{4}}, z_{\frac{3}{4}}$ tales que $\text{máx}\{d(x, z_{\frac{1}{4}}), d(z_{\frac{1}{4}}, z_{1/2}), d(z_{1/2}, z_{\frac{3}{4}}), d(z_{\frac{3}{4}}, y)\}$ es menor o igual que

$${}^1\!/\!_2({}^\delta\!/\!_2 + \epsilon_1 {}^\delta\!/\!_2) + {}^{\epsilon_2}\!/\!_2({}^\delta\!/\!_2 + \epsilon_1 {}^\delta\!/\!_2) = {}^\delta\!/\!_4(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2),$$

y así sucesivamente. Esto define una curva en los racionales diádicos, que verifica

$$d\left(\gamma({}^j\!/\!_{2^n}), \gamma({}^{(j+1)}\!/\!_{2^n})\right) \leq \frac{\delta}{2^n} \prod_{k=1}^{\infty} (1+\epsilon_k)$$

para $j = 0, \ldots, 2^n - 1$, con $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Elegimos la sucesión ϵ_k de manera que

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+\epsilon_k) < 1 + {}^\epsilon\!/\!_\delta.$$

De esta manera

$$d\left(\gamma({}^j\!/\!_{2^n}), \gamma({}^{(j+1)}\!/\!_{2^n})\right) \leq \frac{\delta}{2^n} \prod_{k=1}^{\infty} (1+\epsilon_k) < {}^\delta\!/\!_{2^n}(1 + {}^\epsilon\!/\!_\delta) = {}^1\!/\!_{2^n}(\delta + \epsilon).$$

Si $t_0 = {}^r\!/\!_{2^n}$, $t_1 = {}^k\!/\!_{2^{n+p}}$ son diádicos, escribiendo $t_0 = {}^{r2^p}\!/\!_{2^{n+p}}$ y aplicando la desigualdad triangular $2^p k - r$ veces, se deduce que

$$d\left(\gamma(t_0), \gamma(t_1)\right) \leq \frac{|2^p k - r|}{2^{n+p}}(\delta + \epsilon) = |t_0 - t_1|(\delta + \epsilon).$$

Esto prueba que γ es Lipschitz en los racionales diádicos, y por el lema previo se extiende a la completación (que es el intervalo $[0,1]$) a una función continua γ a valores en X (que estamos suponiendo que es completo) con la misma constante Lipschitz. Entonces, dada cualquier partición π del intervalo $[0,1]$, se tiene

$$\ell(\gamma, \pi) = \sum_i d\left(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})\right) \leq \sum_i |t_i - t_{i+1}|(\delta + \epsilon) = \delta + \epsilon.$$

Luego, $\ell(\gamma) \leq \delta + \epsilon$. □

8.1.2. Geodésicas

Definición 8.1.11. Diremos que una curva continua $\gamma : [0,1] \to X$ en un espacio de métrica interior (X, d) es una *geodésica corta* si

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|\ell(\gamma)$$

para todo $t, s \in [0,1]$. Una *geodésica* es una curva que es localmente una geodésica corta. Diremos que un espacio (X, d) es *geodésico* si es de métrica interior y para todo par de puntos existe una geodésica corta que los une.

Observación 8.1.12. El típico ejemplo de geodésica es una circunferencia máxima en la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, sólo es minimizante para puntos en ella que disten menos que π.

Observación 8.1.13. Si γ une dos puntos x, y de un espacio métrico y es corta, entonces también es corta restringida a cualquier subintervalo, por la siguiente razón. De no ser así (suponiendo que no es corta entre $p = \gamma(s)$ y $q = \gamma(t)$), se tendría

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \ell(\gamma) = \ell(\gamma|_{[0,s]}) + \ell(\gamma|_{[s,t]}) + \ell(\gamma|_{[t,1]}) \\ &> d(x,p) + d(p,q) + d(q,y) \geq d(x,y) \end{aligned}$$

lo que es absurdo.

8.2. El teorema de Hopf-Rinow métrico

Pasemos a estudiar los espacios geodésicos. Primero demos algunas definiciones y resultados útiles sobre funciones continuas que aplicaremos a nuestras curvas.

Definición 8.2.1. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones continuas $f : K \to X$ con K compacto métrico y X métrico se dice *equicontinua* si dados $t \in K$ y $\epsilon > 0$, existe un entorno abierto $U_t \subset K$ tal que

$$d(f(t), f(s)) < \epsilon$$

para todo $s \in U_t$, para toda $f \in \mathcal{F}$. La familia $\mathcal{F}$ se dice *puntualmente precompacta* si para todo $t \in K$, el conjunto

$$\{f(t) : f \in \mathcal{F}\} \subset X$$

es precompacto.

Un espacio métrico (X, d) es *localmente compacto* si bolas cerradas suficientemente pequeñas son compactas. Por ejemplo $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ es localmente compacto pero las bolas cerradas cercanas a (pero no centradas en) $x = 0$ no pueden ser compactas si tienen radio grande.

8.2.1. El teorema de Ascoli

Recordemos el teorema de Ascoli para familias de funciones continuas. La demostración puede verse en el libro *Topología* [69, Teorema 47.1], de J. Munkres.

Teorema 8.2.2 (Ascoli). *Sean X un espacio métrico compacto, Y un espacio métrico. Entonces un subconjunto $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ es precompacto en la topología compacto abierta si y sólo si es una familia equicontinua y puntualmente precompacta.*

8.2.2. El teorema de Hopf-Rinow métrico

Estamos en condiciones de probar el Teorema de Hopf-Rinow con toda generalidad, este da un criterio para la existencia de curvas cortas. Aunque no formulado con este nivel de generalidad, este resultado se suele atribuir a Cohn-Vossen, ya que aborda el problema en un trabajo del año 1935 [27]. El resultado para superficies, es ligeramente anterior (1931) y se debe a Hopf y Rinow [51] de ahí que se haya generalizado el uso de la denominación Hopf-Rinow para este tipo de teoremas de existencia de curvas cortas.

Teorema 8.2.3 (Hopf-Rinow). *Sea (X,d) un espacio de métrica interior, $x \in X$. Entonces*

1. *Si X es completo, y $\overline{B}_r(x)$ es compacta para todo $0 < r < \rho$, entonces $\overline{B}_\rho(x)$ es compacta.*
2. *Si además X es localmente compacto, entonces toda bola cerrada en X es compacta, y X es geodésico.*

Demostración. Dado $x \in X$, primero probaremos que si $\overline{B}_r(x)$ es compacta para todo $r \in [0,\rho)$, entonces $\overline{B}_\rho(x)$ es compacta. Sea x_n una sucesión de puntos en $\overline{B}_\rho(x)$, extraeremos una subsucesión convergente. Podemos suponer, pasando a una subsucesión, que $d(x_n,x) \nearrow \rho$ pues sino usamos la compacidad de las bolas más chicas. Dada cualquier sucesión de números positivos ϵ_k que tiende a cero, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n(k) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x,x_n) > \rho - \epsilon_k$ para todo $n \geq n(k)$. Considerando el par $x, y = x_n$ en la propiedad del Lema 8.1.10, y tomando $r_1 = \rho - \epsilon_k > 0$, $r_2 = d(x,x_n) - \rho + \epsilon_k > 0$ para $n \geq n(k)$, se verifica $r_1 + r_2 = d(x,y)$ con lo cual la distancia entre las bolas del citado lema es nula. Luego existen, fijado $n \geq n(k)$ y tomando $\delta_n = \rho - d(x,x_n) > 0$, elementos $y_n(k) \in \overline{B}_{\rho-\epsilon_k}(x)$, $z \in \overline{B}_{r_2}(x_n)$ tales que $d(y_n(k),z) < \delta_n$. De aquí se deduce que

$$d(y_n(k),x_n) < \delta_n + d(z,x_n) \leq \delta_n + r_2 = \epsilon_k.$$

Consideremos el conjunto compacto

$$C = \prod_{k\in\mathbb{N}} \overline{B}_{\rho-\epsilon_k}(x),$$

y allí consideramos $(\{y_n(k)\}_{n\geq n(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset C$. Podemos extraer una subsucesión $y_{n_j}(k)$ convergente para todo k por la compacidad de C, esto es una subsucesión que converge en cada una de las coordenadas $k \in \mathbb{N}$. A partir de

$$d(y_{n_j}(k), x_{n_j}) \leq \epsilon_k,$$

haciendo tender $k \to \infty$, descubrimos que la sucesión $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es límite de $y_{n_j}(k)$. Luego

$$d(x_{n_j}, x_{n_r}) \leq d(x_{n_j}, y_{n_j}(k)) + d(y_{n_j}(k), y_{n_r}(k)) + d(y_{n_r}(k), x_{n_r})$$

nos dice que $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X, convergente por la hipótesis de completitud. Ahora veamos que si X es localmente compacto, las bolas cerradas de cualquier radio son compactas. Dado $x \in X$, si el supremo ρ para el cual $\overline{B}_\rho(x)$ es compacta fuera finito, consideramos el conjunto compacto $S_\rho = \partial\overline{B}_\rho(x)$ y lo cubrimos con bolas abiertas de clausura compacta. Por compacidad, extraemos un subcubrimiento finito B_i y consideramos

$$\overline{B}_\rho(x) \cup_i \overline{B}_i$$

que es un conjunto compacto, que contiene una bola cerrada centrada en x de radio $\rho' > \rho$, que resulta compacta por ser cerrada en un compacto lo cual es una contradicción. Ahora veamos que X es geodésico. Tomemos $x, y \in X$ y sea $\delta = d(x, y)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una curva $\gamma_n \to X$ que une x con y tal que

$$\ell(\gamma_n) \leq \delta + 1/n.$$

Como podemos suponer que las γ_n están todas parametrizadas por longitud de arco, reparametrizando el $[0, \ell(\gamma_n)]$ podemos suponer que todas las curvas están parametrizadas en el intervalo $[0, 1]$, es decir es una familia de funciones $\{\gamma_n\} \subset C([0, 1], X)$ que verifica

$$\ell(\gamma_n|_{[s,t]}) = |s - t|\ell(\gamma_n).$$

No es difícil ver que gracias a esta condición la familia $\{\gamma_n\} \subset C([0, 1], X)$ es una familia equicontinua de funciones:

$$d(\gamma_n(t), \gamma_n(s)) \leq \ell(\gamma_n|_{[s,t]}) = |s - t|\ell(\gamma_n) \leq |s - t|(\delta + 1).$$

Tomando s suficientemente cercano a t, se deduce que $\gamma_n(t)$ está a menos de ϵ de $\gamma_n(s)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, podemos suponer que todas las curvas están

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 247

contenidas en la bola cerrada $\overline{B}_{\delta+1}(x)$ puesto que en caso contrario $\ell(\gamma_n) \geq \delta + 1$, luego para $t \in [0,1]$

$$\{\gamma_n(t) : n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{B}_{\delta+1}(x)$$

que es compacto por el ítem previo. Es decir la familia $\{\gamma_n\} \subset C([0,1],X)$ es puntualmente precompacta. Por el Teorema de Ascoli, existe una subsucesión γ_{n_k} uniformemente convergente a una curva continua $\gamma : [0,1] \to X$. Como la longitud es semicontinua inferiormente,

$$\delta \leq \ell(\gamma) \leq \lim_{k\to\infty} \inf \ell(\gamma_{n_k}) = \delta$$

lo que prueba que γ es una geodésica corta que une x con y.

□

Observación 8.2.4. Si (X,d) es un espacio métrico tal que toda bola cerrada es compacta, entonces es completo. En efecto, si $\{x_n\} \subset X$ es de Cauchy, el conjunto $\{x_n\}$ es acotado y por ende vive en una bola compacta, luego tiene una subsucesión convergente a un punto $x \in X$, y es fácil ver que $x_n \to x$.

Sin embargo, aún asumiendo que (X,d) es localmente compacto, es falso que ser geodésico implique ser completo. Un ejemplo sencillo se obtiene a partir del intervalo $(0,1) \subset \mathbb{R}$. Este espacio es localmente compacto y geodésico, pero no es completo[1].

8.A. Problemas

8.I. Si $\gamma : [a,b] \to X$ es continua, probar que $\ell(\gamma) = 0$ implica que γ es constante.

8.II. Probar que ℓ es invariante por reparametrizaciones.

8.III. Sea (X,d) un espacio métrico tal que, para todo $x,y \in X$, $r_1, r_2 > 0$ con $r_1 + r_2 \leq d(x,y)$, se tiene

$$d(\overline{B}_{r_1}(x), \overline{B}_{r_2}(y)) \leq d(x,y) - r_1 - r_2,$$

Probar que para todo $x,y \in X$ y $\epsilon > 0$, existe $z \in X$ tal que

$$\max\{d(x,z), d(z,y)\} \leq \tfrac{1}{2}d(x,y) + \epsilon.$$

8.IV. * Probar que vale el enunciado recíproco del ejercicio previo.

[1] Debo esta aclaración a Marcos Cossarini.

Capítulo 9

Variedades de Finsler

> La geometría de Finsler es simplemente geometría Riemanniana sin la restricción cuadrática.
>
> Shiing-Shen Chern

Combinaremos en este capítulo la noción de variedad diferenciable con la de espacio métrico, dando en cada espacio tangente una norma que varíe de manera continua con el punto base. Estudiaremos variedades con spray donde las normas sean compatibles con el transporte paralelo, en el sentido que este sea una isometría de la variedad. La frase que abre el capítulo puede tomarse de manera irónica, ya que no dispondremos en general de las herramientas habituales del cálculo de variaciones de las que dispone Chern para su comentario (ya que la geometría de Finsler clásica que él estudió asume que las normas son de clase C^2 con Hessiano definido positivo).

9.1. Métricas de Finsler

Dada una variedad M modelada por un espacio de Banach E, consideramos una norma en cada espacio tangente T_pM, $p \in M$, mediante una función continua $\mathfrak{b} : TM \to [0, +\infty)$ con las propiedades usuales de una norma, es decir, denotando $V = (p, v) \in TM$ y $\mathfrak{b}(V) = \|v\|_p$, se tiene para $v, w \in T_pM$ y $t \in \mathbb{R}$,

1. $\mathfrak{b}(tV) = |t|\mathfrak{b}(V)$,
2. $\mathfrak{b}(V + W) \leq \mathfrak{b}(V) + \mathfrak{b}(W)$,
3. $\mathfrak{b}(V) \geq 0$ y $\mathfrak{b}(V) = 0$ sii $V = 0$.

La norma se suele denominar *métrica de Finsler* en la variedad M.

9.1.1. Funcionales longitud y energía

Una métrica de Finsler nos permite introducir la *funcional longitud* de curvas $\alpha : [a, b] \to M$ dada por

$$L_b(\alpha) = \int_a^b b(\alpha'(t))dt = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\|_{\alpha(t)} dt,$$

donde estamos suponiendo que α es continua y C^1 a trozos. Observemos que esta cantidad no depende, por el teorema de cambio de variable en $\mathbb{R}$ y la propiedad

$$b(\alpha'(t(s)))\frac{dt}{ds}) = \frac{dt}{ds} b(\alpha'(t(s)))$$

de la parametrización de α, sólo de su imagen. Claramente $L_b(\alpha) = 0$ si y sólo si α es constante, además si $\alpha\sharp\beta$ denota la curva $\alpha : [a, b] \to M$ seguida de la curva $\beta : [c, d] \to M$, donde suponemos que $\alpha(b) = \beta(c)$, entonces

$$L_b(\alpha\sharp\beta) = L_b(\alpha) + L_b(\beta). \tag{9.1}$$

También se suele definir la *funcional energía* como

$$E_b(\alpha) = 1/2 \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\|^2_{\alpha(t)} dt.$$

Definimos $d_b : M \times M \to [0, +\infty)$ como

$$d_b(x, y) = \inf\{L_b(\gamma) : \gamma \subset M \text{ es } C^1 \text{ a trozos, } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}.$$

Supondremos que M es arcoconexa con lo cual d_b es finita. Tomando $\gamma \equiv x$ la curva constante, se deduce que $d_b(x, x) = 0$ para todo $x \in M$. Reemplazando γ por $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$ para cada curva γ que une x con y, se deduce que $d_b(x, y) = d_b(y, x)$. La igualdad (9.1) nos dice que

$$d_b(x, y) \leq d_b(x, z) + d_b(z, y)$$

para todo $x, y, z \in M$. Es decir d_b es una pseudo-distancia en M. En ciertos casos es evidente pero en otros hay que verificar que $d_b(x, y) = 0$ implica $x = y$.

Observación 9.1.1. Por los mismos motivos que en el caso de arcos continuos y rectificables, en general podemos suponer que γ es inyectiva y en particular $\dot{\gamma} \neq 0$ salvo tal vez finitos puntos o un conjunto de medida nula en el intervalo. De esta manera podemos pensar a las curvas C^1 a trozos parametrizadas con velocidad constante en el intervalo $[0, 1]$ (ver la Observación 8.1.5). En ese caso diremos que γ está *adaptada* a M y se tiene $\|\dot{\gamma}\|_\gamma = cte = L_b(\gamma)$.

9.1.1.1. Las variedades de Finsler

Proposición 9.1.2. *Para toda curva C^1 a trozos vale $\ell(\gamma) \leq L_b(\gamma)$ y el espacio (pseudo)-métrico (M, d_b) es un espacio de métrica interior.*

Demostración. La desigualdad $d_\ell \geq d_b$ vale siempre tomando la partición trivial (Observación 8.1.7). Por otra parte, si γ es una curva C^1 a trozos que une $x, y \in M$, entonces

$$d_\ell(x, y) \leq \ell(\gamma) = \sup_\pi \ell(\gamma, \pi).$$

Pero para cada partición π del intervalo $[a, b]$, se tiene

$$d_b(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq L_b(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]})$$

luego

$$\ell(\gamma, \pi) \leq \sum L_b(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}) = L_b(\gamma),$$

es decir

$$d_\ell(x, y) \leq \ell(\gamma) \leq L_b(\gamma),$$

y tomando ínfimo sobre las curvas γ que son C^1 a trozos que unen x con y se tiene la otra desigualdad $d_\ell \leq d_b$. □

9.1.2. Normas acotadas y compatibles

Recordemos que, fijada la norma $\|\cdot\|_E$ del espacio de Banach E, consideramos, para cada $p \in M$, al espacio vectorial T_pM como un espacio de Banach con la misma norma via la identificación natural $T_pM \simeq E$.

Definición 9.1.3. Dada una norma de Finsler $b : TM \to \mathbb{R}_+$ sobre M variedad diferenciable modelada por el espacio de Banach E, diremos que b es *acotada superiormente* si para cada punto $p \in M$ existe una carta (U, φ) alrededor de p y una constante $m_p > 0$ de manera que

$$m_p \|v\|_x \leq \|\varphi_{*x} v\|_E$$

para todo $x \in U$, para todo $v \in T_xM$. Diremos que b es *acotada inferiormente* si para cada punto $p \in M$ existe una carta (U, φ) alrededor de p y una constante $\mathcal{M}_p > 0$ de manera que

$$\|\varphi_{*x} v\|_E \leq \mathcal{M}_p \|v\|_x$$

para todo $x \in U$, para todo $v \in T_xU$. Diremos que b es *acotada*, si es acotada superiormente e inferiormente, es decir para cada $p \in M$ existe una carta (U, φ) alrededor de p de manera que

$$m_p \|v\|_x \leq \|\varphi_{*x} v\|_E \leq \mathcal{M}_p \|v\|_x$$

para todo $x \in U$, para todo $v \in T_xU$.

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 252

Observación 9.1.4. Si bien la terminología recién introducida es clara y en algún sentido clásica, en trabajos recientes se ha impuesto la siguiente denominación alternativa, por la que optaremos en lo que sigue. Si $\mathfrak{b} : TM \to \mathbb{R}_+$ es una métrica de Finsler, diremos que M es una *variedad de Finsler*, mientras que si $\mathfrak{b}$ es acotada superiormente diremos que M es una *variedad de Finsler débil*, y si $\mathfrak{b}$ es acotada diremos que M es una *variedad de Finsler fuerte*.

Teorema 9.1.5. *Si M es una variedad diferenciable de dimensión finita y $\mathfrak{b} : TM \to \mathbb{R}_+$ es una métrica de Finsler, entonces M es una variedad de Finsler fuerte, es decir $\mathfrak{b}$ es acotada.*

Demostración. Dado $p \in M$, tomemos una carta (U, φ) alrededor de p, con $\varphi(p) = 0 \in E$. Achicando U podemos suponer que existe $r > 0$ tal que $\overline{B}_r(0) \subset \varphi(U)$. Sea $T\varphi = (\varphi, \varphi_*)$ la carta que trivializa $TU \simeq \varphi(U) \times E$. Si $S = \{x \in E : \|x\|_E = 1\}$ es la esfera unitaria, consideremos el conjunto compacto

$$C = T\varphi^{-1}\overline{B}_r(0) \times S \subset TM.$$

La función $\mathfrak{b} : C \to \mathbb{R}$ alcanza máximo y mínimo por ser continua, es decir existen puntos $x, y \in \varphi^{-1}\overline{B}_r(0) \subset U$ y vectores $v \in T_xM$, $w \in T_yM$ tales que $\|\varphi_{*x}v\|_E = 1$, $\|\varphi_{*y}w\|_E = 1$ y

$$\mathfrak{b}(x, v) \leq \mathfrak{b}(q, z) \leq \mathfrak{b}(y, w)$$

para todo $(q, z) \in C$. Como v, w son enviados a la esfera, son no nulos. Ponemos $m = \mathfrak{b}(x, v) = \|v\|_x > 0$, $M = \mathfrak{b}(y, w) = \|w\|_y > 0$ y entonces si $z \neq 0$,

$$m \leq \left\| \frac{z}{\|\varphi_{*q}z\|_E} \right\|_q \leq M$$

con lo cual

$$m\,\|\varphi_{*q}z\|_E \leq \|z\|_q \leq M\,\|\varphi_{*q}z\|_E$$

para todo $q \in U = \varphi^{-1}B_r(0)$ y todo $z \in T_qM$. □

Estudiemos qué implican estas condiciones de acotación. En primer lugar, hay que tener en cuenta que si vale la condición para alguna carta, entonces vale para cualquier otra (en el mismo entorno), pues los mapas de transición son difeomorfismos y por ende acotados en un entorno de p. Achicando y trasladando, supondremos que $\varphi(p) = 0 \in E$ y que $\varphi(U) = B_r(0) \subset E$. Sean $x, y \in U$, y sea $\alpha : [a, b] \to M$ una curva suave a trozos que los une, $\alpha \subset U$. Sea $\Gamma = \varphi \circ \alpha : [a, b] \to \varphi(U) \subset E$ la levantada a la bola en E. Entonces las tres condiciones de acotación quieren decir respectivamente, integrando en $[a, b]$, que

$$m L_{\mathfrak{b}}(\alpha) \leq L(\Gamma),$$

$$L(\Gamma) \leq \mathcal{M} L_b(\alpha), \tag{9.2}$$
$$m L_b(\alpha) \leq L(\Gamma) \leq \mathcal{M} L_b(\alpha),$$

donde $L(\Gamma)$ denota la longitud usual de Γ en el espacio de Banach E dada por

$$L(\Gamma) = \int_a^b \|\dot{\Gamma}\|_E \, dt.$$

Recordemos que en un espacio normado, el segmento es una curva corta que une los extremos (ver la Observación 6.1.1), aunque eso no impide que pueda haber otros caminos cortos.

Si consideramos el segmento $\Gamma(t) = \varphi(x) + t(\varphi(y) - \varphi(x)) \in B_r(0)$, se deduce en el primer caso que, como $d_b(x, y) \leq L_b(\alpha)$ para cada $\alpha \subset U$ que une x con y, se tiene

$$m d_b(x, y) \leq \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_E. \tag{9.3}$$

Mientras que en el segundo caso como $\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_E \leq L(\Gamma)$ para toda Γ también se tiene

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_E \leq \mathcal{M} L_b(\alpha). \tag{9.4}$$

Finalmente, si b es acotada juntando las dos condiciones de arriba obtenemos.

$$m d_b(x, y) \leq \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_E \leq \mathcal{M} L_b(\alpha), \tag{9.5}$$

En el primer caso diremos que *la métrica* d_b *está acotada superiormente*, o que M es una *variedad de Finsler débil*. Una condición suficiente para ello es la siguiente.

Lema 9.1.6. *Supongamos que* $b : TM \to \mathbb{R}$ *es localmente Lipschitz. Entonces la métrica* d_b *está acotada superiormente.*

Demostración. La condición nos dice que, dados $V = (p, v) \in TM$, $W = (q, w) \in TM$ suficientemente cerca, entonces existe una constante $K > 0$ que depende del entorno de V tal que, en una carta (U, φ) allí, se tiene

$$|b(W) - b(V)| \leq K\|\varphi(q) - \varphi(p)\|_E + K\|\varphi_{*q} w - \varphi_{*p} v\|_E.$$

Achicando, suponemos que $\varphi(U)$ es una bola centrada en el origen de E. Sean $x, y \in U$, sea $S(t) = \varphi(x) + t(\varphi(x) - \varphi(y))$ el segmento que los une en la bola, $t \in [0, 1]$. Pongamos $x = p$, $q = \alpha(t) = \varphi^{-1} S(t)$ que es una curva suave en U que une x con y. Tomemos $w = \dot{\alpha} \in T_q M$, $v = 0 \in T_x M$. Entonces nos queda $\varphi_{*q} w = \dot{S}$, luego

$$|\,\|\dot{\alpha}\|_\alpha - 0| \leq Kt\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_E + K\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_E.$$

Integrando respecto de t en $[0, 1]$ se obtiene $L_b(\alpha) \leq 3/2 K\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_E$, lo que prueba (9.3) con $m = \frac{2}{3K}$. □

Volviendo a las otras condiciones ($\mathfrak{b}$ acotada inferiormente y $\mathfrak{b}$ acotada), uno estaría tentado de tomar ínfimo sobre las curvas α a la derecha de (9.4) y de (9.5) para obtener allí también $d_{\mathfrak{b}}(x,y)$. Pero las curvas α que estamos considerando son especiales en el sentido que $\alpha \subset U$ es una restricción.

Observación 9.1.7. Denotemos con $S_r = \partial B_r(0)$ la esfera de radio r en E. Afirmamos que $d = \operatorname{dist}(S_r, S_{r/2}) = r/2$. Supongamos que $d < r/2$, entonces existen $x \in S_{r/2}$, $y \in S_r$ tales que $\|x-y\| < r/2$. Pero

$$r/2 = r - r/2 = \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| < r/2$$

es una contradicción, luego $d \geq r/2$. La otra desigualdad es trivial.

El siguiente resultado está adaptado del libro de H. Upmeier [87].

Lema 9.1.8. *Si $\mathfrak{b}$ es acotada inferiormente (9.4), entonces todo abierto de M es un abierto de (M,d). Además para x,y suficientemente cerca existe una carta (U,φ) tal que*

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_E \leq \mathcal{M} d_{\mathfrak{b}}(x,y).$$

En particular $d_{\mathfrak{b}}$ es una distancia en M, es decir $d_{\mathfrak{b}}(x,y) = 0$ implica $x = y$.

Demostración. Tomamos una carta (U,φ) alrededor de x donde $\mathfrak{b}$ es acotada inferiormente, y de manera que $\varphi(U) = B_r(0) \subset E$. Achicando U podemos suponer que φ esté definida en un entorno un poco más grande de U. Sean $\alpha : [0,1] \to M$ una curva suave a trozos tal que $\alpha(0) = x$, $J \subset [0,1]$ la componente conexa de $\alpha^{-1}(U)$ que contiene a $t = 0$. Entonces si $\mathfrak{b}$ es acotada inferiormente (9.4),

$$\sup_{t\in J} \|\varphi(x) - \varphi(\alpha(t))\|_E \leq \mathcal{M} L_{\mathfrak{b}}(\alpha|_J) \leq \mathcal{M} L_{\mathfrak{b}}(\alpha). \tag{9.6}$$

Afirmamos que si $t_0 \leq 1/\mathcal{M}\operatorname{dist}(\varphi(x), S_r)$ (la distancia en el espacio de Banach E), entonces $B_{t_0}(x) \subset U$. Tomemos $z \in B_{t_0}(x)$, supongamos que $z \notin U$, entonces tomando una curva α que une x con z, se tiene

$$\sup_{t\in J} \|\varphi(x) - \varphi(\alpha(t))\|_E \geq \operatorname{dist}(\varphi(x), S_r)$$

pues $\varphi \circ \alpha$ se sale de $B_r(0)$ en E. Si $d_{\mathfrak{b}}(z,x) < t_0$, existe una curva $\alpha \subset M$ que une x con z tal que

$$L_{\mathfrak{b}}(\alpha) < t_0 = 1/\mathcal{M}\operatorname{dist}(\varphi(x), S_r).$$

Juntando estas desigualdades se tiene la contradicción

$$\operatorname{dist}(\varphi(x), S_r) \leq \sup_{t\in J} \|\varphi(x) - \varphi(\alpha(t))\|_E \leq \mathcal{M} L_{\mathfrak{b}}(\alpha) < \operatorname{dist}(\varphi(x), S_r).$$

Estamos suponiendo que $U = \varphi^{-1}B_r(0)$. Tomemos $V = \varphi^{-1}B_{r/2}(0)$ y la restricción de φ al abierto $V \subset M$. Afirmamos que

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_E \leq \mathcal{M} d_b(x, y).$$

para $x, y \in V$. Supongamos que no es así, entonces existen $x, y \in V$ tales que $\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_E > \mathcal{M} d_b(x, y)$, luego existe una curva $\gamma \subset M$ suave a trozos con $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ y además

$$\mathcal{M} L_b(\gamma) < \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_E \leq r.$$

Luego, por (9.6), se tiene

$$\sup_{t \in J} \|\varphi(x) - \varphi(\gamma(t))\|_E < \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_E.$$

Si fuera $\gamma \subset U$, entonces se tendría $J = [0, 1]$ lo que nos lleva a la contradicción

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_E \leq \sup_{t \in J} \|\varphi(x) - \varphi(\alpha(t))\|_E < \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_E.$$

Luego γ se sale de U, o equivalentemente $\varphi \circ \gamma$ se sale de $B_r(0)$, es decir $(\varphi \circ \gamma) \cap S_r \neq \emptyset$. Entonces también $\varphi \circ \gamma$ toca $S_{r/2}$ al menos dos veces (una vez al ir y otra al volver). Luego

$$L(\varphi \circ \gamma) \geq r/2 + r/2 = r,$$

con lo cual $\mathcal{M} L_b(\gamma) \geq L(\varphi \circ \gamma) \geq r$, y esto es una contradicción. Por último, veamos que d_b es una métrica. Sean $x, y \in M$ con $d_b(x, y) = 0$, (U, φ) carta de M alrededor de x, con $\varphi(x) = 0$ donde vale la desigualdad del enunciado,

$$\|\varphi(y)\| \leq \mathcal{M} d_b(x, y).$$

Si $y \notin U$, existe $r > 0$ tal que $y \notin B_r(x)$ luego $d_b(x, y) \geq r$ lo cual es absurdo. Luego $y \in U$, y entonces $0 = d_b(x, y)$ implica $\varphi(y) = 0$, luego $x = y$. □

Corolario 9.1.9. *Si vale (9.5), es decir si b es acotada, para $x, y \in U$ se tiene*

$$m d_b(x, y) \leq \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_E \leq \mathcal{M} d_b(x, y),$$

y las topologías de M como variedad sobre E y de (M, d) como espacio métrico son equivalentes.

Es decir, las variedades de Finsler fuertes son extensiones buenas de las variedades de Finsler de dimensión finita.

9.1.2.1. Hopf-Rinow en variedades de Finsler

De acuerdo a la terminología de espacios de métrica interior, diremos que una curva continua $\gamma : [a, b] \to (M, d_b)$ es una geodésica corta si su longitud coincide con la distancia entre los puntos que une.

Es conveniente comparar el siguiente resultado con los resultados y ejemplos de la Sección 10.4 del contexto Riemanniano.

Corolario 9.1.10 (Hopf-Rinow). *Si el espacio de Banach que modela M es de dimensión finita y (M, d_b) es completo, entonces dados x, y en M existe una geodésica corta (continua) que los une.*

Demostración. El espacio métrico (M, d_b) es localmente compacto pues E lo es, y al ser (M, d_b) de métrica interior, se tiene el corolario por el Teorema 8.2.3. □

Observación 9.1.11. Si localmente se puede reemplazar curvas cortas γ por curvas μ_i de clase C^1, que resulten cortas, entonces todo par de puntos $x, y \in M$ se puede unir con una curva C^1 a trozos tal que $L_b(\beta) = d_b(x, y)$. Esto es porque si π es una partición del intervalo $[0, 1]$ de manera que, en la curva corta continua γ del corolario previo, los puntos $\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})$ están suficientemente cerca, entonces reemplazando γ en ese intervalo por μ_i y definiendo

$$\beta = \mu_1 \sharp \ldots \sharp \mu_n$$

como la concatenación de las curvas μ_i, se tiene

$$\begin{aligned} L_b(\beta) &= \sum_i L_b(\beta_i) = \sum_i d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = \sum_i \ell(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}) \\ &= \ell(\gamma) = d_b(x, y). \end{aligned}$$

9.2. Variedades de Finsler con spray

Una variedad M sobre un espacio de Banach E, provista de una norma $b : TM \to [0, +\infty)$ como en la sección anterior, que defina una pseudo-distancia $d_b : M \times M \to [0, +\infty)$, la denominaremos una *variedad de Banach-Finsler* o directamente una variedad *Finsleriana* y denotaremos con (M, d_b) al espacio métrico inducido. Diremos que M es *métricamente completa para* b si (M, d_b) resulta un espacio métrico completo. Si b es acotada superiormente, diremos que M es una variedad de Finsler débil, mientras que si b es acotada, diremos que M es una variedad de Finsler fuerte.

En el caso de que M tenga un spray dado $F : TM \to TTM$, diremos que M es una variedad *Finsleriana con spray* si M es Finsleriana y la métrica b es invariante por el transporte paralelo del spray a lo largo de geodésicas. Es decir si para toda

geodésica del spray $\alpha \subset M$, y para todo $z \in T_{\alpha(s)}M$, para todo $s,t \in \mathrm{Dom}(\alpha)$, se verifica

$$\|P_s^t(\alpha)z\|_{\alpha(t)} = \|z\|_{\alpha(s)}.$$

Como el transporte paralelo de $\dot\alpha(s)$ es simplemente $\dot\alpha(t)$, se tiene

$$\|\dot\alpha(t)\|_{\alpha(t)} = cte = \|v\|_p$$

si $\alpha(t) = \exp_p(tv)$. Es decir, las geodésicas tienen velocidad constante.

El siguiente resultado se relaciona con el Teorema de Hopf-Rinow del contexto Riemanniano (Teorema 10.4.3).

Proposición 9.2.1. *Si M es una variedad de Finsler fuerte con spray, entonces cada una de las siguientes afirmaciones implica la que le sigue:*

1. *El espacio (M, d_b) es completo.*
2. *Todas las geodésicas de M están definidas en todo $\mathbb{R}$.*
3. *M es geodésicamente completa, es decir $\mathcal{D}(\exp) = TM$.*
4. *Existe $p \in M$ tal que $\mathrm{Dom}(\exp_p) = T_pM$.*

Demostración. La única afirmación que hay que probar es $1 \Rightarrow 2$, las demás son triviales. Para verlo, sea $\alpha = \exp_p(tv)$ una geodésica, supongamos que $\mathrm{Dom}(\alpha) = (a,b)$ con $0 < b < \infty$. Sea $\{t_n\} \subset (a,b)$ una sucesión que crece hasta b. Entonces es una sucesión de Cauchy, pero para $m > n$ se tiene

$$d_b(\alpha(t_n), \alpha(t_m)) \le L_b(\alpha|_{[t_n,t_m]}) = \int_{t_n}^{t_m} \|\dot\alpha(t)\|_{\alpha(t)}dt = (t_m - t_n)\|v\|_p,$$

lo que nos dice que $\{\alpha(t_n)\} \subset M$ es de Cauchy y por hipótesis converge a un punto $q \in M$. Tomemos un entorno normal W de $q \in M$ como en el Teorema 6.2.3, con la exponencial definida en $B_r(0)$ para todo $y \in W$. Como la métrica es acotada, podemos tomar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(t_k) \in W$ y $t_k > b - r$ para todo $k \ge k_0$. Consideremos

$$\mu(s) = \exp_{\alpha(t_k)}(s\dot\alpha(t_k))$$

definida por lo menos en $(-r, r)$. Esta resulta una geodésica del spray, que coincide con $\alpha(t_k)$ en $s = 0$ y tiene la misma velocidad inicial allí. Luego por unicidad μ coincide con α, es decir $\alpha(s + t_k) = \mu(s)$. Pero $s + t_k > b$ si s está suficientemente cerca de r, lo que contradice que α estaba definida sólo en (a,b). □

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 258

9.3. Métricas de Finsler vía operadores acotados

Supongamos que en una carta (U, φ) de M fijamos una norma en E, no necesariamente compatible con la topología de E. Supongamos que tenemos una sección continua $p \mapsto A_p$ con $A_p \in GL(E)$ para todo $p \in U$. Esto nos permite introducir una norma en cada espacio tangente de la siguiente manera

$$\|v\|_p = \|A_p \varphi_{*p} v\|,$$

para todo $v \in T_pM$, para todo $p \in U$. Con nuestra identificación habitual de T_pM con E, podemos denotar esto como $\|v\|_p = \|A_p v\|$ sin posibilidad de confusión. Esto nos define una métrica de Finsler $\mathfrak{b} : TU \to \mathbb{R}$ de manera obvia,

$$\mathfrak{b}(V) = \mathfrak{b}(p, v) = \|v\|_p.$$

Observemos que $\|v\|_p \leq \|A_p\|\|v\|$ y $\|v\| \leq \|A_p^{-1}\|\|v\|_p$, luego usando la continuidad de $p \mapsto A_p$, las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_p$ son localmente equivalentes y en particular si $\|\cdot\|$ daba la topología de E, entonces $\mathfrak{b} : TU \to \mathbb{R}$ es una norma acotada.

Si podemos hacer esto en un cubrimiento por cartas de M, de manera que en las intersecciones las secciones A coincidan (por ejemplo si M admite particiones de la unidad), entonces podemos definir así una métrica de Finsler $\mathfrak{b} : TM \to \mathbb{R}$ en M. La condición de compatibilidad que se debe cumplir en la intersección $U \cap V$ para obtener allí la misma norma es la siguiente: si (V, ψ) es otra carta con una asignación $q \mapsto B_q \in GL(E)$, necesitamos que

$$\|A_p \varphi_{*p} v\| = \|B_p \psi_{*p} v\|$$

para todo $p \in U \cap V$, para todo $v \in T_pM$.

Observación 9.3.1. En particular, si M tiene dimensión finita, toda norma así definida es acotada y por ende $(M, d_{\mathfrak{b}})$ es una variedad de Finsler fuerte.

Observación 9.3.2. Si $\|\cdot\|$ es alguna norma en E (no necesariamente equivalente a la norma original del espacio de Banach E) entonces una construcción similar a la recién introducida nos permite definir una métrica de Finsler en M que no es necesariamente acotada. Y es evidente que esta métrica será acotada superiormente si la norma introducida es continua, es decir si existe $C > 0$ de manera que

$$\|v\| \leq C\|v\|_E \text{ para todo } v \in E,$$

donde $\|\cdot\|_E$ denota aquí la norma de E que lo hace espacio de Banach.

9.4. Métricas invariantes

Un caso particular de la discusión de la sección previa es el siguiente. Sea G un grupo de Lie-Banach, $\mathfrak{g} = T_1G$ su álgebra de Lie-Banach. Como $T_gG = L_gT_1G$ y $TG \simeq G \times \mathfrak{g}$ via los difeomorfismos $L_g : v \mapsto gv$, dada una norma fija $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}}$ en $\mathfrak{g}$, podemos definir, para $w \in T_gG$,

$$\|w\|_g := \|L_{g^{-1}}w\|_{\mathfrak{g}}.$$

En este caso se obtiene una norma $\mathfrak{b} : TG \to \mathbb{R}_+$ que es acotada puesto que, para $g \in G$, si consideramos la carta alrededor de g dada por $\varphi^{-1} = L_g \exp : B \subset \mathfrak{g} \to G$ con B entorno de cero suficientemente pequeño como para que exp sea un difeomorfismo con su imagen, si $h = \varphi(x) \in U = \varphi^{-1}(B)$ y $v \in T_hU$, entonces

$$\varphi_{*h}v = (L_g \exp)^{-1}_{*h}v = (\exp_{*x})^{-1}L_{g^{-1}}v,$$

luego

$$L_{h^{-1}}v = L_{h^{-1}g}(\exp_{*x})\varphi_{*h}v = A_hv,$$

con $A_h = L_{h^{-1}g}(\exp_{*x})\varphi_{*h}$ que es claramente un operador lineal inversible que depende suavemente de $h \in U$. Esta métrica se denomina *métrica invariante a izquierda* en G, pues verifica

$$\|L_hw\|_{hg} = \|w\|_g$$

para todo $h, g \in G$, para todo $w \in T_gG$. De hecho, es fácil ver que toda métrica invariante a izquierda en G se construye de esta manera.

9.4.1. Métricas invariantes y el spray canónico

Recordemos que el spray canónonico $F : TG \to TTG$ está dado por $F(w) = wg^{-1}w$ para $g \in G$ y $w \in T_gG$, y que el nombre se debe a que las geodésicas del spray canónico son las curvas a un parámetro $\alpha(t) = ge^{tv}$ donde e^x denota la exponencial del grupo como grupo de Lie-Banach, en el caso concreto del grupo de inversibles de un álgebra de Banach, está dada por la serie de potencias usual. Recordemos (Ejemplo 7.6.3 en la Sección 7.6) que el transporte paralelo a lo largo de las geodésicas está dado por

$$P(\alpha)^1_0 z = ge^{\frac{1}{2}v}g^{-1}ze^{\frac{1}{2}v}$$

para $z \in T_gG$. Veamos en qué casos esta métrica invariante a izquierda es compatible con el spray. Debería ocurrir que

$$\|e^{-\frac{1}{2}v}g^{-1}ze^{\frac{1}{2}v}\|_{\mathfrak{g}} = \|ge^{\frac{1}{2}v}g^{-1}ze^{\frac{1}{2}v}\|_{ge^v} = \|z\|_g = \|g^{-1}z\|_{\mathfrak{g}},$$

es decir, llamando $w = g^{-1}v \in \mathfrak{g}$, que

$$\|e^{-\frac{1}{2}v} w e^{\frac{1}{2}v}\|_{\mathfrak{g}} = \|w\|_{\mathfrak{g}}$$

para todo $v, w \in \mathfrak{g}$. Equivalentemente, $e^{ad v} = Ad_{e^v} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ debe ser una isometría para la norma dada, para todo $v \in \mathfrak{g}$. En general, esto es falso por supuesto. Pero en el caso del grupo de isometrías de un álgebra de Banach, es evidentemente cierto si la norma es la original del álgebra (en particular para el grupo de unitarios de un álgebra C^* con la norma uniforme). También dada cualquier norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ unitariamente invariante en el álgebra $\mathcal{A}$, se observa que la métrica es compatible con el spray canónico.

9.4.2. Espacios homogéneos y métricas cocientes

Dado un espacio homogéneo $\mathcal{O} = G \cdot x_0 = G/K$ de un grupo de Lie-Banach G, si el grupo tiene una métrica de Finsler $\mathfrak{b} : TG \to \mathbb{R}_+$ bi-invariante, podemos considerar el espacio (pseudo)-métrico $(G, d_{\mathfrak{b}})$. Si el subgrupo K es cerrado para esta métrica, es relativemente sencillo probar que

$$\dot{d}(gK, hK) = \inf_{k_1, k_2 \in K} d_{\mathfrak{b}}(gk_1, gk_2)$$

es una distancia en el cociente $\mathcal{O}$. Esto es, se toma la distancia entre las fibras $gK, hK \subset G$ que son conjuntos cerrados disjuntos, y esto define una distancia entre clases en el cociente.

Por otra parte, podemos considerar en $\mathcal{O}$ que es una variedad diferenciable bajo ciertas hipótesis de regularidad del mapa cociente, la *métrica cociente* $\mathfrak{b}_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}_+$. Esta se define de la siguiente manera: si $\mathfrak{k}$ es el álgebra de Lie-Banach del grupo de isotropía K, y $\pi = \pi_{x_0} : G \to \mathcal{O}$ es la proyección $\pi(h) = h \cdot x_0$, entonces para $x = g \cdot x_0 \in \mathcal{O}$ y $[w] = \pi_* w \in T_x\mathcal{O}$ ponemos

$$\|[w]\|_x := \inf_{k \in \mathfrak{k}} \|w - gk\|_g.$$

Esta definición no depende del $w \in T_gG$ que define la clase $[w] \in T_{g \cdot x_0}\mathcal{O}$, y tampoco del $g \in G$ tal que $g \cdot x_0 = x$. Definimos $d_{\mathcal{O}}$ como la distancia inducida por la métrica de Finsler cociente en $\mathcal{O}$.

Sean $g, h \in G$, $k_1, k_2 \in K$, sea $\Gamma \subset G$ que une gk_1 con gk_2. Entonces si $\gamma = \pi \circ \Gamma \subset \mathcal{O}$ se tiene que γ une $g \cdot x_0$ con $h \cdot x_0$. Además

$$\|\dot{\gamma}\|_\gamma := \inf_{k \in \mathfrak{k}} \|\dot{\Gamma} - \Gamma k\|_\Gamma \leq \|\dot{\Gamma}\|_\Gamma,$$

luego

$$L_{\mathcal{O}}(\gamma) \leq L_{\mathfrak{b}}(\Gamma).$$

Entonces

$$d_{\mathcal{O}}(g \cdot x_0, h \cdot x_0) \leq L_b(\Gamma),$$

y tomando ínfimo sobre todas las curvas Γ de estas características se tiene

$$d_{\mathcal{O}}(g \cdot x_0, h \cdot x_0) \leq d_b(gk_1, hk_2).$$

Tomando ahora ínfimo sobre $k_1, k_2 \in K$, descubrimos que siempre vale la desigualdad

$$d_{\mathcal{O}} \leq \dot{d}.$$

Respecto de la otra desigualdad, en general para obtenerla es necesario tener suplementos en G que provean de curvas cortas en el cociente, o al menos aproximaciones de las mismas. Ejemplos de esto en espacios homogéneos del grupo unitario de un álgebra de operadores pueden hallarse en los trabajos [5, 8, 35, 36] de Andruchow, Durán, Chiumiento, Larotonda, Mata-Lorenzo y Recht.

9.4.3. Operadores positivos con métricas simétricas

Dada una C^*-álgebra $\mathcal{A}$, recordemos que denotamos con $G_{\mathcal{A}}^+$ al cono de operadores positivos e inversibles de $\mathcal{A}$. Según vimos (Ejemplo 7.6.5.2), se puede reducir el spray canónico del grupo total de inversibles a este cono, para obtener las geodésicas

$$\gamma_{a,b}(t) = a \exp(t \log(a^{-1}b)) = a^{1/2} \left(a^{-1/2} b a^{-1/2}\right)^t a^{1/2}$$

que une $a, b \in G_{\mathcal{A}}^+$. El transporte paralelo a lo largo de $\gamma_{a,b}$ está dado por

$$P(\gamma) z = a^{1/2} (a^{-1/2} b a^{-1/2})^{1/2} a^{-1/2} z a^{-1/2} (a^{-1/2} b a^{-1/2})^{1/2} a^{1/2}$$

para $z = z^* \in T_a G_{\mathcal{A}}^+ = \mathcal{A}_h$. Sea $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ una norma simétrica en $\mathcal{A}$ (Apéndice D.2), entonces definimos

$$\|v\|_a := \|a^{-1/2} v a^{-1/2}\|_{\mathcal{I}}$$

para $a \in \mathcal{I}$, $v \in \mathcal{I}_h$. El espacio

$$G_{\mathcal{A}}^+ = \{a \in G_{\mathcal{A}}^+ : a - 1 \in \mathcal{I}\}$$

es un espacio homogéneo del grupo de inversibles

$$G_{\mathcal{A}} = \{g \in G_{\mathcal{A}} : g - 1 \in G_{\mathcal{A}}\}$$

por la acción $a \mapsto gag^*$. Esta acción es transitiva y su grupo de isotropía en $a = 1$ es el grupo de operadores unitarios

$$\mathcal{U}_{\mathcal{I}} = \{u \in \mathcal{U} : u - 1 \in \mathcal{I}\}$$

Esta métrica tiene la siguiente propiedad: es invariante por la acción mencionada. La prueba es elemental,

$$\begin{aligned}\|gvg^*\|_{gag^*} &= \|(gag^*)^{-1/2}gvg^*(gag^*)^{-1/2}\|_{\mathcal{I}} \\ &= \|(gag^*)^{-1/2}ga^{1/2}\cdot a^{-1/2}va^{-1/2}\cdot a^{1/2}g^*(gag^*)^{-1/2}\|_{\mathcal{I}}.\end{aligned}$$

Llamando $u = (gag^*)^{-1/2}ga^{1/2}$ se tiene que $u \in \mathcal{U}$ y entonces

$$\|gvg^*\|_{gag^*} = \|ua^{-1/2}va^{-1/2}u^*\|_{\mathcal{I}} = \|a^{-1/2}va^{-1/2}\|_{\mathcal{I}} = \|v\|_a. \tag{9.7}$$

En particular, el transporte paralelo a lo largo de geodésicas es una isometría (basta inspeccionar la expresión arriba mencionada de P) y entonces la métrica es compatible con el spray. A partir de esta propiedad es fácil ver que

$$L_{\mathcal{I}}(\gamma_{a,b}) = \|\ln(a^{-1/2}ba^{-1/2})\|_{\mathcal{I}}$$

(Ejercicio 9.III). Esta métrica tiene una propiedad adicional, que enunciamos como un lema a continuación. Esta propiedad está fuertemente vinculada al teorema de Cartan que abordamos en la próxima sección. Recordemos que la expresión de la exponencial de este spray está dada por

$$\exp_a(z) = a^{1/2}\exp(a^{-1/2}za^{-1/2})a^{1/2}.$$

Se trata de un difeomorfismo global, por lo observado en el Teorema 4.6.1.

Lema 9.4.1. *Para todo $a \in G_{\mathcal{I}}^+$, $v, w \in \mathcal{I}_h$ y toda norma unitariamente invariante $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ en $\mathcal{A}$ se verifica*

$$\|(\exp_a)_{*v}w\|_{\exp_a(v)} \geq \|w\|_a.$$

Demostración. Llamemos $x = a^{-1/2}va^{-1/2}$, $y = a^{-1/2}wa^{-1/2}$. A partir de la expresión de la exponencial en $a \in G_{\mathcal{A}}^+$, considerando una curva $z = z(t) \subset G_{\mathcal{A}}^+$ tal que $z(0) = v$, $\dot{z}(0) = w$, obtenemos

$$(\exp_a)_{*v}w = a^{1/2}\,[\exp_{*x}y]\,a^{1/2},$$

donde ahora exp denota la exponencial usual del álgebra y $\exp_{*x}$ denota la diferencial de la exponencial en $x \in \mathcal{A}$. Por otra parte $\exp_a(v) = a^{1/2}e^x a^{1/2}$, luego

$$\|(\exp_a)_{*v}w\|_{\exp_a(v)} = \|a^{1/2}\,[\exp_{*x}y]\,a^{1/2}\|_{a^{1/2}e^x a^{1/2}}.$$

Tomando $g = a^{1/2}$, $b = e^x$, $v = \exp_{*x}y$, y usando que la métrica es invariante por la acción $b \mapsto gbg^*$, se tiene

$$\|(\exp_a)_{*v}w\|_{\exp_a(v)} = \|\exp_{*x}y\|_{e^x} = \|e^{-\frac{x}{2}}\,[\exp_{*x}y]\,e^{-\frac{x}{2}}\|_{\mathcal{I}}.$$

Invocamos la fórmula de la diferencial de la exponencial (Teorema 4.6.1)

$$e^{-\frac{x}{2}} \exp_{*x}(y) e^{-\frac{x}{2}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{\mathrm{ad}^2 x}{4n^2\pi^2}\right)(y) = \prod_{k\neq 0} \left(1 - i\frac{\mathrm{ad}x}{2k\pi}\right)(y).$$

Ahora bien, consideremos el espacio de Banach $\mathcal{I}$ que se obtiene al completar $\mathcal{A}$ con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$. Consideremos a su vez el álgebra de Banach $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{I})$ de todos los operadores acotados en $\mathcal{I}$. Sea $c = \frac{x}{2k\pi} \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{Z} \neq 0$. Como $c^* = c$, se tiene que $e^{\pm ic} \in \mathcal{U}$, y entonces para todo $z \in \mathcal{A}$, y todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\|e^{it\,\mathrm{ad}c} z\|_{\mathcal{I}} = \|e^{itc} z e^{-itc}\|_{\mathcal{I}} = \|z\|_{\mathcal{I}}$$

pues la norma es unitariamente invariante. Por densidad, se deduce que el elemento $e^{i\,\mathrm{ad}c} \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{I})$ es una isometría, luego $\mathrm{ad}c \in \mathrm{Herm}(\mathcal{B})$ es decir $\mathrm{ad}c$ es elemento Hermitiano del álgebra (ver la Sección 4.5). Luego, por la Proposición 4.5.5, se tiene

$$\|(1 - i\frac{\mathrm{ad}x}{2k\pi})(y)\|_{\mathcal{I}} = \|(1 - i\mathrm{ad}c)y\|_{\mathcal{I}} \geq \|y\|_{\mathcal{I}}.$$

Entonces se tiene la desigualdad

$$\|\prod(1 - i\frac{\mathrm{ad}x}{2k\pi})(y)\|_{\mathcal{I}} \geq \|y\|_{\mathcal{I}} = \|a^{-1/2} w a^{-1/2}\|_{\mathcal{I}} = \|w\|_a$$

para cualquier producto finito, y tomando límite se tiene la desigualdad deseada

$$\|(\exp_a)_{*v} w\|_{\exp_a(v)} \geq \|w\|_a.$$

□

Observación 9.4.2. Recordemos que una norma de un espacio normado E se dice *estrictamente convexa* o *rotunda* si la esfera de E no contiene segmentos, o equivalentemente

$$\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$$

excepto en el caso particular en el que x, y están alineados. No es difícil ver que en un espacio normado con norma estrictamente convexa, la *única* curva corta que une dos vectores $v, w \in E$ es el segmento usual (Ejercicio 9.IV).

Como consecuencia de las observaciones previas, se tiene el siguiente teorema que caracteriza las curvas minimales.

Teorema 9.4.3. *Con las hipótesis del lema previo, $\gamma_{a,b}$ es una geodésica corta que une $a, b \in G_{\mathcal{I}}^+$, que resulta única si la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ es estrictamente convexa. En particular,*

$$d_{\mathcal{I}}(a, b) = L_{\mathcal{I}}(\gamma_{a,b}) = \|\ln(a^{-1/2} b a^{-1/2})\|_{\mathcal{I}}.$$

Demostración. Sea $\alpha \subset G_{\mathcal{I}}^{+}$ suave a trozos, sea $\Gamma = \ln \gamma$ el único logaritmo autoadjunto de γ, que también es suave a trozos pues ln es una función analítica. Afirmamos que

$$L_{\mathcal{I}}(\alpha) \geq L(\Gamma), \tag{9.8}$$

donde la última longitud es la longitud de arco usual en el espacio lineal $\mathcal{I}$ dada por $L(\Gamma) = \int \|\dot{\Gamma}\|_{\mathcal{I}}$. Y de aquí se sigue que

$$d_{\mathcal{I}}(\gamma(1), \gamma(0)) \geq \|\Gamma(1) - \Gamma(0)\|_{\mathcal{I}} \tag{9.9}$$

Para probar (9.8), observemos que como $\gamma = exp(\Gamma)$, entonces $\dot{\gamma} = \exp_{*\Gamma} \dot{\Gamma}$ con lo cual

$$\|\dot{\gamma}\|_{\gamma} = \|\gamma^{-1/2} \exp_{*\Gamma} \dot{\Gamma} \gamma^{-1/2}\|_{\mathcal{I}}$$

y este último término es por el lema previo mayor o igual que $\|\dot{\Gamma}\|_{\mathcal{I}}$. Integrando se obtiene la afirmación. Supongamos ahora que $\alpha \subset G_{\mathcal{I}}^{+}$ es una curva suave a trozos tal que $\alpha(0) = a$, $\alpha(1) = b$, y consideremos $\beta = a^{-1/2} \alpha a^{-1/2}$. Por la invariancia de la métrica (tomando $g = a^{-1/2}$ en la ecuación (9.7)), se obtiene

$$L_{\mathcal{I}}(\beta) = \int \|\dot{\beta}\|_{\beta} = \int \|a^{-1/2} \dot{\alpha} a^{-1/2}\|_{a^{-1/2} \alpha a^{-1/2}} = \int \|\dot{\alpha}\|_{\alpha} = L_{\mathcal{I}}(\alpha),$$

y por otra parte, como $\beta(0) = 1$, $\beta(1) = a^{-1/2} b a^{1/2} = e^{v}$, se tiene, invocando (9.9) que

$$L_{\mathcal{I}}(\beta) \geq d_{\mathcal{I}}(1, e^{v}) \geq \|v - 0\|_{\mathcal{I}} = L_{\mathcal{I}}(\gamma_{a,b}).$$

Es decir $L_{\mathcal{I}}(\alpha) \geq L_{\mathcal{I}}(\gamma_{a,b})$, y tomando ínfimo sobre todas las curvas α se obtiene la tesis. Supongamos ahora que la norma del ideal $\mathcal{I}$ es estrictamente convexa, si se llegara a tener que α es corta entonces

$$L(\ln(\beta)) \leq L_{\mathcal{I}}(\beta) = L_{\mathcal{I}}(\alpha) = L_{\mathcal{I}}(\gamma_{a,b}) = \|v\|_{\mathcal{I}}$$

esto querría decir que $\ln \beta$ es una curva corta que une 0 con v y por la unicidad debiera ser $\ln \beta(t) = tv$, luego $\beta(t) = e^{tv}$ con lo cual

$$\alpha(t) = a^{1/2} e^{tv} a^{1/2} = \gamma_{a,b}(t).$$

□

Antecedentes de este resultado para la norma uniforme de un álgebra de operadores pueden hallarse en los trabajos [28, 29] de A. Maestripieri, G. Corach y D. Stojanoff.

9.5. El teorema de Cartan

En esta sección probamos el teorema de Cartan para variedades de Finsler con spray que verifican una condición denominada como *curvatura semi-negativa*. La versión para superficies del teorema se debe a J. Hadamard [43] y se remonta al año 1896. Posteriormente (1946) Elié Cartan demostró el teorema para variedades Riemannianas abstractas [23]. En el año 1965, J. McAlpin extiende en su tesis doctoral [64] este resultado a variedades de Riemann-Hilbert, y recientemente, en 2002, K.-H. Neeb extiende el resultado a variedades de Finsler con spray [72], esta última es la versión que presentamos aquí.

Definición 9.5.1. Sea $f : M \to N$ una aplicación C^1 entre variedades diferenciables. Diremos que

1. f tiene la *propiedad de levantadas únicas de curvas* si para todo $y = f(p) \in N$ y toda curva $\gamma \subset N$ que sea C^1 a trozos y comience en y, existe una única curva $\Gamma \subset M$ que es C^1 a trozos que comienza en p y es una levantada de γ, es decir $\gamma = f \circ \Gamma$.

2. f es un *revestimiento* si f es sobreyectiva y para todo $y \in N$ existe un entorno abierto $U_y \subset N$ de manera que $f^{-1}(U_y)$ es una unión disjunta $\cup_{i\in I} V_i$ de abiertos en M, y $f|_{V_i} : V_i \to U_y$ es un difeomorfismo para todo $i \in I$.

Teorema 9.5.2. *Sean $(M, \mathfrak{b}_M)$ una variedad de Finsler fuerte completa y $(N, \mathfrak{b}_N, F_N)$ una variedad de Finsler fuerte, con spray y conexa. Sea $f : M \to N$ dos veces diferenciable y un difeomorfismo local tal que existe $C > 0$ de manera que*

$$\|f_* V\|_{\mathfrak{b}_N} \geq C\|V\|_{\mathfrak{b}_M}$$

para todo $V \in TM$. Entonces f tiene la propiedad de levantadas únicas de curvas, es un revestimiento y (N, d) es completa.

Demostración. Sean $y = f(p) \in N$, $z \in N$. Como N es conexa, existe una curva $\gamma : [0, 1] \to N$ adaptada a N de manera que $\gamma(0) = y$, $\gamma(1) = z$. Sea

$$L = \{t \in [0, 1] : \gamma|_{[0,t]} \text{ tiene una levantada única } \Gamma \subset M \text{ con } \Gamma(0) = p\}.$$

El conjunto L es no vacío pues $0 \in L$, y además es abierto pues f es un difeomorfismo local de clase C^1. Está claro que si $t_0 \in L$ entonces $[0, t_0] \in L$ pues se toma la restricción de la levantada para cada $s \in [0, t_0]$. Es decir, L es un intervalo de la pinta $[0, s)$ con $s \leq 1$. Sea $\Gamma : [0, s) \to M$ una levantada de $\gamma|_{[0,s)}$. Tomemos $t_n \nearrow s$, entonces

$$\begin{aligned} C d_M(\Gamma(t_n), \Gamma(t_m)) &\leq C L_{\mathfrak{b}_M}(\Gamma|_{[t_n,t_m]}) \leq L_{\mathfrak{b}_N}(\gamma|_{[t_n,t_m)}) \\ &= |t_n - t_m| L_{\mathfrak{b}_N}(\gamma), \end{aligned}$$

lo que prueba que $\Gamma(t_n)$ es de Cauchy en M y por ende converge a un punto q. Por la continuidad de f debe ser $\gamma(t_n) \to f(q)$ luego $f(q) = \gamma(s)$. Entonces

$$C d_M(\Gamma(t), q) \leq L_{\mathfrak{b}_N}(\gamma|_{[t,s]}) = |t - s| L_{\mathfrak{b}_N}(\gamma)$$

lo que prueba que $\lim_{t \to s^-} \Gamma(t) = q$. Si $s = 1$, ya terminamos. Si no es así, usando que f es un difeomorfismo local, podemos extender Γ más allá de s levantando γ, lo cual es absurdo. Esto prueba que f tiene la propiedad de levantadas únicas y además que f es sobreyectiva.

Ahora vamos a reducir el problema al caso en el que f es una isometría local, es decir que $\|f_* V\| = \|V\|$ para todo $V \in TM$. Para ello, consideramos la métrica $\mathfrak{b}^*_M$ en M dada por

$$\|V\|_{\mathfrak{b}^*_M} = \|f_* V\|_{\mathfrak{b}_N}$$

para $V \in TM$. Como f es un difeomorfismo local, esta métrica es acotada, es decir induce una métrica d_{M^*} localmente equivalente con la original de M y por ende con la misma topología. Es más, se tiene

$$\|V\|_{\mathfrak{b}^*_M} = \|f_* V\|_{\mathfrak{b}_N} \geq C \|V\|_{\mathfrak{b}_M}$$

globalmente luego $d_{\mathfrak{b}^*_M} \geq C\, d_{\mathfrak{b}_M}$ lo que nos dice que (M, d_{M^*}) es un espacio métrico completo pues si $\{x_n\}$ es de Cauchy, entonces es de Cauchy en (M, d_M) luego converge a un punto $x \in M$ y como la métrica es compatible, la convergencia también ocurre en (M, d_{M^*}).

Como f es un difeomorfismo local, existen abiertos $U \subset M$, $V \subset N$ tales que $f_* : TU \to TV$ es un difeomorfismo. Luego la diferencial de f_*, que denotaremos $T^2 f_V : T_V TM \to T_{f_* V} TN$, es una aplicación inversible en cada $V \in TM$. Ahora llevamos el spray de N para atrás, definiendo $F : TM \to TTM$ como

$$F(V) = (T^2 f)^{-1} F_N(f_* V).$$

En una carta, se tiene

$$T^2 f\, \Gamma_M(V, W) = \Gamma_N(f_* V, f_* W) \tag{9.10}$$

para $V, W \in TM$. Afirmamos que $(M, \mathfrak{b}_{M^*}, F)$ es una variedad de Finsler con spray, es decir que la métrica es invariante por transporte paralelo del spray. Sea $\alpha \subset M$ una geodésica tomemos $\beta = f \circ \alpha \subset N$. Se tiene

$$F_N(\beta') = F_N(f_* \alpha') = T^2 f F_M(\alpha') = T^2 f \alpha'' = \beta''$$

luego β es una geodésica de N. En particular

$$\exp^N \circ f_* = f \circ \exp^M . \tag{9.11}$$

Para $z \in T_{\alpha(0)}M$ y $\xi = \xi_z$ el transporte paralelo a lo largo de α determinado en forma única por la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \Gamma_M(\xi, \dot{\alpha}) \\ \xi(0) = z\,. \end{cases}$$

Sea $\eta \in TN$, $\eta \in Lev(f \circ \alpha)$ dada por $\eta = f_* \circ \xi$. Entonces $\eta(0) = f_* z$ y por (9.10)

$$\dot{\eta} = T^2 f \dot{\xi} = T^2 f \Gamma_M(\xi, \dot{\alpha}) = \Gamma_N(f_*\xi, f_*\dot{\alpha}) = \Gamma_N(\eta, (f \circ \alpha)^{\cdot}).$$

Esto prueba que $f_* P_M = P_N$, es decir f_* transforma el tranporte paralelo en M en el transporte paralelo en N. Luego

$$\begin{aligned} \|P_M(\alpha)V\|_{\mathfrak{b}_{M^*}} &= \|f_* P_M(\alpha)V\|_{\mathfrak{b}_N} = \|P_N(f \circ \alpha) f_* V\|_{\mathfrak{b}_N} \\ &= \|f_* V\|_{\mathfrak{b}_N} = \|V\|_{\mathfrak{b}_{M^*}}. \end{aligned}$$

Luego el spray F_M es compatible con la métrica $\mathfrak{b}_{M^*}$.

Ahora por la Proposición 9.2.1, la exponencial de M está definida en todo TM, y por (9.11), se tiene $\mathcal{D}(\exp^N) \supset f_* TM = TN$ pues f es sobreyectiva y un difeomorfismo local, luego (N, F_N) también es geodésicamente completa.

Ahora veamos que (N, d_N) es métricamente completa, sea $\{y_n\}$ de Cauchy en N, pasando a una subsucesión podemos suponer que $d_N(y_n, y_{n+1}) < 1/2^n$. Por la propiedad de levantada única, podemos hallar una sucesión $\{x_n\}$ de Cauchy en M tal que $f(x_n) = y_n$ pero además $d_{M^*}(x_n, x_{n+1}) < 1/2^n$: dados y_1, y_2, tomamos una curva $\gamma \subset N$ que los une tal que $L_N(\gamma) < 1/2$, la levantamos y usamos que f es una isometría para definir x_1, x_2 con la propiedad deseada. Ahora tomamos una curva en N del longitud $< 1/2^2$ que une y_2 con y_3, la levantamos a M y usando que f es una isometría obtenemos x_3 tal que $d(x_3, x_2) < 1/2^2$, y así sucesivamente. Como (M, d_{M^*}) es completo, existe $x \in M$ tal que $x_n \to x$. Si $y = f(x)$, se tiene

$$d_N(y_n, y) = d_{M^*}(x_n, x) \to 0$$

luego $y_n \to y$.

Por último, dado $y \in N$, tomamos una bola abierta B centrada en el origen de $T_y N$ de manera que $\exp_y|_B : B \to V = \exp_y(B) \subset N$ sea un difeomorfismo. Vamos a probar que f es un revestimiento sobre V. Para cada $x \in f^{-1}(y)$, definimos

$$B_x = f_{*x}^{-1}(B) \subset T_x M, \quad V_x = \exp_x(B_x) \subset M.$$

Observemos que $f(V_x) = f(\exp_x(B_x)) = \exp_y(f_{*x} B_x) = \exp_y(B) = V$ por (9.11). Es más, como $f|_{V_x} \circ \exp_x|_{B_x} : B_x \to V$ coincide con $\exp_y|_B \circ f_{*x}$, entonces $\exp_x|_{B_x}$ es inyectiva, pero además

$$\exp_x|_{B_x} = f|_{V_x}^{-1} \circ \exp_y|_B \circ f_{*x}$$

luego $\exp_x|_{B_x} \to V_x$ es un difeomorfismo y en particular $V_x \subset M$ es abierto. Afirmamos que $f^{-1}(V) = \cup_{x/f(x)=y} V_x$ y que los V_x son disjuntos, lo que probaría que f es un revestimiento. Como $f(V_x) = V$ para todo x tal que $f(x) = y$, hay que probar la otra inclusión. Sea $z \in f^{-1}(V)$, luego $f(z) = \exp_y(v)$ para algún $v \in B$, y la geodésica $\beta(t) = \exp_y((1-t)v)$ se levanta en forma única a una geodésica $\alpha \in M$ tal que $f \circ \alpha = \beta$ y además $\alpha(0) = z$. Sea $x = \alpha(1) \in M$, entonces $f(x) = f \circ \alpha(1) = \beta(1) = y$. Como $v \in B$, de la relación

$$f_{*x}\dot{\alpha}(1) = \dot{\beta}(1) = -v$$

se deduce que $w = -\dot{\alpha}(1) = f_{*x}^{-1}(v) \in B_x$, y además $z = \exp_x(w) \in V_x$ pues z es el otro extremo de la geodésica α.

Ahora sean $p \neq q \in f^{-1}(y)$, veamos que $V_p \cap V_q = \emptyset$. Consideremos $z \in V_p \cap V_q$ dado por

$$z = \exp_p(v) = \exp_q(w)$$

con $v \in B_p$, $w \in B_q$. Aplicando f y usando (9.11) se obtiene

$$\exp_y(f_{*p}v) = \exp_y(f_{*q}w),$$

usando que $\exp_y|_B$ es inyectiva tenemos que $f_{*p}v = f_{*q}w$. Las dos geodésicas

$$\alpha_1(t) = \exp_p(tv), \quad \alpha_2(t) = \exp_q(tw)$$

terminan en z, componiendo con f y usando nuevamente (9.11) se deduce que las dos son levantadas de

$$\beta(t) = \exp_y(tf_{*p}v) = \exp_y(tf_{*q}w).$$

Por la unicidad de las levantadas, debe ser $p = \alpha_1(0) = \alpha_2(0) = q$. □

Un difeomorfismo local $f : M \to N$ es *isometría local* entre variedades de Finsler si $\|f_*V\| = \|V\|$ para todo $V \in TM$ (ver la Sección 10.6). Entonces obtenemos el corolario siguiente:

Corolario 9.5.3. *Sea $f : M \to N$ isometría local C^2 entre variedades de Finsler fuertes, con M completa y N conexa. Entonces (N, d_N) es completa y f es un revestimiento.*

Definición 9.5.4. Sea $(M, \mathfrak{b}, F)$ una variedad de Finsler con spray. Diremos que M tiene *curvatura semi-negativa* si para cada punto $p \in M$, y para $v \in \mathrm{Dom}(\exp_p)$, el operador $(\exp_p)_{*v} : T_pM \to T_{\exp_p(v)}M$ es expansivo e invertible. Es decir, si es invertible y para todo $w \in T_pM$ se verifica

$$\|(\exp_p)_{*v}w\|_{\exp_p(v)} \geq \|w\|_p.$$

La razón del nombre se debe a que en el contexto Riemanniano (ver Sección 10.7), esta condición es equivalente a que M tenga curvatura seccional semi-negativa (≤ 0) para todo $p \in M$ (Teorema 10.9.5).

Teorema 9.5.5 (Cartan-Hadamard-Grossmann-McAlpin-Neeb)**.** *Sea $(M, \mathfrak{b}, F)$ variedad de Finsler fuerte con spray, conexa, de curvatura semi-negativa y geodésicamente completa. Entonces para cada $p \in M$ la exponencial $\exp_p : T_pM \to M$ es un revestimiento y (M, d) es completa.*

Demostración. Aplicamos el teorema anterior a la aplicación $\exp_p : T_pM \to M$, donde le damos a T_pM la estructura de variedad de Finsler usual como espacio de Banach. □

Corolario 9.5.6. *Sea $(M, \mathfrak{b}, F)$ una variedad de Finsler fuerte con spray conexa, completa y de curvatura semi-negativa. Sea $p \in M$, entonces*

1. *M tiene la propiedad EMI local (exponential metric increasing): para todo $v, w \in T_pM$ suficientemente pequeños,*

$$d_M(\exp_p(v), \exp_p(w)) \geq \|v - w\|_p.$$

2. *Dados $x, y \in M$ suficientemente cercanos, existe una geodésica del spray que es corta y los une.*

3. *Si M es simplemente conexa, entonces $\exp_p : T_pM \to M$ es un difeomorfismo, hay una única geodésica corta para cada par de puntos en M y M tiene la propiedad EMI global.*

Demostración. Sea $B_r(0) \subset T_pM$ un entorno del origen donde $\exp_p$ es un difeomorfismo, sea $\gamma \subset M$ una curva adaptada a M que une $x = \exp_p(v)$ con $y = \exp_p(w)$. Levantamos γ a una curva $\Gamma \in T_pM$ tal que $\Gamma(0) = v$. Sea $w' = \Gamma(1)$; como $\gamma(1) = \exp_p(w') = \exp_p(w)$ y $\exp_p$ es un revestimiento, si r es suficientemente pequeño debe ser $\|v - w\| \leq \|v - w'\|$. Como $\gamma = \exp_p \circ \Gamma$, se tiene

$$\|\dot{\gamma}\|_\gamma = \|(\exp_x)_{*\Gamma}\dot{\Gamma}\|_\gamma \geq \|\dot{\Gamma}\|_p$$

Luego

$$\|v - w\|_p \leq \|\Gamma(1) - \Gamma(0)\|_p = \|\int_0^1 \dot{\Gamma}\,dt\|_p \leq \int_0^1 \|\dot{\Gamma}\|_p\,dt \leq L(\gamma).$$

Tomando ínfimo sobre las curvas γ que unen x con y se tiene la EMI.

Si $y \in M$ está suficientemente cerca de x, escribiendo $y = \exp_x(v)$ como en el argumento previo, y considerando $\gamma(t) = \exp_x(tv)$, se tiene

$$\|v - 0\|_x \leq d(\exp_x(v), \exp_x(0)) = d(y, x) \leq L(\gamma) = \|v\|_x,$$

luego $L(\alpha) = d(x, y)$.

Si M es simplemente conexa, entonces $\exp_p$ tiene que ser inyectiva, porque en caso contrario, dados $v, w \in T_pM$ con $x = \exp_p(v) = \exp_p(w)$, el segmento $S \subset T_pM$ que une v con w va a parar a un lazo $\ell \subset M$ con $\ell(0) = \ell(1) = x$ que no se puede retraer. Explícitamente, sabemos que $\exp_p$ es localmente inyectiva por ser un revestimiento. Luego v, w deben estar en secciones disjuntas de $\exp_p^{-1}(x)$, es decir tomando un entorno V de x donde las fibras son abiertos disjuntos, v, w deben estar en dos de estos abiertos U_v, U_w de T_pM distintos. Pero como el lazo $\ell \subset M$ se puede retraer, a partir de un momento tendremos un lazo que cae en el entorno V de x, y este se levanta de forma única a una curva $\Gamma \subset U_v$ que comienza en v. Pero $\exp_p|_{U_v}$ es inyectiva lo que contradice que $\exp_p \circ \Gamma$ es un lazo cerrado en x.

Dados $x, y \in M$, sea $v \in T_xM$ el único tal que $\exp_x(v) = y$. Sea $\alpha(t) = \exp_x(tv)$, entonces

$$\|v - 0\|_x \leq d(\exp_x(v), x) = d(y, x) \leq L(\alpha) = \|v\|_x,$$

Luego $L(\alpha) = d(x, y)$. La unicidad de las geodésicas cortas y la globalidad de la EMI se siguen trivialmente de la inyectividad de $\exp_p$. □

Las variedades de curvatura semi-negativa completas, conexas y simplemente conexas se denominan variedades de *Cartan-Hadamard*. En particular, de acuerdo al ejemplo trabajado en la sección anterior, el cono positivo de un álgebra C^* con una norma unitariamente invariante que hace de $\mathcal{I}$ un espacio de Banach, es una variedad de Cartan-Hadamard, y se recupera el Teorema 9.4.3, siempre y cuando la norma sea equivalente con la norma uniforme. Sin embargo, en el caso en el que el ideal no es completo, la prueba ad-hoc de la sección previa funciona pero la prueba general del teorema de Cartan de esta sección se desmorona ya que para probar la existencia y unicidad de levantadas se utiliza la completitud. En el caso en el que (M, b_M) no es completa se obtiene (copiando la prueba del Teorema 9.4.3) el siguiente resultado cuya demostración dejamos como ejercicio (Ejercicio 9.v).

Teorema 9.5.7. *Sea (N, b_N, F_N) variedad de Finsler con spray conexa de curvatura semi-negativa, donde no se asume que los tangentes de N son completos con la norma b. Supongamos que existe $x \in N$ tal que $\exp_x$ es inyectiva. Entonces dado $y = \exp_x(v) \in N$, la geodésica $\gamma(t) = \exp_x(tv)$ es una curva corta que une x con y.*

9.A. Problemas

9.I. Si $\mathcal{O} = G/K$ con $K \subset G$ subgrupo del grupo métrico (G, d), probar que en caso de que d sea bi-invariante,

$$\dot{d}(gK, hK) = \inf_{k_1, k_2 \in K} d(gk_1, hk_2)$$

define una pseudo-distancia en $\mathcal{O}$, y que esta es una distancia cuando K es cerrado en (G, d).

9.II. Si G, K son grupos de Lie-Banach y $\mathcal{O}$ tiene una estructura diferenciable, sea $\mathfrak{b} : TG \to \mathbb{R}_+$ una métrica de Finsler. Probar que, para $x = g \cdot x_0 \in \mathcal{O}$ y $[w] \in T_x\mathcal{O} = \pi_{*g} w$,

$$\|[w]\|_x = \inf_{k \in \mathfrak{k}} \|w - gk\|_g$$

no depende de $w \in T_gG$ ni de $g \in G$.

9.III. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y sea $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ una norma unitariamente invariante en $\mathcal{A}$. Probar que si

$$\gamma_{a,b}(t) = a^{1/2} \left(a^{-1/2} b a^{-1/2}\right)^t a^{1/2},$$

entonces $\ell_{\mathcal{I}}(\gamma_{a,b}) = \| \ln \left(a^{-1/2} b a^{-1/2}\right) \|_{\mathcal{I}}$.

9.IV. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado con una norma estrictamente convexa. Probar, dados $v, w \in E$, el segmento $s(t) = tw + (1-t)v$ es la única curva suave a trozos en E cuya longitud coincide con $d(v, w) = \|v - w\|$.

9.V. Probar el Teorema 9.5.7 imitando la prueba del Teorema 9.4.3.

Capítulo **10**

Variedades Riemannianas y pseudo-Riemannianas

> Las ecuaciones son la parte aburrida de la matemática. Yo intento ver las cosas en términos de la geometría.
>
> Stephen Hawking

Supongamos que E, el espacio de Banach que modela M, admite una forma bilineal simétrica y continua $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ tal que $\langle z, z\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $z \in E$. Supongamos además que $E = E_+ \oplus E_-$ y que la forma es estrictamente definida positiva en E_+ y estrictamente definida negativa en E_-, y estos subespacios resultan ortogonales para la forma bilineal. Fijada una carta (U, φ) de M, si tenemos una sección continua $A : U \to GL(E_+ \oplus E_-)$ (en el sentido que el operador A_p tiene como subespacios invariantes a E_+, E_-) definimos

$$\langle v, w\rangle_p = \langle A_p \varphi_{*p} v, A_p \varphi_{*p} w\rangle$$

para $p \in U$ y $v, w \in T_pU$. Una vez más identificamos T_pU con E y denotamos esta expresión como

$$\langle v, w\rangle_p = \langle A_p v, A_p w\rangle.$$

Diremos que esta es una métrica *Riemanniana* cuando $E_- = 0$, es decir si $\langle z, z\rangle \geq 0$ para todo $z \in E$, lo que implica por supuesto que

$$\langle v, v\rangle_p = \langle A_p v, A_p v\rangle \geq 0$$

para todo $p \in U$, para todo $v \in T_pM$. En este caso, definimos una métrica de Finsler-Riemann como

$$\|v\|_p = \sqrt{\langle v, v\rangle_p}.$$

Llamemos $\mathcal{H}$ a la completación de E con la forma bilineal $\langle\ ,\ \rangle$. Entonces la extensión de A_p a $\mathcal{H}$ (que seguiremos llamando A_p) es un operador inversible en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y por ende $g_p = g(p) = A_p^* A_p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es positivo e inversible. Entonces

$$\langle v, w\rangle_p = \langle A_p v, A_p w\rangle = \langle g(p)v, w\rangle = \langle v, g(p)w\rangle.$$

Bajo ciertas condiciones de pegado al cambiar de carta para tener compatibilidad sobre las que no discurriremos, este producto escalar y su métrica asociada se extienden a todo M.

Se tiene entonces una sección $g : M \mapsto \mathrm{Bil}(TM)$ que se denomina *métrica Riemanniana* en M de manera tal que

$$g(p)(v, w) = \langle v, w\rangle_p = \langle v, g_p w\rangle = \langle g_p v, w\rangle$$

para todo $v, w \in T_p M$. También es habitual denotar $\langle v, w\rangle_g$ cuando el punto base está claro del contexto, y diremos que (M, g) es una *variedad Riemanniana*.

En caso de que el espacio de Banach E fuese un espacio de Hilbert y $\langle\ ,\ \rangle$ su producto interno (o uno equivalente a este), es fácil ver que la métrica que introdujimos es compatible con la original (en el sentido de que la métrica $\mathfrak{b}$ dada por $\mathfrak{b}(p, v)^2 = \langle v, v\rangle_p$ es acotada, ver la Sección 9.1.2).

En el caso pseudo-Riemanniano se procede en forma análoga, pero teniendo presente que el operador $g(p) = A_p^* A_p$ es autoadjunto, tiene espectro real y no nulo, y se puede descomponer en dos operadores positivos e inversibles $g_+ : E_+ \to E_+$, $g_- : E_- \to E_-$ de manera que

$$g(p) = g_+(p) - g_-(p).$$

Como $g : U \mapsto \mathrm{GL}(E)$, su diferencial g_{*p} en cada $p \in U$ es un operador de E en $\mathcal{B}(E)$, es decir $g_{*p} : E \mapsto \mathcal{B}(E)$. Luego fijado $z \in E$, se verifica $g_{*p,z} : E \mapsto E$ es lineal y acotado, y denotaremos $g_{*p,z} w$ a la acción de este sobre $w \in E$.

De la simetría $\langle v, g_p w\rangle = \langle g_p v, w\rangle$, si $p = p_t$ es una curva en U con $p_0 = p$ y $\dot{p}_0 = z$, se tiene

$$\langle v, g_{*p,z} w\rangle = \langle g_{*p,z} v, w\rangle.$$

10.1. La derivada de Levi-Civita

En general, dada una variedad con spray (M, F), puede haber muchas métricas en M que hagan de esta una variedad de Finsler con spray, en el sentido que el transporte paralelo sea isométrico. El problema recíproco es aún más difícil, es decir, no es sencillo hallar, para una variedad de Finsler, un spray que sea compatible con la métrica. Sin embargo, en el caso Riemanniano y pseudo-Riemanniano, gracias a la

linealidad o suavidad de las métricas involucradas este problema tiene solución única en un sentido que precisamos a continuación. *Salvo que se indique lo contrario, no necesitamos suponer que la norma de Finsler inducida por la métrica* g *es acotada.*

Teorema 10.1.1. *Sea* (M, g) *una variedad pseudo-Riemanniana. Entonces existe un spray* F *en* M *compatible con la métrica que verifica*

$$\langle P_0^t(\alpha)v, P_0^t(\alpha)w\rangle_g = \langle v, w\rangle_g$$

para toda curva $\alpha \subset M$ *de clase* C^2 *y todo* $v, w \in T_{\alpha(0)}M$. *El spray* F *es único en los siguientes sentidos equivalentes:*

1. *Dados tres campos* X, Y, Z *en* M, *si* ∇ *denota la derivada covariante del spray, se verifica*

$$X(\langle Y, Z\rangle_g) = \langle \nabla_X Y, Z\rangle_g + \langle Y, \nabla_X Z\rangle_g. \tag{10.1}$$

2. *Si* $\alpha : J \to M$ *es una curva de clase* C^2, D_t *denota la derivada covariante respecto de* α *y las curvas* $\eta, \mu \in Lev(\alpha)$, *entonces*

$$\frac{d}{dt}\langle \eta, \mu\rangle_g = \langle D_t\eta, \mu\rangle_g + \langle \eta, D_t\mu\rangle_g. \tag{10.2}$$

Este spray se denomina spray canónico *o* spray métrico *y la derivada covariante se denomina* derivada métrica *o* derivada de Levi-Civita. *En una carta, el spray está dado por*

$$\langle F_p(v), g(p)z\rangle = -\langle g_{*p,v}v, z\rangle + \tfrac{1}{2}\langle g_{*p,z}v, v\rangle. \tag{10.3}$$

Demostración. La existencia está dada localmente por la última expresión. La forma bilineal inducida se recupera polarizando,

$$2\langle \Gamma_p(v, w), g(p)z\rangle = \langle g_{*p,z}w, v\rangle - \langle g_{*p,w}z, v\rangle - \langle g_{*p,v}z, w\rangle, \tag{10.4}$$

y de aquí se obtienen las expresiones para campos y derivadas covariantes.

Veamos que el spray es compatible con la métrica: si μ_v, μ_w son los transportes paralelos de $v, w \in T_{\alpha(0)}M$ a lo largo de una curva $\alpha \in M$, entonces de la propiedad de la derivada covariante, derivando

$$g(t) = \langle P_0^t(\alpha)v, P_0^t(\alpha)w\rangle_g$$

respecto de t se deduce que la derivada es nula, luego esta expresión es constante y debe coincidir con su valor en $t = 0$ que es justamente $\langle v, w\rangle_g$. Poniendo $v = w$ se deduce que el spray es compatible con la métrica.

La unicidad del spray y la prueba de que se extiende adecuadamente a todo M pegando las expresiones locales puede verse en el libro de Lang, [58, Capítulo VIII, §4, Teorema 4.1]. □

De aquí en más toda variedad (M, g) pseudo-Riemanniana la pensaremos con su spray canónico.

10.1.1. La derivada de Levi-Civita de una subvariedad

Un caso elemental que nos permite aplicar los resultados del teorema previo, es cuando $M \subset \mathcal{H}$ es una subvariedad de un espacio de Banach provisto de un producto interno $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. En ese caso, dados $p \in M$, $v, w \in T_pM$, identificando T_pM con un subespacio de $\mathcal{H}$, podemos darle a T_pM el producto interno

$$\langle v, w\rangle_p = \langle v, w\rangle.$$

Diremos que (M, g) tiene *la métrica inducida* o la *métrica de subespacio*.

En esta sección *supondremos que la métrica es acotada superiormente*, lo cual equivale a decir que la forma bilineal $\beta(v, w) = \langle v, w\rangle_g$ es continua, y en particular es lícito *usar la regla de derivación del producto*. Es decir, estamos en el contexto de *variedades Riemannianas débiles*.

Sea $E_p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ el único proyector ortogonal ($E_p = E_p^2 = E_p^*$) con rango T_pM. Afirmamos que el spray métrico de M coincide con el spray dado por derivar y proyectar al tangente, de acuerdo a los resultados de la Sección 6.6. Es decir,

Lema 10.1.2. *Sea $M \subset \mathcal{H}$ con la métrica inducida y el spray métrico. Dada $\alpha \subset M$ y $\mu \in \mathrm{Lev}(\alpha)$, se tiene*

$$D_t\mu = E_\alpha\dot{\mu}$$

y en particular dado $\eta \in \mathrm{Lev}(\alpha)$

$$\frac{d}{dt}\langle\eta, \mu\rangle = \langle\dot{\eta}, \mu\rangle + \langle\eta, \dot{\mu}\rangle.$$

Demostración. Sabemos que esta fórmula define, por el Teorema 6.6.1, un spray en la variedad M, para probar que es el spray métrico, por la unicidad del mismo, basta probar la condición de compatibilidad (10.2). Pero

$$\langle D_t\eta, \mu\rangle = \langle E_\alpha\dot{\eta}, \mu\rangle = \langle\dot{\eta}, E_\alpha\mu\rangle = \langle\dot{\eta}, \mu\rangle,$$

pues E_α es un operador autoadjunto y similarmente $\langle\eta, D_t\mu\rangle = \langle\eta, \dot{\mu}\rangle$, y como vale la regla

$$\frac{d}{dt}\langle\eta, \mu\rangle = \langle\dot{\eta}, \mu\rangle + \langle\eta, \dot{\mu}\rangle$$

puesto que la métrica es acotada superiormente, se tiene la condición de compatibilidad. □

Antes de seguir desarrollando la teoría riemanniana, veamos algunos ejemplos que ya visitamos, a la luz de las nuevas definiciones:

10.1.1.1. La Grassmanniana en los autoadjuntos

Para la Grassmanniana de un álgebra de operadores (Ejemplo 7.6.6), dado un proyector $p = p^* = p^2$ se tenía el spray

$$F_p(x) = -2\epsilon_p x^2,$$

con $\epsilon_p = 2p - 1$ la simetría asociada a p y $x = xp + px \in \mathcal{A}_h^C = T_p\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Equivalentemente, $\epsilon_p x = -x\epsilon_p$. Definimos la métrica Riemanniana

$$\|x\|_p := \|x\|_2,$$

con $\|x\|_2^2 = \mathrm{Tr}(x^*x)$, y Tr denota la traza del álgebra. Afirmamos que el spray antes introducido es el spray métrico de esta métrica. En particular la métrica Riemanniana no es otra que la de la Grassmanniana como subvariedad del espacio de Hilbert $\mathcal{A}_h$ con la norma Frobenius (Lema 10.1.2).

Proposición 10.1.3. *Sea $p \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, $x, y \in \mathcal{A}_h^C = T_p\mathcal{P}(\mathcal{A})$ y consideremos a la Grassmanniana con la métrica Riemanniana*

$$\langle x, y\rangle_g = \mathrm{Tr}(xy).$$

Entonces el spray métrico de $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), g)$ está dado por $F_p(v) = -2\epsilon_p v^2$. En particular si $\alpha \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$ es de clase C^2 y $\eta \in \mathrm{Lev}(\alpha)$ se tiene que

$$D_t\eta = \dot\eta + \epsilon_\alpha(\eta\dot\alpha + \dot\alpha\eta)$$

es la derivada de Levi-Civita de la variedad.

Demostración. Basta chequear la condición de compatibilidad a lo largo de una curva $\alpha \subset M$,

$$\frac{d}{dt}\langle\eta,\mu\rangle_g = \langle D_t\eta,\mu\rangle_g + \langle\eta, D_t\mu\rangle_g$$

para $\eta, \mu \in \mathrm{Lev}(\alpha)$. El lado izquierdo es simplemente

$$\mathrm{Tr}(\dot\eta\mu) + \mathrm{Tr}(\eta\dot\mu), \tag{10.5}$$

mientras que

$$\begin{aligned}\langle D_t\eta,\mu\rangle_g &= \mathrm{Tr}(\mu[\dot\eta + \epsilon_\alpha(\eta\dot\alpha + \dot\alpha\eta)]) \\ &= \mathrm{Tr}(\mu\dot\eta) + \mathrm{Tr}(\mu\epsilon_\alpha\eta\dot\alpha) + \mathrm{Tr}(\mu\epsilon_\alpha\dot\alpha\eta)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\langle\eta, D_t\mu\rangle_g &= \mathrm{Tr}(\eta[\dot\mu + \epsilon_\alpha(\mu\dot\alpha + \dot\alpha\mu)]) \\ &= \mathrm{Tr}(\eta\dot\mu) + \mathrm{Tr}(\eta\epsilon_\alpha\mu\dot\alpha) + \mathrm{Tr}(\eta\epsilon_\alpha\dot\alpha\mu).\end{aligned}$$

Pero $\epsilon_\alpha\eta = -\eta\epsilon_\alpha$ y lo mismo se aplica a μ, puesto que $\mu, \eta \in T_\alpha\mathcal{P}(\mathcal{A})$, y casi todos los términos se cancelan usando la propiedad cíclica de la traza, salvo el concerniente a la ecuación (10.5), probando así la compatibilidad. □

10.1.2. Sprays métricos en espacios homogéneos

En esta sección, $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo y separable, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ denota los operadores acotados en $\mathcal{H}$ mientras que $\mathcal{B}(\mathcal{H})^0$, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ denotan respectivamente los operadores de rango finito y los compactos. Seguimos la notación del Apéndice D de normas simétricas en sucesiones e ideales de operadores compactos.

Consideremos a los operadores de Hilbert-Schmidt $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ con el producto interno

$$\langle a, b\rangle = \mathrm{Re}\mathrm{Tr}(ab^*),$$

donde ahora Tr denota la traza infinita dada por $\mathrm{Tr}(x) = \sum_{n\geq 0}\langle xe_n, e_n\rangle$ y $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es cualquier base ortornormal del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (ver el la Sección D.1.3 para más detalles), y le agregamos unidad de manera natural, considerando $\mathcal{A} = \mathcal{B}_2(\mathcal{H}) \oplus \mathbb{C}$ y la norma

$$\|k + \lambda\|_2 := \sqrt{\|k\|_2 + |\lambda|_2}.$$

Si se prefiere, se puede considerar al álgebra de matrices $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ con la norma Frobenius

$$\|a\|_2 = \mathrm{Tr}(|a|^2)^{1/2}.$$

Observemos que estas son normas simétricas, por ende unitariamente invariante. Introducimos la métrica invariante a izquierda en los operadores inversibles, de acuerdo a lo discutido en la Sección 9.4

$$\|v\|_g := \|g^{-1}v\|_2.$$

Esta proviene del producto interno

$$\langle v, w\rangle_g := \langle g^{-1}v, g^{-1}w\rangle = \mathrm{Re}\mathrm{Tr}(g^{-1}vw^*(g^*)^{-1}) = \mathrm{Re}\mathrm{Tr}((gg^*)^{-1}vw^*)$$

para v, w cualesquiera y g inversible.

10.1.2.1. El spray métrico del grupo de inversibles

Procedemos a calcular el spray métrico para nuestros ejemplos de grupos inversibles y sus espacios homogéneos. Esta cuenta es especialmente relevante ya que, como vimos en la Sección 9.4, esta métrica invariante a izquierda no es compatible con el spray canónico del grupo de inversibles.

A partir de la expresión de la métrica se deduce que $g_p v = (pp^*)^{-1}v$. Considerando una curva de inversibles $x(t)$ tal que $x(0) = p$, $\dot{x}(0) = z$, obtenemos la expresión

$$g_{*p,z}v = -(pp^*)^{-1}(zp^* + pz^*)(pp^*)^{-1}v = -g_p(zp^* + pz^*)g_p v.$$

Luego, de la expresión local del spray canónico (10.3) deducimos que (multiplicando por 2 para trabajar con el doble de la parte real de la traza)

$$2\langle g_p F_p(v), z\rangle = \mathrm{Re}\mathrm{Tr}(g_p F_p(v)z^* + F_p(v)^* g_p z).$$

Por otro lado, el término de la derecha en (10.3), después de ciertas manipulaciones usando la ciclicidad de la traza, es igual a

$$\mathrm{ReTr}([g_p v v^* g_p p - g_p v p^* g_p v - g_p p v^* g_p v] z^* +$$

$$+ [p^* g_p v v^* g_p - v^* g_p v p^* g_p - v^* g_p p v^* g_p] z).$$

Como esto tiene que valer para todo z, se deduce (usando que $p^* g_p = p^{-1}$) que

$$F_p(v) = v p^{-1} v + p v^* g_p v - v v^* (p^*)^{-1}. \tag{10.6}$$

Si tomamos $w = p^{-1} v$, es decir llevamos la velocidad v al origen del grupo, se obtiene

$$p^{-1} F_p(pw) = w^2 + w^* w - w w^*.$$

10.1.2.2. Geodésicas

La ecuación de las geodésicas se calcula como es usual a partir de $\alpha'' = F(\alpha')$, obteniéndose

$$\ddot{\alpha} = \dot{\alpha}\alpha^{-1}\dot{\alpha} + \alpha\dot{\alpha}^*(\alpha\alpha^*)^{-1}\dot{\alpha} - \dot{\alpha}\dot{\alpha}^*(\alpha^*)^{-1},$$

esto es

$$\alpha^{-1}\ddot{\alpha} = (\alpha^{-1}\dot{\alpha})^2 + (\alpha^{-1}\dot{\alpha})^*\alpha^{-1}\dot{\alpha} - \alpha^{-1}\dot{\alpha}(\alpha^{-1}\dot{\alpha})^*. \tag{10.7}$$

Llamando $\beta = \alpha^{-1}\dot{\alpha}$, la ecuación de Euler se convierte en

$$\dot{\beta} = [\beta^*, \beta].$$

Después de algunas experimentaciones, surge que la única geodésica del spray con $\alpha(0) = g \in G_{\mathcal{A}}$ y $\dot{\alpha}(0) = gv = g(x + iy)$ (donde $x, y \in \mathcal{A}_h$ son la parte real e imaginaria de v respectivamente), es la curva

$$\alpha(t) = g e^{t(x-iy)} e^{2tiy}. \tag{10.8}$$

Una manera de probar que α verifica la ecuación del spray es llamando $w = e^{-2tiy} x e^{2tiy}$. Entonces

$$\dot{\alpha} = \alpha(w - iy) + \alpha 2iy = \alpha(w + iy),$$

con lo cual

$$\alpha^{-1}\dot{\alpha} = w + iy,$$

y el lado derecho de la ecuación (10.7) se convierte en

$$(w + iy)^2 + (w - iy)(w + iy) - (w + iy)(w - iy) = w^2 - y^2 + i(3wy - yw).$$

Por otro lado, como $\ddot{\alpha} = \dot{\alpha}(w + iy) + \alpha\dot{w}$, y $\dot{w} = 2i(wy - yw)$, entonces también se verifica

$$\alpha^{-1}\ddot{\alpha} = (w + iy)^2 + 2i(wy - yw) = w^2 - y^2 + i(3wy - yw).$$

Notemos que estas curvas pueden reescribirse como

$$\alpha(t) = ge^{tv^*}e^{t(v-v^*)}. \tag{10.9}$$

Observación 10.1.4. La métrica invariante a izquierda del grupo general lineal, se presenta de manera natural al estudiar el problema del cuerpo rígido generalizado desde el punto de vista de la mecánica clásica. Recomendamos al lector interesado el excelente Apéndice 2 del libro de mecánica de V. I. Arnol'd [13]. El estudio del grupo lineal con esta conexión, pero reemplazando la norma 2 por las normas p dadas por la traza, puede encontrarse en el trabajo [9] del año 2011, y es para destacar que el caso no Riemanniano es mucho más complejo y se desconoce una fórmula general para las geodésicas.

Observación 10.1.5. Restringiendo el spray al grupo unitario, si consideramos $p = u \in \mathcal{U}$, $v = uv_0 \in T_u\mathcal{U}$, con $v_0^* = -v_0 \in \mathcal{A}_{ah}$, la ecuación del spray se reduce de la siguiente manera

$$\begin{aligned} F_u(v) &= F_u(uv_0) = vu^*v + uv^*v - vv^*u = uv_0^2 - uv_0^2 + uv_0^2 \\ &= uv_0^2 = vu^*v = vu^{-1}v, \end{aligned}$$

que no es otra cosa que el spray canónico del grupo. En particular la derivada de Levi-Civita en campos invariantes a izquierda es $\nabla_X Y = {}^1\!/_2[X, Y]$. No es casual entonces que las geodésicas (10.8) se reduzcan a los grupos a un parámetro cuando la velocidad inicial es anti Hermitiana ($x = 0$), es decir

$$\alpha(t) = ge^{t(0-iy)}e^{2tiy} = ge^{tiy}$$

es un grupo a un parámetro.

Volviendo al caso general, a partir de la ecuación del spray (10.6), polarizando obtenemos la expresión de la forma bilineal Γ, que es, para $g \in G$ y $v = gx, w = gy \in T_gG$,

$$2g^{-1}\Gamma_g(gx, gy) = xy + yx + x^*y + y^*x - xy^* - yx^*.$$

Sean $X_g = gV$, $Y_g = gW$ campos invariantes a izquierda, con $V, W \in \mathcal{A}$. Definimos los campos adjuntos como $X_g^* = gV^*$, $Y_g^* = gW^*$. Entonces un simple cálculo, usando que la conexión del spray está dada por $\nabla_X Y = Y'X - \Gamma(X, Y)$, nos devuelve la conexión de Levi-Civita del grupo de inversibles con la métrica invariante a izquierda dada por la norma Frobenius

$$\nabla_X Y = {}^1\!/_2\{[X, Y] + [X, Y^*] + [Y, X^*]\}, \tag{10.10}$$

donde $[X,Y] = \mathcal{L}_X Y$ denota como siempre el corchete de Lie de los campos dado por $[X,Y]_g = g[V,W]$, etc. Atención que esta expresión sólo es válida para campos invariantes a izquierda; en el caso finito dimensional se extiende por linealidad a todos los campos de manera usual usando que los campos en las direcciones de una base del tangente, forman una base del espacio de todos los campos como módulo sobre $C^\infty(M)$.

La derivada covariante del spray es $D_t\mu = \dot{\mu} - \Gamma(\mu, \dot{\alpha})$. Para $\alpha \subset M$ y $\eta \in Lev(\alpha)$, ponemos

$$\beta = \alpha^{-1}\dot{\alpha}, \quad \mu = \alpha^{-1}\eta.$$

Entonces un simple cálculo nos devuelve la siguiente fórmula concreta para la derivada covariante:

$$\alpha^{-1}D_t\eta = \dot{\mu} + 1/2\{[\beta,\mu] + [\beta,\mu^*] + [\mu,\beta^*]\}. \tag{10.11}$$

10.2. Cálculo de variaciones

Estudiaremos en esta sección la geometría clásica de variedades Riemannianas y pseudo Riemannianas con sus herramientas distintivas: el cálculo de variaciones, las coordenadas polares, el Lema de Gauss, la curvatura seccional. En esta parte estudiamos la relación entre curvas cortas y geodésicas del spray mediante el cálculo de variaciones. Nuevamente supondremos en esta sección *que la métrica es acotada superiormente*, es decir que (M,g) es una variedad Riemanniana débil.

Diremos que una curva $\gamma : [0,1] \to M$ es *admisible* si es C^1 y con derivada no nula a trozos, es decir existe $\pi = \{0 = t_0 \leq \cdots \leq t_{n+1} = 1\}$ de manera que $\gamma|_{(t_i,t_{i+1})}$ es C^1 y con derivada no nula, y además existen los límites

$$\lim_{t\to t_i^+} \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t_i^+), \quad \lim_{t\to t_i^-} \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t_i^-)$$

para todo $i = 1,..,n$.

Observación 10.2.1. Sea $\eta : [0,1] \to TM$ una curva C^1 y con velocidad no nula. Si (M,g) es Riemanniana, entonces

$$2\|\dot{\eta}\| \frac{d}{dt}\|\dot{\eta}\| = \frac{d}{dt}\|\dot{\eta}\|^2 = 2\langle\dot{\eta}, D_{\dot{\eta}}\dot{\eta}\rangle_g$$

por (10.2). Luego

$$\frac{d}{dt}\|\dot{\eta}\| = \frac{1}{\|\dot{\eta}\|}\langle\dot{\eta}, D_{\dot{\eta}}\dot{\eta}\rangle_g.$$

Dada una curva admisible $\gamma : [0,1] \to M$, si $J = (-\epsilon,\epsilon)$ es un intervalo, definimos una *variación* como una función continua $\nu : J\times[0,1]$ de manera que $\nu(0,t) = \gamma(t)$, ν_s

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 282

es admisible para cada s fijo y la restricción de ν a los rectángulos $(-\epsilon,\epsilon)\times(t_i,t_{i+1})$ es dos veces diferenciable.

Diremos que la variación es con *un extremo fijo* si $\nu_s(0)=\gamma(0)$ para todo $s\in(-\epsilon,\epsilon)$, y diremos que la variación es *propia* si tiene los dos extremos fijos.

Denotaremos con $'$ a la derivada de ν respecto de s y con $\dot{}$ a la derivada de ν respecto de t. Denotaremos con D_s a la derivada covariante a lo largo de ν_t (con t fijo) y con D_t a la derivada covariante a lo largo ν_s (con s fijo).

Lema 10.2.2. *Sea (M,g) pseudo-Riemanniana. Entonces*

1. *Si ν es una variación de γ, entonces $D_s\dot\nu = D_t\nu'$, es decir*

$$D_{\nu_t'}\dot\nu(s,t) = D_{\dot\nu_s}\nu'(s,t)$$

   para $(s,t)\in J\times[0,1]$.

2. *Sea $\gamma\subset M$ admisible con velocidad constante, sea $\mu\in \mathrm{Le}\nu(\gamma)$ suave a trozos. Existe $\epsilon>0$ tal que si $J=(-\epsilon,\epsilon)$ y $\nu: J\times[0,1]\to M$ está dada por*

$$\nu(s,t)=\exp_{\gamma(t)}(s\mu(t)),$$

   entonces ν es una variación de γ con $\nu'(0,t)=\mu(t)$. La variación ν es propia si y sólo si $\mu(0)=\mu(1)=0$.

Demostración. La prueba del primer ítem es trivial: los dos lados son iguales a $\dot\nu'-\Gamma_\nu(\dot\nu,\nu')$, puesto que Γ es simétrica y $(\nu')^{\cdot}=\dot\nu'$.

Respecto del segundo ítem, podemos suponer, refinando la partición, que los intervalos donde γ y μ son suaves, son los mismos. Cubrimos también γ con entornos uniformemente normales (Sección 6.2.1) y nos quedamos con un cubrimiendo finito; trabajamos en cada intervalo de γ que cae dentro de uno de estos entornos, para poder tomar, en cada caso, s suficientemente pequeño como para que $s\mu(t)\in T_{\gamma(t)}M$ esté en el entorno del origen donde $\exp_{\gamma(t)}$ es un difeomorfismo con su imagen. Se sigue que ν es suave en los rectángulos donde γ lo era y además cada ν_s es admisible puesto que

$$\nu_s : t\mapsto \exp_{\gamma(t)}(s\mu(t)).$$

Como $\nu_0(t)=\exp_{\gamma(t)}(0\mu(t))=\gamma(t)$, se trata de una variación de γ. Por otra parte,

$$\nu'(0,t)=\frac{d}{ds}\Big|_{(0,t)}\nu=(\exp_{\gamma(t)})_{*s\mu(t)}\mu(t)\Big|_{s=0}=\mu(t).$$

Por último, como

$$\nu_s(0)=\exp_{\gamma(0)}(s\mu(0)) \text{ y } \nu_s(1)=\exp_{\gamma(1)}(s\mu(1)),$$

para todo $s\in J$, se deduce que ν es propia si y sólo si $\mu(0)=\mu(1)=0$. □

10.2.1. Fórmulas variacionales

A continuación presentamos la primera fórmula de variación para variedades riemannianas y pseudo-riemannianas:

Teorema 10.2.3. *Sean* (M, g) *Riemanniana,* $\gamma \subset M$ *admisible con velocidad constante,* $\mu \in \mathrm{Lev}(\gamma)$ *suave a trozos. Tomemos*

$$\nu(s,t) = \exp_{\gamma(t)}(s\mu(t)),$$

la variación propia de γ *del lema previo. Entonces*

$$\begin{aligned} L(\gamma)\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\nu_s) &= -\int_0^1 \langle D_t\dot\gamma, \mu\rangle_g dt + \sum_{i=1}^{n} \langle \mu(t_i), \dot\gamma(t_i^-) - \dot\gamma(t_i^+)\rangle_g \\ &\quad + \langle \mu(1), \dot\gamma(1^-)\rangle_g - \langle \mu(0), \dot\gamma(0^+)\rangle_g. \end{aligned}$$

Demostración. En primer lugar, como el integrando es continuo está justificado derivar debajo del signo integral. Ahora calculamos, usando la Observación 10.2.1 y el primer ítem del lema previo

$$\frac{d}{ds}\|\dot\nu\|_\nu = \frac{1}{\|\dot\nu\|}\langle \dot\nu, D_s\dot\nu\rangle = \frac{1}{\|\dot\nu\|}\langle \dot\nu, D_t\nu'\rangle$$

con $t \in (t_i, t_{i+1})$ fijo pues allí $\dot\nu \neq 0$. Evaluando en $s = 0$, como $\nu_0(t) = \gamma(t)$ y $\nu_0'(t) = \mu(t)$, obtenemos

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \|\dot\nu\|_\nu = \frac{1}{\|\dot\gamma\|}\langle \dot\gamma, D_t\mu\rangle.$$

Por otra parte,

$$\frac{d}{dt}\langle \dot\gamma, \mu\rangle = \langle D_t\dot\gamma, \mu\rangle + \langle \dot\gamma, D_t\mu\rangle.$$

Reemplazando esta expresión en la inmediata anterior, recordando que $\|\dot\gamma\| = k = cte$, obtenemos

$$k\,\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \|\dot\nu\|_\nu = \frac{d}{dt}\langle \dot\gamma, \mu\rangle - \langle D_t\dot\gamma, \mu\rangle.$$

Integrando respecto de t en $[t_i, t_{i+1}]$, se tiene

$$k\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \|\dot\nu\|_\nu = \langle \dot\gamma, \mu\rangle|_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle D_t\dot\gamma, \mu\rangle dt.$$

Sumando sobre $i = 0, \ldots, n$ tenemos la fórmula del enunciado agrupando convenientemente. □

Corolario 10.2.4. *Sean* (M, g) *Riemanniana débil y* $\gamma : [0,1] \to M$.

1. *Si* γ *es una geodésica del spray, entonces es un punto crítico de* L *para toda variación propia.*
2. *Si* γ *es* C^1 *y punto crítico de* L *(en particular minimal), entonces es una geodésica del spray.*
3. *Si* γ *es adaptada y punto crítico de* L *(en particular minimal), entonces* γ *es una reparametrización de una geodésica del spray, en particular suave en* $[0,1]$.

Demostración. Si γ es una geodésica, es suave y el término de la suma en el teorema previo no está presente. Además la integral es nula pues el integrando lo es.

Si γ es C^1, el término de la suma no está presente en el teorema previo. Si γ es minimal, en particular es un extremo de la funcional L para cualquier variación, en particular $\mu = D_t\dot\gamma$, y entonces debe ser $D_t\dot\gamma = 0$, es decir γ es una geodésica del spray.

Si γ es suave a trozos y minimal, en particular es minimal en cada tramo donde es suave (Observación 8.1.13), luego es una geodésica allí. Luego

$$0 = L(\gamma)\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\nu_s) = \sum_{i=0}^{n} \langle \mu(t_i), \gamma(t_i^-) - \gamma(t_i^+)\rangle_g.$$

Para cada $i = 1, .., n$, elegimos $f : [0,1] \to [0,1]$ suave de manera que $f = 0$ excepto en $(t_i - \epsilon, t_i + \epsilon)$ y $f(t_i) = 1$. Definimos $\mu = 0$ en $[0,1]$ exceptuando en $(t_i - \epsilon, t_i + \epsilon)$ donde lo definimos como el transporte paralelo de

$$\nu_i = \dot\gamma(t_i^-) - \dot\gamma(t_i^+)$$

a un lado y al otro de t_i (que está bien definido pues a cada lado γ es suave), multiplicado por la función f. Entonces $\mu \in Le\nu(\gamma)$ es suave y todos los términos de la suma se desvanecen salvo el i-ésimo, donde se obtiene

$$0 = \langle \mu(t_i), \dot\gamma(t_i^-) - \dot\gamma(t_i^+)\rangle_g = \|\dot\gamma(t_i^-) - \dot\gamma(t_i^+)\|^2.$$

Se deduce que cada salto de γ no es tal, y como γ resulta suave por la unicidad debe ser una geodésica del spray. □

10.2.1.1. La variación de la energía

Recordemos que la *funcional energía* se calcula, para curvas admisibles $\gamma : [0,1] \to M$, como

$$E(\gamma) = 1/2 \int_0^1 \|\dot\gamma\|_\gamma^2 dt.$$

Esta no es invariante por reparametrizaciones, dejamos los teoremas análogos a los de la funcional longitud como ejercicio para el lector (Ejercicio 10.VI).

Teorema 10.2.5. *Sean (M,g) Riemanniana débil, $\gamma \subset M$ admisible, $\mu \in Lev(\gamma)$ y ν la variación del teorema previo. Entonces si $\mu(0) = \mu(1) = 0$, se tiene*

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} E(\nu_s) = -\int_0^1 \langle D_t\dot\gamma, \mu\rangle_g dt + \sum_{i=1}^n \langle \mu(t_i), \dot\gamma(t_i^-) - \dot\gamma(t_i^+)\rangle_g.$$

Corolario 10.2.6. *Sean (M,g) Riemanniana y $\gamma : [0,1] \to M$.*

1. *Si γ es una geodésica del spray, entonces es un punto crítico de E para toda variación propia.*
2. *Si γ es C^1 y minimal para la energía, entonces es una geodésica del spray.*
3. *Si γ es una suave a trozos (adaptada) y minimal para la energía entonces γ es una geodésica del spray, en particular suave en $[0,1]$.*

10.3. Las geodésicas son localmente minimizantes

En esta sección probamos resultados en algún sentido recíprocos de los de la sección anterior: allí vimos que toda curva minimal debe ser una geodésica (pero no sabemos si dados dos puntos hay una curva minimal que los une), y que todas las geodésicas son extremales (pero no necesariamente minimales). Comenzamos con un lema técnico sobre el tensor de curvatura.

Lema 10.3.1. *Sean (M,g) pseudo-Riemanniana, $p \in M$, $x,y,z \in T_pM$. Entonces*

1. $\langle R_p(x,y)z, z\rangle_g = 0$,
2. $\langle R_p(x,y)x, z\rangle_g = \langle R_p(x,z)x, y\rangle_g$.

Demostración. Para la primera identidad, probaremos que

$$\langle R(X,Y)Z, Z\rangle_g = 0$$

para toda terna de campos X, Y, Z en M, de donde se deduce la propiedad pues R sólo depende del valor de los campos en el punto p. A partir de la propiedad (10.1), se deduce que $X\langle Z, Z\rangle = 2\langle \nabla_X Z, Z\rangle$. Luego

$$Y(X\langle Z, Z\rangle) = 2\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle + 2\langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle.$$

Intercambiando X con Y y restando se deduce que

$$[Y, X]\langle Z, Z\rangle = 2\langle (\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y) Z, Z\rangle.$$

Pero aplicando nuevamente la propiedad (10.1) al lado izquierdo se deduce que

$$[Y, X]\langle Z, Z\rangle = 2\langle \nabla_{[Y,X]} Z, Z\rangle.$$

Comparando los lados derechos de las últimas ecuaciones, se tiene la propiedad al revisar la definición de R. Respecto de la segunda identidad, tiene una prueba análoga que omitimos. □

10.3.1. El lema de Gauss

Teorema 10.3.2 (Lema de Gauss)**.** *Sea (M, g) pseudo-Riemanniana débil. Consideramos $\gamma : J \to M$, $\gamma(t) = \exp_p(tz)$ una geodésica de M, con $z \in T_pM$.*

1. *Dados $v, w \in T_pM$ sea $\eta \in \mathrm{Lev}(\gamma)$ el único campo de Jacobi con $\eta(0) = v$, $D_t\eta(0) = w$. Entonces*

$$\langle \dot\gamma(t), \eta(t)\rangle_g = \langle z, v + tw\rangle_p.$$

2. *Para todo $w \in T_pM$ y todo $t \in J$ se tiene*

$$\langle (\exp_p)_{*tz} z, (\exp_p)_{*tz} w\rangle_g = \langle z, w\rangle_p.$$

3. *Si $v = 0$ y $w \perp z$, entonces $\dot\gamma \perp \eta$ para todo $t \in J$.*

Demostración. Sea $f(t) = \langle \dot\gamma(t), \eta(t)\rangle_g$. Se tiene $\frac{d}{dt} f(t) = \langle \dot\gamma, D_t\eta\rangle$ pues $D_t\dot\gamma = 0$. Derivando nuevamente respecto de t se tiene

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) = \langle \dot\gamma, D_t^2\eta\rangle = \langle \dot\gamma, R(\dot\gamma, \eta)\dot\gamma\rangle = 0$$

para todo $t \in J$ por el lema previo. Luego $f(t) = f(0) + tf'(0)$, lo que prueba el primer item. La segunda fórmula es un caso particular ($v = 0$) combinado con la expresión

$$\eta(t) = (\exp_p)_{*tz} tw$$

del Teorema 7.2.3, la tercera fórmula es evidente a partir de la segunda. □

10.3.2. Coordenadas polares

Observación 10.3.3. Sean $p \in M$, $R > 0$ de manera que

$$\exp_p : B_R(0_p) \subset T_pM \to U_R(p) = \exp_p(B_R(0_p))$$

es un difeomorfismo. Si $\alpha : [a,b] \to U_R(p) - \{p\}$ es admisible, consideremos $\Gamma = \exp_p^{-1} \circ \alpha : [a,b] \to T_pM$. Sea $r : [a,b] \to (0,R)$ dada por $r(t) = \|\Gamma(t)\|_p$. Como $\Gamma \neq 0$, se deduce que r es suave a trozos y no nula. Sea $u : [0,1] \to S = \{v : \|v\|_p = 1\} \subset T_pM$ dada por

$$u(t) = \frac{1}{r(t)}\Gamma(t).$$

Entonces u también es suave a trozos, y además $\Gamma = ru$. Como se verifica que $\alpha(t) = \exp_p(r(t)u(t))$, diremos que estas son las *coordenadas polares de* γ.

10.3.3. Minimalidad de las geodésicas

Probamos primero una versión clásica del teorema de minimalidad, asumiendo que la métrica Riemanniana es acotada, es decir que la distancia inducida da la topología de la variedad M.

Teorema 10.3.4 (Minimalidad local de las geodésicas, (M,g) Riemanniana fuerte)**.** *Sean $p \in M$ y $R > 0$ como en la observación previa. Dado $q \in U_R(p)$, sea $\gamma_{p,q}$ la geodésica del spray que une p, q, $\gamma_{p,q}(t) = \exp_p(tv)$ con $v \in B_R(0_p) \subset T_pM$. Entonces*

1. *Sea $0 < c \leq R$. Entonces $L(\alpha) \geq c$ para toda curva $\alpha : [0,1] \to M$ admisible que comienza en p, y se salga de $U_c(p) = \exp_p(B_c(0))$.*
2. *$L(\alpha) \geq L(\gamma_{p,q})$ para toda curva $\alpha : [0,1] \to M$ admisible que una p con q, y en particular $d(p,q) = L(\gamma_{p,q}) = \|v\|_p$.*
3. *Vale la igualdad si y sólo si α es una reparametrización de $\gamma_{p,q}$.*

Demostración. Sabemos que $\gamma_{p,q}(t) = \exp_p(tv)$ para algún $v \in T_pM$ con $\|v\|_p = L(\gamma_{p,q}) < R$. Sea $I \subset [0,1]$ la componente conexa del cero de $\alpha^{-1}U_c(p)$, entonces $I = [0,s)$ si α se sale de $U_c(p)$, con $r(s) := \lim_{t \to s^-} r(t) = c$ o bien $I = [0,1]$ si $\alpha \subset U_c(p)$. En cualquier caso, para $0 < \delta < s$ sea α_δ la restricción de α al intervalo $I \cap \{t \geq \delta\}$. Como podemos suponer que α no vuelve a pasar por p (estamos acotando inferiormente su longitud) podemos escribir $\alpha_\delta(t) = \exp_p(\Gamma(t))$ y con la descomposición polar de Γ obtenemos $\alpha_\delta(t) = \exp_p(r(t)u(t))$. Luego

$$\dot{\alpha}_\delta(t) = (\exp_p)_{*ru}(\dot{r}u + r\dot{u}) = \dot{r}(\exp_p)_{*ru}u + r(\exp_p)_{*ru}\dot{u}.$$

Ahora bien, $\|u\|^2 = 1$ luego derivando se tiene $u \perp \dot{u}$ para todo t. Por el segundo item del Lema de Gauss, se deduce que

$$\langle (\exp_p)_{*ru} u, (\exp_p)_{*ru} \dot{u} \rangle_g = \langle u, \dot{u} \rangle_p = 0.$$

Entonces

$$\|\dot{\alpha_\delta}(t)\|^2 = \|\dot{r}(\exp_p)_{*ru} u\|^2 + \|r(\exp_p)_{*ru} \dot{u}\|^2 \geq \dot{r}^2 \|(\exp_p)_{*ru} u\|^2, \tag{10.12}$$

es decir

$$\|\dot{\alpha_\delta}(t)\| \geq |\dot{r}| \|(\exp_p)_{*ru} u\| = |\dot{r}|,$$

puesto que $(\exp_p)_{*ru} u = \frac{d}{dr} \exp_p(ru)$ (con r, u variables independientes), y el transporte paralelo es isométrico. Supongamos primero que α se sale de $U_c(p)$. Integrando en $[\delta, s]$, obtenemos

$$|c - r(0)| = |r(s) - r(0)| \leq \int_0^s |\dot{r}| \leq \int_0^s \|\dot{\alpha_\delta}(t)\| \leq L(\alpha_\delta) \leq L(\alpha).$$

Como $r(0) = r_\delta(0)$, haciendo tender $\delta \to 0^+$ se tiene $L(\alpha) \geq c$.

Supongamos ahora que $\alpha : [0,1] \to M$ une p con q. Como $L(\gamma_{p,q}) = \|v\|_p < R$, tomando $c = R$ en el ítem previo, se sigue que si α se sale de $U_R(p)$ entonces $L(\alpha) \geq R > L(\gamma_{p,q})$. Supongamos ahora que α no se sale de $U_R(p)$, entonces $\alpha(1) = y = \exp_p(1v)$ luego $\Gamma(1) = v$, con lo cual $r(1) = \|\Gamma(1)\|_p = \|v\|_p$ y entonces

$$|\|v\|_p - r_\delta(0)| \leq L(\alpha_\delta)$$

y haciendo tender $\delta \to 0^+$ nuevamente obtenemos $L(\alpha) \geq \|v\|_p$. Esto prueba que $\gamma_{p,q}$ es minimal, y entonces $d(p,q) = \|v\|_p = L(\gamma_{p,q})$.

Si $L(\alpha) = L(\gamma_{p,q}) = d(p,q)$, entonces $\alpha \subset U_R(p)$. Como α también es minimal, es una geodésica del spray por el tercer ítem del Corolario 10.2.4, y como $\alpha \subset U_R(p)$, debe ser una reparametrización de $\gamma_{p,q}$. Alternativamente, se puede argumentar que si vale la igualdad, de (10.12) se deduce que debe ser

$$r \, \|(\exp_p)_{*ru} \dot{u}\| = 0$$

para todo t, como $r \neq 0$ (salvo para $t = 0$) se deduce que $(\exp_p)_{*ru} \dot{u} = 0$. La exponencial es un difeomorfimo, luego debe ser $\dot{u} = 0$ o equivalentemente $u(t) = cte = u$, y esto nos dice que $\alpha(t) = \exp_p(r(t)u)$, luego α es una reparametrización de $\exp_p(tv) = \gamma_{p,q}(t)$. □

Se tiene la siguiente consecuencia del resultado local de minimalidad de las geodésicas.

Proposición 10.3.5. *Sean* (M, g) *Riemanniana fuerte y* $p \in M$. *Existe* $c_p > 0$ *tal que para todo* $0 < r < c_p$ *se tiene*

$$\exp_p(B_r(0_p)) = B_r(p),$$

$$\exp_p(S_r(0_p)) = S_r(p).$$

Además $\exp_p$ *es un difeomorfismo entre variedades en ambos casos.*

El Lema de Gauss (Teorema 10.3.2) nos dice que los rayos geodésicos que emanan de p *son ortogonales a las esferas* $S_r(p)$.

Demostración. Tomando c_p para que la exponencial esté definida y sea un difeomorfismo en $B_{c_p}(0_p)$, se tiene que $B_r(0), S_r(0)$ son subvariedades de T_pM, y $\exp_p|_{B_r(0_p)}$, $\exp_p|_{S_r(0_p)}$ son difeomorfismos con su imagen, siempre que $0 < r < c_p$. Si vemos que $\exp_p$ es una biyección en cada caso, resultará difeomorfismo. Si $\|v\|_p < r < c_p$, entonces tomando $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, $q = \exp_p(v)$ se verifica que γ es minimizante por el Teorema de minimalidad local (Teorema 10.3.4) y

$$d(q, p) = L(\gamma) = \|v\|_p < r,$$

luego $\exp_p(B_r(0_p)) \subset B_r(p)$. Recíprocamente, si $d(p, q) < r$ entonces $q \in U_r(p)$ porque cualquier curva que se sale de $U_r(p)$ tiene longitud $\geq r$ por el teorema de minimalidad local. Existe entonces una única geodésica $\gamma \subset U_r(p)$ con velocidad inicial en $B_r(0_p)$ tal que $q = \exp_p(v)$, y $\|v\|_p = d(p, q) < r$, luego vale la otra inclusión.

La segunda afirmación para $S_r(p)$ tiene una prueba idéntica.

Respecto del Lema de Gauss, sean $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ y $q = \exp_p(v)$, con $d(p, q) = r$ y $w \in T_qS_r(p)$. Tomemos $\beta \subset S_r(p)$ tal que $\dot\beta(0) = w$, entonces se tiene $f(s) = d_g(\beta(s), p)^2 = r^2$ en un entorno de cero, y tomando para cada s el vector $v(s) = \exp_p^{-1}\beta(s)$, se verifica $\|v(s)\|_p = r$, $v(0) = v$. Derivando f en $s = 0$ se obtiene $0 = 2\langle v, v'(0)\rangle_p$. Pero $\beta(s) = \exp_p v(s)$, luego $w = \beta'(0) = (\exp_p)_{*v}v'(0)$, y por el segundo ítem del Lema de Gauss,

$$\langle \dot\gamma(1), w\rangle = \langle (\exp_p)_{*v}v, (\exp_p)_{*v}v'(0)\rangle = \langle v, v'(0)\rangle = 0.$$

□

10.3.3.1. Variedades Riemannianas débiles

Si consideramos una métrica Riemanniana en la variedad M que sólo sea acotada superiormente, perdemos la minimalidad de las geodésicas.

Observación 10.3.6. Usamos $\|\cdot\|$ para denotar la norma del espacio de Banach E que modela M, y en este caso denotamos

$$B_R(0_p) = \{v \in T_pM : \|v\| < R\}$$

a la bola abierta *con la topología de* E, con R suficientemente pequeño como para que $U_R(p) = \exp_p(B_R(0_p))$ sea un entorno normal de p en M. Consideramos las coordenadas polares de α como en la Observación 10.3.3, donde $r = \|\Gamma\|_p$ denota ahora la norma de Γ con la métrica Riemanniana de M.

Se tiene el siguiente resultado de minimalidad respecto de curvas *que no salen del entorno normal*.

Teorema 10.3.7 (Minimalidad local de las geodésicas, (M, g) Riemanniana débil)**.** *Sean* $p \in M$, $R > 0$ *como en la observación previa,* $\gamma_{p,q}$ *la geodésica del spray que une* p, q. *Entonces*

1. $L(\alpha) \geq L(\gamma_{p,q})$ *para toda curva* $\alpha : [0,1] \to U_R(p)$ *admisible que una* p *con* q.
2. *Vale la igualdad en el ítem previo si y sólo si* α *es una reparametrización de* $\gamma_{p,q}$.

Demostración. Sea $\Gamma = \exp_p^{-1} \alpha$, entonces $\Gamma(1) = v$, con lo cual $r(1) = \|v\|_p$. Razonando como en el Teorema 10.3.4, se tiene

$$L(\gamma_{p,q}) = \|v\|_p = |r(1) - r(0)| \leq L(\alpha).$$

Si $L(\alpha) = L(\gamma_{p,q}) = d(p,q)$, como α también es minimal, es una geodésica del spray por el tercer ítem del Corolario 10.2.4, y como $\alpha \subset U_R(p)$, debe ser una reparametrización de $\gamma_{p,q}$. Alternativamente, se puede argumentar que si vale la igualdad, de (10.12) se deduce que debe ser

$$r\, \|(\exp_p)_{*ru}\dot{u}\| = 0$$

para todo t, como $r \neq 0$ (salvo para $t = 0$) se deduce que $(\exp_p)_{*ru}\dot{u} = 0$. La exponencial es un difeomorfimo, luego debe ser $\dot{u} = 0$ o equivalentemente $u(t) = cte = u$, y esto nos dice que $\alpha(t) = \exp_p(r(t)u)$, luego α es una reparametrización de $\exp_p(tv) = \gamma_{p,q}(t)$. □

10.3.4. Las curvas continuas minimales

En general, sabemos que una curva suave a trozos que es minimal debe ser una geodésica. Pero este resultado se puede extender a curvas rectificables, lo cual resulta útil para comparar estos resultados con el Teorema de Hopf-Rinow métrico (Teorema 8.2.3).

Proposición 10.3.8. *Sea* (M, g) *Riemanniana fuerte. Supongamos que* $\gamma : [0,1] \to M$ *es una curva continua rectificable tal que* $\ell(\gamma)$ *es minimal, es decir, realiza la distancia Riemanniana entre los extremos. Entonces* γ *es una reparametrización de una geodésica corta del spray.*

Demostración. Como todo punto $p_t = \gamma(t)$ tiene un entorno normal de manera que en un entorno de él la exponencial está definida por lo menos en la bola B_{r_t} del tangente, tomando un cubrimiento de la imagen de γ por entornos normales y extrayendo un subcubrimiento finito, resulta que existe $R > 0$ de manera que, para todo $t \in [0,1]$, $\exp_{\gamma(t)}$ está definida en $B_R(0) \subset T_{p_t}M$. Tomamos una partición $\pi = \{t_i\}$ del $[0,1]$ de manera que $d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) < R$. Basta probar que γ es una reparametrización de una geodésica minimal en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, ya que en ese caso se obtiene una geodésica a trozos que es minimal, y por el tercer ítem del Corolario 10.2.4, γ es una geodésica del spray. Sean $p = \gamma(t_i)$, $q = \gamma(t_{i+1})$ y notemos que γ restringida a este intervalo sigue siendo minimal. Como $d(p,q) < R$, existe β geodésica minimal que los une. Supongamos que existe $x \in \gamma$ entre p, q tal que $x \notin \beta$. Como $d(p,x) = \ell(\gamma_{p,x}) \leq \ell(\gamma_{p,q}) < R$, existe una geodésica corta μ_1 que comienza en p y termina en x. Análogamente, como $d(x,q) = \ell(\gamma_{x,q}) \leq \ell(\gamma_{p,q}) < R$, existe una geodésica corta que comienza en q y termina en r, llamaremos μ_2 a esta geodésica pero revertida, es decir, a la geodésica corta que comienza en x y termina en q. Sea $\mu = \mu_2 \sharp \mu_1$ que es una curva admisible que une p con q. Entonces

$$\begin{aligned} L(\mu) &= L(\mu_1) + L(\mu_2) = d(p,x) + d(x,q) = \ell(\gamma|_{p,x}) + \ell(\gamma|_{x,q}) \\ &= \ell(\gamma|_{p,q}) = d(p,q), \end{aligned}$$

lo que prueba que μ es corta. Entonces es una reparametrización de β, luego $x \in \beta$, y esto es absurdo. □

10.3.5. La esfera, grupos unitarios y la Grassmanniana

En algunos casos es posible estimar directamente el radio R de minimalidad del Teorema 10.3.4.

10.3.5.1. La esfera de un espacio de Hilbert

Ejemplo 10.3.9. Un ejemplo importante donde se pueden calcular los radios de inyectividad de la exponencial, es la esfera S de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Dado $p \in S$, sea $p' \in M$ su opuesto. Afirmamos que $B_R(p) = S - \{p'\}$ es un entorno normal de p con las propiedades deseadas, para $R = \pi$. En primer lugar, la exponencial está definida en todo el tangente T_pM, para todo $p \in S$. En segundo lugar, a partir de la expresión explícita de la exponencial que obtuvimos en la Sección 7.6,

$$\exp_p(v) = \cos(k)p + \frac{\operatorname{sen}(k)}{k}v$$

para $v \in T_pS = \operatorname{span}(p)^\perp$ y $k = \|v\|$, no es difícil ver que esta es inyectiva para $k < \pi$, pues p, v son linealmente independientes, de hecho ortogonales. Denotando $g(k) = \frac{\operatorname{sen}(k)}{k}$, $h(k) = \frac{k\cos(k) - \operatorname{sen}(k)}{k^3}$, un cálculo sencillo nos dice que su diferencial en $w \in T_pM = \operatorname{span}(p)^\perp$ es

$$(\exp_p)_{*v}w = -g(k)\langle v, w\rangle p + h(k)\langle v, w\rangle v + g(k)w.$$

Este es un operador acotado, entre los espacios de Hilbert de la misma dimensión $\mathcal{H}_0 = \operatorname{span}(p)^\perp$ y $\mathcal{H}_1 = \operatorname{span}(\exp_p(v))^\perp$. Si fuera $(\exp_p)_{*v}w = 0$, haciendo el producto escalar contra p se obtendría

$$-g(k)\langle v, w\rangle = 0.$$

Como $g(k) \neq 0$, se deduce que $w = 0$. Por otra parte, dado $z \in T_{\exp_p(v)}S = \{\cos(k)p + g(k)v\}^\perp$, entonces tomando $r = \frac{1}{\cos(k)}\langle v, z\rangle$ -que está bien determinado siempre que $k < \pi$- aseveramos que

$$w = \frac{1}{g(k)}\left(z + g(k)rp - h(k)rv\right)$$

verifica $w \in T_pS$ y $\exp_{*v} w = z$ (Ejercicio 10.IX). Esto prueba que esta aplicación diferencial es un epimorfismo, y en consecuencia, un isomorfismo.

Ahora, dado $q \in S - \{p'\}$, existe una única geodésica γ del spray que une p, q, y esta geodésica verifica $\gamma \subset S - \{p'\}$. Se deduce de aquí que si $q \in S - \{p'\}$, la única geodésica del spray

$$\gamma_{p,q}(t) = \exp_p(tw) = \cos(\|w\|t)p + \frac{\operatorname{sen}(\|w\|t)}{\|w\|}w$$

que une p con q (que es un círculo máximo que pasa por p, q) es la única curva minimal que une p con q y en particular

$$d(p, q) = L(\gamma_{p,q}) = \|w\| < \pi.$$

Por otra parte, a partir del hecho de que $\gamma_{p,q}(1) = q$, un simple despeje nos muestra que

$$d(p,q) = \|w\| = \arccos(\langle p, q\rangle).$$

Como S se obtiene como la clausura de $S - \{p'\}$, se deduce que $d(p,p') = \pi$, y por otra parte cualquier círculo máximo que una p con q tiene longitud π, lo que muestra que hay infinitas geodésicas minimales que unen p, p' en S (exceptuando el caso $\dim\mathcal{H} = 2$, donde sólo hay dos de ellas).

10.3.5.2. El grupo de operadores unitarios

Recordemos que para la métrica invariante a izquierda dada por la norma Frobenius en el grupo unitario, el spray métrico es exactamente el spray canónico, luego las geodésicas son grupos a un parámetro. Recordemos también que dados $u, v \in \mathcal{U}$, si $\|u - v\| < 2$ existe un único $z \in \mathfrak{g} = \mathcal{A}_{ah}$ con $\|z\| < \pi$ y $v = ue^z$ (aquí y en este ejemplo $\|\cdot\|$ denota la norma uniforme del álgebra). Por último, recordemos que si $\mathcal{A}$ es un álgebra de von Neumann (por ejemplo si $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$), entonces incluso cuando $\|u-v\| = 2$ existe $z \in \mathcal{A}_{ah}$ de manera que $\|z\| = \pi$ y $v = ue^z$. En todo caso el conjunto de los v a los que se puede llegar con los grupos a un parámetro que parten de v y tienen como exponente elementos de norma uniforme menor que π, forman un abierto denso en $\mathcal{U}$.

De acuerdo a la caracterización de la diferencial de la exponencial (Lema 3.1.14), si $v, w \in \mathcal{A}$ se tiene

$$\begin{aligned} \exp_{*v}(w) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(v + tw) = \int_0^1 e^{(1-t)v} w e^{tv} dt \\ &= e^v F(\operatorname{ad} v) w = [G(\operatorname{ad} v) w]\, e^v \end{aligned}$$

con $F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ las funciones enteras dadas por

$$F(\lambda) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}, \qquad G(\lambda) = \frac{e^\lambda - 1}{\lambda}.$$

De la última fórmula se deduce que la diferencial es inversible si y sólo si

$$\sigma(\operatorname{ad} v) \cap \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}\} = \emptyset.$$

En particular, si $\|z\| < \pi$, entonces $\|\operatorname{ad} z\| \leq 2\|z\| < 2\pi$ con lo cual $r(\operatorname{ad} z) < 2\pi$ y se tiene que la diferencial es inversible. Luego en el abierto denso $\{\|u - v\| < 2\} \subset \mathcal{U}$ la exponencial en u dada por $\exp_u(z) = ue^z$ es un difeomorfismo y podemos aplicar el teorema Riemanniano de minimalidad local.

Sea $\delta(t) = ue^{tz}$ con u, v, z como antes ($\|z\| \leq \pi$). Notemos que, como $\dot\delta = \delta z$, entonces $L_2(\delta) = \|z\|_2$, mientras que que para la métrica de Finsler $b = \|\cdot\|$ (dada por la norma uniforme del álgebra) se tiene $L_b(\delta) = \|z\|$.

Observemos que para $x \in M_n(\mathbb{C})$, se verifica

$$\|x\| = \max \lambda_i \leq \sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2} = (\mathrm{Tr}\, x^* x)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2$$

con λ_i los autovalores de $|x| = \sqrt{x^* x}$. En el caso de traza infinita, si $\mathcal{A} = \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ denota los operadores de Hilbert-Schmidt (ver el Apéndice D.1.3), consideramos el grupo unitario *clásico* de Lie-Banach dado por

$$\mathcal{U}_{\mathrm{HS}} = \{u \in \mathcal{U} : u - 1 \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})\}.$$

cuyo espacio tangente en la identidad se identifica con los operadores de Hilbert-Schmidt antihermitianos. Se recomienda ver el libro de Pierre de La Harpe [44] donde se estudian análogos en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (con $\mathcal{H}$ infinito dimensional) de los grupos de Lie clásicos introducidos en la Sección 4.2. Evidentemente, también se tiene

$$\|x\| = \max_{\lambda \in \sigma(|x|)} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \right)^{1/2} = \mathrm{Tr}(x^* x)^{1/2} = \|x\|_2$$

donde λ_i es el espectro (discreto) de $|x|$, que se acumula únicamente en el cero por ser todo operador de Hilbert-Schmidt un operador compacto en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Luego supondremos asimilado el caso de matrices como caso particular de los operadores de Hilbert-Schmidt, aunque haya otros aspectos fundamentales de la teoría donde hay notables diferencias, para los propósitos del próximo teorema será correcto razonar de esta forma. La propiedad esencial en ambos casos es que la métrica Riemanniana introducida *es acotada*.

Por otra parte, para un álgebra C^* infinito dimensional pero con traza finita τ (ver el Apéndice D.2.1), supondremos que la misma está normalizada, es decir que $\tau(1) = 1$. Como una traza es en particular un estado del álgebra, se verifica $\|\tau\| = \tau(1) = 1$, con lo cual se tiene en este caso la desigualdad inversa

$$\|x\|_2 = \tau(x^* x)^{\frac{1}{2}} \leq \|x^* x\|^{\frac{1}{2}} = \|x\|.$$

Observemos que en este caso *la métrica es sólo acotada superiormente*.

El siguiente teorema reúne los resultados concernientes a geodésicas minimales en este contexto, conocido como *álgebras de operadores con traza*. Estos resultados están adaptados de los trabajos [4, 7] de E. Andruchow y G. Larotonda.

Teorema 10.3.10. *Sea $\mathcal{U}$ el grupo unitario de un álgebra de operadores con traza con la métrica invariante a izquierda g_2 dada por*

$$\langle v, w \rangle_{g_2} = \langle u^* v, u^* w \rangle_2 = \mathrm{Tr}(u^* v (u^* w)^*) = -\mathrm{Tr}(v_0 w_0)$$

para $v = u v_0, w = u w_0 \in u\mathcal{A}_{\mathrm{ah}} = T_u\mathcal{U}$ (o bien τ en lugar de Tr en el caso de un álgebra C^* con traza finita). Entonces

1. *El spray canónico* $F_u(v) = vu^*v$ *coincide con el spray métrico.*

2. *Si* $u, v \in \mathcal{U}$ *y* $\|u - v\| < 2$, *existe un único* $z = \log(u^*v) \in \mathcal{A}_{ah}$ *tal que* $v = ue^z$, *y el grupo a un parámetro* $\delta(t) = ue^{tz}$ *es la única geodésica minimal del spray que une* v, u. *En particular*

$$d_2(u, v) = \|z\|_2 = \|\log(u^*v)\|_2.$$

3. *Si el álgebra es de von Neumann finita y* $\|u - v\| = 2$, *existe* $z \in \mathcal{A}_{ah}$ *tal que* $\|z\| = \pi$ *de manera que la curva a un parámetro con velocidad* z *es una geodésica corta que une* u, v. *Esta geodésica no es única.*

4. *Si el álgebra es finita, entonces el diámetro geodésico de la variedad Riemanniana* $(\mathcal{U}, g_2)$ *es exactamente* π.

5. *Si* $\mathcal{A} = \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ *(los operadores de Hilbert-Schmidt) entonces el diámetro geodésico de* $(\mathcal{U}_{HS}, g_2)$ *es infinito, y si* $\|u - v\| = 2$ *siempre existe alguna geodésica corta que los une. Esta geodésica corta no es única: la cantidad* $n_{u,v}$ *de exponentes* z *que se pueden hallar que conecten* u, v *depende de la multiplicidad de* -2 *como valor espectral de* $u - v$, *siendo* $n_{u,v} = 2$ *cuando la multiplicidad es* 1, *y* $n_{u,v} = \infty$ *cuando la multiplicidad es* > 1.

Demostración. Que el spray canónico coincide con el spray métrico es la Observación 10.1.5. Si $\|u - v\| < 2$, u^*v tiene un único logaritmo analítico antihermitiano z, y como $-1 \in \sigma(u - v)$, se tiene $\|z\| < \pi$. La curva $\delta(t) = ue^{tz}$ es una geodésica del spray que une u con $v = ue^z$, y $\exp_u(z) = ue^z$ es un difeomorfismo para $\|z\| < \pi$. La prueba de que δ es corta (y en particular $\|z\|_2 = d_2(u, v)$ es cierto) puede hallarse para operadores de Hilbert-Schmidt en el trabajo [7] de E. Andruchow y G. Larotonda, mientras que la prueba para álgebras finitas puede hallarse en el trabajo [4] de Andruchow.

Si el álgebra es de von Neumann, u^*v tiene logaritmos Borelianos z (ciertamente no únicos), y si $\|u - v\| = 2$ se pueden elegir de norma $\|z\| = \pi$ (ver la Sección 4.5.1.1). Como $d_2(u, v) = \|z\|_2 \leq \|z\| \leq \pi$ para todo u, v, se sigue que el diámetro geodésico es exactamente π si consideramos $u = 1$, $v = -1$, con $z = \pi i$, pues $\|z\|_2 = \mathrm{Tr}(z^*z)^{\frac{1}{2}} = \pi$.

Si $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{HS}$, dado $M > 0$ consideramos cualquier sucesión de números reales $\{x_n\} \subset \ell_2$ que verifique $\sup |x_n| \leq \pi$ y $\sum |x_n|^2 = M^2$. Fijada una b.o.n. $\{e_n\}$ del espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$, sea $u = 1$,

$$z = \sum i x_n \langle e_n, \cdot \rangle e_k.$$

Entonces z es un operador compacto antihermitiano que verifica $\|z\| \leq \pi$. Pero además $\|z\|_2 = \sqrt{\sum |x_n|^2} = M$, en particular z es un operador de Hilbert-Schmidt. Sea

$v = e^z \in \mathcal{U}_{HS}$. Entonces $d(1, v) = \|z\|_2 = M$ lo que prueba que el diámetro del grupo es infinito.

Si $u, v \in \mathcal{U}_{HS}$ verifican $\|u - v\| = 2$, podemos suponer que $u = 1$ por la invariancia de la métrica. Sea x operador de Hilbert-Schmidt tal que $v = 1 + x$. Entonces $v - u = v - 1 = x$ es un operador de Hilbert-Schmidt con $\|x\| = 2$. Como $\|v - 1\| = 2$ es equivalente a $-1 \in \sigma(v)$, esto a su vez es equivalente a $-2 \in \sigma(v - 1) = \sigma(x)$ (y $2e^{it} \notin \sigma(x)$ para $t \neq \pi$ pues $\sigma(v) \subset S^1$). Como el espectro de x sólo se puede acumular en cero, -2 es un punto aislado de $\sigma(x)$ (de hecho, un autovalor con multiplicidad geométrica finita). Sea p_0 el proyector asociado al autoespacio del autovalor -2, este debe ser un proyector de rango finito. Entonces, como $1 + x = v$ es unitario, y x es compacto, debe ser

$$x = -2p_0 + \sum_{k \geq 1} (e^{i\theta_k} - 1)p_k$$

donde p_k son proyectores disjuntos asociados a los autoespacios de autovalor $e^{i\theta_k}$ ($|\theta_k| < \pi$) del operador v, y además $\{p_j\}_{j \geq 0}$ son disjuntos y suman la identidad, es decir $\sum_j p_j \xi = \xi$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. También se tiene

$$\begin{aligned} v &= x + 1 = 1 - 2p_0 + \sum_{k \geq 1} (e^{i\theta_k} - 1)p_k \\ &= -2p_0 + \sum_{k \geq 1} (e^{i\theta_k} - 1)p_k + \sum_j p_j = -p_0 + \sum_{k \geq 1} e^{i\theta_k} p_k. \end{aligned}$$

Como x es Hilbert-Schmidt, debe ser

$$\infty > \sum_k |e^{i\theta_k} - 1|^2 = \sum_k 2(1 - \cos(\theta_k)).$$

Definimos

$$z = z_0 + z_i = \pi i p_0 + \sum_k i\theta_k p_k.$$

Entonces z es un operador compacto y autoadjunto, con $e^z = v$, de hecho $\|z\| = \pi$, mientras que

$$\|z\|_2^2 = \sum |\theta_k|^2 + \pi^2.$$

Como $\theta_k \to 0$ (pues el espectro de x se acumula en cero) entonces existe una constante $C > 0$ tal que $1 - \cos(\theta_k) \geq C|\theta_k|^2$ para $k \geq k_0$, probando que $\|z\|_2 < \infty$, es decir que z es un operador de Hilbert-Schmidt. Luego $\delta(t) = e^{tz}$ es una geodésica corta de $\mathcal{U}_{HS}$. La multiplicidad de los posibles z tales que $e^z = v$ se sigue del siguiente hecho: elegimos una base $\{e_i\}_{i=1\ldots n}$ del rango de p_0, y escribimos

$$p_0 = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \cdot \rangle e_i.$$

Entonces la componente $z_0 = \pi i p_0$ de z puede cambiarse por

$$z_0' = \pi i \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\alpha_i} e_i \otimes e_i$$

donde $\alpha_i = \pm 1$. Como $e^{\pm \pi i e_i \otimes e_i} = -e_i \otimes e_i$, se tiene $e^{z_0'} = -p_0$ para cualquier base del rango de p_0, para cualquier elección de los α_i, lo que nos dice que hay infinitas elecciones de z posibles, luego hay infinitas curvas cortas que unen 1 con v en $\mathcal{U}_{HS}$. La única excepción es cuando $n = 1$, en ese caso hay sólo dos posibles elecciones de z_0' que son $\pm e_1 \otimes e_1$, luego hay sólo dos posibles elecciones de z. □

Observación 10.3.11. Hay un detalle importante para remarcar del teorema previo. En el caso de métricas acotadas (matrices y operadores Hilbert-Schmidt), el teorema de minimalidad local (Teorema 10.3.4) nos dice que en el entorno de la identidad dado por

$$B = \{e^v : v^* = -v,\ \|v\|_2 < \pi\}$$

las curvas cortas que unen $u \in B$ con la identidad son geodésicas (grupos a un parámetro de la exponencial), puesto que $\|v\| < \|v\|_2 < \pi$ garantiza que la exponencial es un difeomorfismo; además este entorno es óptimo desde el punto de vista del Teorema 10.3.4, pues si admitimos que $\|v\|_2 = \pi$, podemos hallar v tal que $\exp_{*v}$ no es inversible (basta tomar $v = \pi e \otimes e$ con $e \in \mathcal{H}$ de norma unitaria). Sin embargo el teorema previo asegura el resultado para el abierto denso

$$W = \{e^w : w^* = -w,\ \|w\| < \pi\} = \{u \in \mathcal{U} : \|u - 1\| < 2\},$$

y cabe notar que la inclusión $B \subset W$ es *estricta*.

10.3.5.3. El grupo de unitarios con la norma uniforme

Ahora estamos interesados en la curvas cortas del grupo unitario *pero para la métrica de Finsler* b *inducida por la norma uniforme*, que no es una métrica Riemanniana. Afirmamos que se trata nuevamente de los grupos a un parámetro. Aquí $\mathcal{U}$ denota el grupo unitario de un espacio de Hilbert de dimensión finita o infinita.

Teorema 10.3.12. *Si* $\delta(t) = ue^{tz}$ *con* $\|z\| \leq \pi$ *y* $u, v \in \mathcal{U}$*, entonces*

$$L_b(\delta) = \|z\| \leq L_b(\alpha) = \int_0^1 \|\dot{\alpha}\| dt$$

para toda curva $\alpha \subset \mathcal{U}$ *admisible que una* u *con* v*, y en particular*

$$d_b(u, v) = \|z\|.$$

Demostración. Observemos en primer lugar que $-z^2 \geq 0$ por ser $z^* = -z$. En el caso finito dimensional, tomamos el autovector de $-z^2$ correspondiente al autovalor $\|z^2\| = \|z\|^2$, y lo normalizamos para obtener $\xi \in \mathcal{H}$ unitario tal que $-z^2\xi = \|z\|^2\xi$.

En el caso infinito dimensional, se puede hallar un autovector normizante y unitario de la siguiente manera: tomando un estado $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ tal que $\rho(-z^2) = \|z^2\| = \|z\|^2$, construimos la representación GNS del álgebra inducida por ρ y consideramos $\xi = [1] \in \mathcal{H}$. Como muestra el Lema B.3.17 del Apéndice, se verifica también $-z^2 \cdot \xi = \|z\|^2\xi$. Sea $\gamma = \delta \cdot \xi$, entonces como $\delta(t)$ es unitario para todo t, se tiene $\gamma \subset S$, la esfera del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Observemos que $\dot{\gamma}(t) = uze^{tz} \cdot \xi$, luego si usamos $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ para denotar la norma del espacio de Hilbert

$$\|\dot{\gamma}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = -\langle z^2 e^{tz} \cdot \xi, e^{tz} \cdot \xi\rangle = -\langle z^2 \cdot \xi, \xi\rangle = \|z\|^2\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 = \|z\|^2,$$

con lo cual $L_{\mathcal{S}}(\gamma) = \|z\| \leq \pi$. Derivando nuevamente γ se tiene

$$\ddot{\gamma}(t) = ue^{tz}z^2 \cdot \xi = -\|z\|^2\gamma = -L_{\mathcal{S}}(\gamma)^2\gamma,$$

luego γ es una geodésica de la esfera con longitud menor o igual a π y por ende minimal. Si α era cualquier otra curva uniendo $u, v \in \mathcal{U}$, y consideramos $\beta(t) = \alpha \cdot \xi$, se tiene que β debe ser por lo menos tan larga como γ, y entonces

$$\|z\| = L_b(\delta) = L_{\mathcal{S}}(\delta \cdot \xi) \leq L_{\mathcal{S}}(\alpha \cdot \xi) = \int_0^1 \|\dot{\alpha} \cdot \xi\|_{\mathcal{H}} \leq \int_0^1 \|\dot{\alpha}\| = L_b(\alpha).$$

□

Este resultado se debe a C. J. Atkin [14, 15], donde el autor prueba el mismo junto con otros resultados similares para el grupo ortogonal y los grupos unitario y ortogonal simplécticos, usando técnicas introducidas por Putnam y Wintner en [77, 78] sobre logaritmos de operadores ortogonales en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Cabe mencionar que la prueba que presentamos es una variación de la de Atkin, introducida por Porta y Recht en el contexto de la Grassmanniana [76]; en ese contexto, en forma independiente, N. Salinas obtiene el mismo resultado y da una estimación de la relación entre la distancia geodésica y la distancia lineal [84].

10.3.5.4. El grupo de unitarios con normas simétricas

Un caso que contiene al de la sección previa y al de los operadores de Hilbert-Schmidt, es el siguiente. Dada una norma simétrica $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (seguimos aquí la notación del Apéndice D.1.2) podemos considerar la métrica en el álgebra de Lie del grupo de operadores unitarios dada por

$$\|v\|_u = \|u^*v\|_{\mathcal{I}} = \|v\|_{\mathcal{I}}$$

para $v \in T_u\mathcal{U}$. Se considera en el caso infinito dimensional el grupo unitario

$$\mathcal{U}_{\mathcal{I}} = \{u \in \mathcal{U} : u - 1 \in \mathcal{I}\}$$

y este resulta grupo de Lie-Banach cuya álgebra de Lie-Banach son los operadores antihermitianos de $\mathcal{I}$.

Al igual que en los casos anteriores, es clave considerar la bola de radio π *en la norma uniforme*, puesto que allí la exponencial es un difeomorfismo. Por ser la norma unitariamente invariante, el spray canónico del grupo $F_u(v) = vu^*v$ es compatible con la métrica y las geodésicas son nuevamente los grupos a un parámetro. Se tiene el siguiente teorema, cuya prueba puede hallarse en un trabajo de J. Antezana, G. Larotonda y A. Varela [11].

Teorema 10.3.13. *Si $u, v = ue^z \in \mathcal{U}$ con $z \in \mathcal{I}$, consideramos la geodésica $\delta(t) = ue^{tz}$. Entonces*

1. *Si $\|z\| \leq \pi$, la geodésica es minimal entre sus extremos.*
2. *Dados $u, v \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ existe $z \in \mathcal{I}$ tal que $\|z\| \leq \pi$ y $v = ue^z$.*
3. *Si la norma simétrica es estrictamente convexa (Observación 9.4.2), para $\|z\| < \pi$ (equivalentemente, para $\|u - v\| < 2$) esta geodésica es única.*
4. *La multiplicidad de geodésicas uniendo u, v con $\|u - v\| = 2$ se computa como en el último ítem del Teorema 10.3.10.*

Este resultado es excepcional porque según veremos en la Sección 10.4, es usual que en dimensión infinita no existan geodésicas minimales que unan puntos suficientemente lejanos.

10.3.5.5. La Grassmanniana

Dado un proyector autoadjunto, y un ideal simétricamente normado $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ podemos considerar la Grassmanniana dada por la órbita

$$\mathcal{O}_{\mathcal{I}}(p) = \{upu^* : u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}\}.$$

En el caso en que $\mathcal{I}$ son los operadores de Hilbert-Schmidt, esta se conoce como *Grassmanniana de Sato* o *Grassmanniana reducida*. En ese caso, la variedad fue estudiada por Z. Kovarik en [54], y los autores prueban allí que si $\|upu^* - vpv^*\| < 2$, entonces la única geodésica que une estos puntos (ver 7.6.6) es minimal para la norma de Hilbert-Schmidt. En un trabajo reciente, Andruchow y Larotonda [7] extienden este resultado a toda la Grassmanniana de Sato, probando que si la distancia uniforme lineal es exactamente 2, existen infinitas geodésicas cortas que unen upu^* con vpv^*

(comparar con el Teorema 10.3.10). Se prueba también en [7] un resultado análogo para las normas p de Schatten, con $p \geq 2$. A partir del resultado enunciado en el Teorema 10.3.13, no es difícil deducir un resultado análogo para la Grassmanniana, el cual dejamos como ejercicio (10.iv).

Teorema 10.3.14. *Sea $z^* = -z \in \mathcal{I}$, p un proyector autoadjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\delta(t) = e^{tz}pe^{-tz}$. Entonces*

1. *Si $\|z\| \leq \pi$, la geodésica es minimal entre sus extremos cuando se la mide con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$.*
2. *Dados $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$, existe $z \in \mathcal{I}$ tal que $\|z\| \leq \pi$ y $u = e^z$, y por ende dados dos puntos p, q en $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}(p)$ existe siempre una geodésica corta que los une. Esta es única si $\|q - p\| < 1$ y la norma simétrica es rotunda.*
3. *La multiplicidad de geodésicas uniendo p, q con $\|p - q\| = 1$ se computa como en el último ítem del Teorema 10.3.10.*

10.4. Existencia global de geodésicas cortas

En esta sección probamos que, en dimensión finita, existen geodésicas cortas siempre que la variedad sea completa, reforzando así el teorema de Hopf-Rinow métrico. El primer resultado en esa dirección es el siguiente teorema, de interés independiente, con una prueba adaptada del libro de Lang [58].

Teorema 10.4.1. *Sea (M, g) Riemanniana, conexa y de dimensión finita. Supongamos que existe $p \in M$ tal que $D(\exp_p) = T_pM$. Entonces para todo $q \in M$ existe una geodésica del spray corta que une q con p.*

Demostración. Tomamos c suficientemente pequeño como para garantizar las condiciones de la Proposición 10.3.5. Sea $q \in M$, si $q \in \overline{B_c}(p)$ el resultado queda probado por esa proposición. Supongamos entonces que $q \notin \overline{B_c}(p)$, es decir $d(q, p) > c$. Como M tiene dimensión finita y $\exp_p(S_c(0_p)) = S_c(p)$, este último es compacto y por ende existe al menos un punto $r \in S_c(p)$ tal que

$$d(q, r) = d(q, S_c(p)),$$

es decir un punto que minimiza la distancia de q a la esfera $S_c(p)$. Sea $v \in T_pM$, $\|v\|_p = 1$ tal que $\exp_p(cv) = r$. Afirmamos que $\gamma(t) = \exp(tv)$ es una geodésica corta que una p con q, para $t_0 = d(p, q)$. Es decir, estamos usando la estrategia de apuntar en la dirección correcta y luego probar que la flecha alcanza su objetivo. En primer

lugar observemos que, para cualquier curva α que una p con q, esta debe atravesar $S_c(p)$ al menos una vez, digamos en un instante t_1, luego

$$L(\gamma) = L(\gamma_{[0,t_1]}) + L(\gamma_{[t_1,1]}) \geq c + d(S_c(p), q) = d(p,r) + d(r,q).$$

Entonces $d(p,q) \geq d(p,r) + d(r,q)$, y como la otra desigualdad siempre vale, se tiene $d(p,q) = d(p,r) + d(r,q)$. Sea $J \subset [0, d(p,q)]$ el conjunto de los t tales que

$$d(p,q) = t + d(\gamma(t), q). \tag{10.13}$$

Como $0 \in J$ y d es continua, J es cerrado y no vacío. Sea $m = \max J$, si vemos que $m = d(p,q) = t_0$ entonces el resultado estaría probado pues $d(\gamma(t_0), q) = 0$ implica $\gamma(t_0) = q$. Supongamos que no es así, es decir $0 < m < d(p,q)$. Sea $x = \gamma(m)$ y tomemos $\delta > 0$ pequeño para que $S_\delta(x)$ sea difeomorfa con la esfera del tangente en x, y tal que $q \notin \overline{B}_\delta(x)$. Veremos que $m + \delta \in J$ lo cual es absurdo y prueba que $m = d(p,q)$ concluyendo así la prueba del teorema. Para ver que $m+\delta \in J$, repetimos el argumendo precedente. Existe $y \in S_\delta(x)$ tal que

$$d(x,q) = d(x,y) + d(y,q) = \delta + d(y,q).$$

Reemplazando m en la ecuación (10.13), tenemos que

$$d(p,q) = m + d(x,q) = m + \delta + d(y,q)$$

Afirmamos que $y = \gamma(m+\delta)$, y usando la última ecuación esto probaría que (10.13) vale para $m + \delta$. Se tiene

$$d(p,y) \geq d(p,q) - d(y,q) = m + \delta,$$

mientras que si consideramos los segmentos geodésicos del spray que unen p con x y x con y tienen longitud m y δ respectivamente, luego este camino dado por dos geodésicas una a continuación de la otra da la distancia entre p e y, y por el tercer item del Corolario 10.2.4 se trata de una geodésica del spray. Como coincide en el primer tramo con γ, debe tratarse de γ todo a lo largo de $[0, m+\delta]$, probando que $y = \gamma(m+\delta)$. □

Antes de proseguir presentamos un ejemplo para ilustrar cómo puede fallar el resultado previo en dimensión infinita, extraído de la Tesis Doctoral de J. McAlpin [64].

Ejemplo 10.4.2. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita, $\{e_n\}_{n\geq 0}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ el operador autoadjunto dado por

$$A(\sum_{n\geq 0} x_n e_n) = \sum a_n x_n e_n$$

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 302

donde $a_0 = 1$ y $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces es fácil ver que A es inversible, de hecho $\|v\| \leq \|Av\|$ para todo $v \in \mathcal{H}$, y además $\|Av\| = \|v\|$ si y sólo si $v \in \mathrm{span}(e_0)$. Sea $S \subset \mathcal{H}$ la esfera unitaria y sea $M = A(S)$. Entonces $M \subset \mathcal{H}$ es subvariedad regular, a la que le damos la métrica Riemanniana como subespacio de $\mathcal{H}$. Observemos que A fija $e_0, -e_0 \in S$, es decir $e_0, -e_0 \in M$. Afirmamos que no existe curva corta que una estos puntos en M. Sea $\beta \subset M$ que une estos puntos, sea $\alpha = A^{-1}\beta$ que es una curva en S que une $e_0, -e_0$. Entonces $\dot{\beta} = A\dot{\alpha}$ y si reparametrizamos α para que tenga velociadad constante se tiene

$$\|\dot{\beta}(t)\| = \|A\dot{\alpha}(t)\| \geq \|\dot{\alpha}(t)\| = L(\alpha) \geq \pi,$$

con lo cual $d_M(e_0, -e_0) \geq \pi$. Por otra parte, se tiene la igualdad $L(\beta) = \pi$ únicamente si $\|A\dot{\alpha}(t)\| = \|\dot{\alpha}(t)\|$ para todo $t \in [0,1]$, puesto que de ser estrictamente mayor en un t_0 el término de la izquierda, por continuidad sería mayor en un intervalo y entonces $L(\beta) > \pi$. Pero la igualdad sólo es posible si $\alpha(t) = \lambda(t)e_0$ con $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función C^1 a trozos, con lo cual $\beta = A\alpha$ no podría unir $e_0, -e_0$ en M. En resumen, cualquier curva en M que una estos puntos tiene longitud *estrictamente mayor que* π. Veamos que $d_M(e_0, -e_0) = \pi$ para concluir que no hay ninguna curva corta que los una. Ya tenemos una desigualdad, probemos la otra. Sea

$$\alpha_n(t) = \cos(\pi t)e_0 + \mathrm{sen}(\pi t)e_n$$

que es una geodésica corta que une $e_0, -e_0$ en S. Tomemos $\beta_n = A\alpha_n$. Entonces β_n une $e_0, -e_0$ en M y además

$$\|\dot{\beta_n}(t)\|^2 = \pi^2 \left[\mathrm{sen}^2(\pi t) + \cos^2(\pi t)(1 + \frac{1}{2^n})^2\right].$$

Luego $L(\beta_n) \to \pi$, y se deduce que $d_M(e_0, -e_0) \leq \pi$, luego $d_M(e_0, -e_0) = \pi$.

En dimensión finita, sin embargo, se tiene el siguiente resultado que se deduce del Teorema de Hopf-Rinow métrico y el Teorema previo.

Corolario 10.4.3 (Hopf-Rinow en variedades Riemannianas)**.** *Sea* (M, g) *Riemanniana, conexa y de dimensión finita. Son equivalentes:*

1. (M, d_g) *es un espacio métrico completo.*
2. M *es geodésicamente completa.*
3. *Existe* $p \in M$ *tal que* $D(\exp_p) = T_pM$.
4. *Todo conjunto cerrado y acotado de* (M, d_g) *es compacto.*

En cualquiera de estos casos, para todo $x, y \in M$ *existe una geodésica corta* del spray *que los une.*

Demostración. Las implicaciones $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ las probamos en la Proposición 9.2.1, para variedades de Finsler sin restricciones de dimensión. Supongamos que vale 3. para algún $p \in M$, sea $C \subset M$ un conjunto cerrado y acotado. Existe $r > 0$ tal que $C \subset B_r(p)$. Por el Teorema 10.4.1, para cada punto $x \in C$ hay una geodésica corta $\gamma_x(t) = \exp_p(tv_x)$ que comienza en p y termina en x, es decir

$$r > d(x,p) = L(\gamma_x) = \|v_x\|_p.$$

Entonces $C \subset \exp_p(\overline{B_r}(0_p))$ y como M tiene dimensión finita $\overline{B_r}(0_p) \subset T_pM$ es compacto con lo cual C es un cerrado dentro de un compacto y en consecuencia compacto.

Ahora supongamos que vale 4. y sea $\{x_n\} \subset M$ de Cauchy. Entonces está en un conjunto acotado y cerrado de M, digamos en $\overline{B_r}(x_{n_0})$. Luego la sucesión $\{x_n\}$ tiene un punto de acumulación, que puede verse fácilmente que es el límite de la sucesión. Esto concluye la prueba de las equivalencias.

Si vale cualquiera de las hipótesis equivalentes, en particular (M, d_g) es de métrica interior, localmente compacto y completo. Por el Teorema de Hopf-Rinow métrico 8.2.3, sabemos que existe una curva γ *continua* que une x con y, que es corta para la métrica d_b, es decir $\ell(\gamma) = d_b(x,y)$. Por la Proposición 10.3.8, una simple reparametrización de γ nos da la geodésica del spray corta que une x con y. También se puede argumentar notando que como M es geodésicamente completa, se puede aplicar el Teorema 10.4.1. □

10.5. Convexidad local

En esta sección refinamos el resultado de los entornos normales, para probar que dado $p \in M$, para c suficientemente pequeño, en una variedad Riemanniana (M, g), la bola $B_c(p)$ es convexa. Las pruebas que daremos de estos resultados se remiten a la Tesis de McAlpin del año 1965 [64], aunque los resultados son anteriores.

Tomamos como siempre un entorno normal de $p \in M$ de la forma (U, W) de manera que $G(U \times B_R(0)) \supset W \times W$ con lo cual $W \subset U$, $W \subset U_R(p)$ para todo $p \in W$. Seguimos mayormente la exposición del libro de Lang [58, VIII, §5].

En un espacio de Hilbert (de hecho, en un espacio normado estrictamente convexo), las rectas tangentes a una esfera permanecen del lado externo de esta esfera. Este resultado tiene su análogo en variedades Riemannianas, en la siguiente proposición. Supondremos en esta sección que la métrica g es acotada.

Proposición 10.5.1. *Sea $p \in (M, g)$ Riemanniana fuerte. Existe $c_0 > 0$ tal que si $0 < r \leq c_0$, y γ es una geodésica tangente a $S_r(p)$ en $t = t_0$, entonces γ permanece fuera de $S_r(p)$ para t en un entorno de t_0.*

Demostración. Elegimos c como en la Proposición 10.3.5 para que la exponencial en p sea un difeomorfismo $\exp_p : B_r(0) \to B_r(p)$ para $0 < r < c$. Reparametrizando asumiremos que $t_0 = 0$, y podemos escribir $\gamma_{q,u}(s) = \exp_q(su)$ con $q \in S_r(p)$, $u \neq 0 \in T_qM$. Para s cerca de cero, γ está dentro de $B_c(p)$ luego podemos calcular

$$w_{q,u}(s) = \exp_p^{-1}(\gamma_{q,u}(s)) \in T_pM.$$

Sea $f_{q,u}(s) = \|w_{q,u}(s)\|_p^2$, entonces $f(0) = r^2$ y afirmamos que es mayor que r para s cerca de cero, si r es suficientemente pequeño. Calculamos

$$\tfrac{1}{2}f'_{q,u}(s) = \langle w_{q,u}(s), w'_{q,u}(s)\rangle_p,$$

$$\tfrac{1}{2}f''_{q,u}(s) = \|w'_{q,u}(s)\|_p^2 + \langle w_{q,u}(s), w''_{q,u}(s)\rangle_p.$$

Sea $h(q,u) = \tfrac{1}{2}f''_{q,u}(0)$, definida en TU para U entorno de p suficientemente pequeño, y resulta una función continua (usando que la variedad es por lo menos de clase C^2).

Tomando $r = 0$, es decir $q = p$, la curva γ comienza en p luego $w_{p,u}(s) = su$, con lo cual $f_{p,u}(s) = s^2\|u\|_p^2$ lo que nos dice que $h(p,u) = \|u\|_p^2 > 0$ así que $h_p = h(p,\cdot)$ es definida positiva en T_pM. Por la continuidad de h en TM, existe un entorno de $\{p\} \times T_pM$ donde h_q es definida positiva, es decir $h(q,u) > 0$ si $u \neq 0 \in T_qM$. Tomemos $c_0 > 0$ tal que $B_{c_0}(p)$ esté dentro de ese entorno. Fijado $r \leq c_0$ y $q \in S_r(p) = \exp_p(S_r(0_p))$, llamemos $w_s = w_{q,u}(s)$ y como γ es tangente a $S_r(p)$ en q, se tiene que w es tangente a $S_r(0_p)$ en w_0. Luego

$$\tfrac{1}{2}f'(0) = \langle w_0, w'_0\rangle_p = 0.$$

Como $\tfrac{1}{2}f''(0) = h(q,u) > 0$, se tiene que

$$d(p,\gamma(s))^2 = f(s) > f(0) = r^2$$

para s suficientemente pequeño. □

Como corolario, se obtiene la convexidad de las bolas para radios suficientemente chicos.

Teorema 10.5.2. *Sean $p \in (M,g)$ y (U,W) entorno normal de p. Sea $r > 0$ tal que $B_r(p) \subset U$. Existe $c_1 > 0$ tal que si $0 < r \leq c_1$ y $\beta \subset U$ es la geodésica corta que une $q, q' \in B_r(p)$, entonces $\beta \subset B_r(p)$ y en particular $B_r(p) \subset M$ es convexa.*

Demostración. Sea $\beta \subset U$, que une $q, q' \in B_r(p)$, $\beta(t) = \exp_q(tz)$ y $\|z\|_q = d(q,q')$. Tomemos c pequeño tal que $\exp_p(B_c(0_p)) = B_c(p)$ como en la Proposición 10.3.5, sea $c_1 = c/2$. Afirmamos que si $0 < r \leq c_1$, entonces $\beta \subset U_c(p) = B_c(p)$. De

no ser así, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $d(\beta(t_0),p) \geq c$. Sean $\gamma_q, \gamma_{q'}$ geodésicas cortas que emanan de p tales que

$$L(\gamma_q) = d(q,p) < r, \qquad L(\gamma_{q'}) = d(q',p) < r.$$

Si β^* denota la curva β revertida, es decir $\beta^*(t) = \beta(1-t)$, sean

$$\gamma_1 = \beta|_{[0,t_0]} \sharp\, \gamma_q, \qquad \gamma_2 = \beta^*|_{[0,1-t_0]} \sharp\, \gamma_{q'},$$

que resultan dos curvas admisibles que emanan de p y salen de $B_c(p)$. Por el teorema de minimalidad local (10.3.4), $L(\gamma_i) \geq c$. Entonces

$$c \leq L(\beta|_{[0,t_0]}) + L(\gamma_q) < L(\beta|_{[0,t_0]}) + r$$

y también

$$c \leq L(\beta|_{[1,t_0]}) + L(\gamma_{q'}) < L(\beta|_{[1,t_0]}) + r.$$

Sumando estas dos desigualdades se tiene que

$$2c \leq L(\beta) + 2r < L(\beta) + 2c_1 = L(\beta) + c,$$

es decir $c < L(\beta)$. Pero esto es absurdo pues $L(\beta) = d(q,q') \leq d(q,p) + d(p,q') < 2r \leq 2c_1 = c$. Como $\beta \subset B_c(p)$, podemos considerar $w : [0,1] \to T_pM$ dada por la expresión $w_s = \exp_p^{-1} \beta(s)$. Observemos que para cada s,

$$U_c(p) \ni \beta(s) = \exp_p(1 w_s)$$

y $\|w_s\| < c < R$, luego $\gamma_s(t) = \exp_p(t w_s)$ es la única geodésica corta que une p con $\beta(s)$, con lo cual

$$f(s) = d(p,\beta(s))^2 = L(\gamma_s)^2 = \|\dot\gamma_s(t)\|^2_{\gamma_s(t)} = \|w_s\|^2_p.$$

Afirmamos que $f(s) < r^2$ para todo $s \in [0,1]$, lo que concluiría la prueba del teorema. De no ser así, existe $s_0 \in (0,1)$ donde f alcanza su máximo absoluto, $f(s_0) = \delta \geq r^2$. Debe ser entonces $f'(s_0) = 0$, y derivando la última ecuación en $s = s_0$ deducimos que $\langle w_{s_0}, \dot w_{s_0}\rangle = 0$, es decir β es tangente a la esfera $S_\delta(p)$ en $s = s_0$. Por la proposición previa, β está estrictamente fuera de $S_\delta(p)$ para s cerca de s_0, contradiciendo la maximalidad de s_0. □

10.6. Isometrías

Definición 10.6.1 (Isometrías locales e isometrías)**.** Diremos que $f : (M, b_M) \to (N, b_N)$ es una *isometría local* entre variedades de Finsler si $\|f_* V\|_N = \|V\|_M$ para todo $V \in TM$ y f es un difeomorfismo local, y que f es una *isometría* si $d_N(f(x), f(y)) = d_M(x,y)$ para todo $x, y \in M$.

Proposición 10.6.2. *Sea* $f : (M, b_M) \to (N, b_N)$ *una aplicación de clase* C^1 *entre variedades de Finsler. Entonces:*

1. *Si* f *es una isometría local, entonces para todo* $x, y \in M$ *se tiene*

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y),$$

   mientras que si x, y *están suficientemente cerca se tiene la igualdad.*

2. *Sean* M, N *Riemannianas fuertes. Si* f *es una isometría también es una isometría local.*

Demostración. Supongamos que f es isometría local. Sean $x, y \in M$, tomemos una curva $\gamma \subset M$ tal que $L(\gamma) < d(x, y) + \epsilon$. Sea $\beta = f \circ \gamma$, que une $f(x)$ con $f(y)$ en M. Entonces

$$d(f(x), f(y)) \leq L(\beta) = L(\gamma) < d(x, y) + \epsilon.$$

Luego $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$. Como f es un difeomorfismo local podemos revertir el argumento para probar que

$$d(x, y) = d(f^{-1}f(x), f^{-1}f(y)) \leq d(f(x), f(y))$$

si x, y están suficientemente cerca. Supongamos ahora que f es una isometría, sea $V = (p, v) \in TM$, sea $\alpha \subset M$ una geodésica tal que $\alpha'(0) = V$. Entonces para t pequeño en el dominio de α se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^t \|(f \circ \alpha)'\|_{f\circ\alpha} dt &\geq d(f(\alpha(t)), f(p)) = d(\alpha(t), p) \\ &= L_0^t(\alpha) = tL(\alpha) = t\|v\|_p. \end{aligned}$$

Luego $\|v\|_p \leq \frac{1}{t}\int_0^t \|(f \circ \alpha)'\|_{f\circ\alpha} dt$, y haciendo tender $t \to 0^+$ se tiene $\|v\|_p \leq \|f_{*p}v\|_{f(p)}$. Ahora revertimos el argumento, sea $\beta \subset N$ una geodésica tal que $\beta'(0) = f_{*p}v$, sea $\alpha = f^{-1}\beta$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\alpha'\|_\alpha dt &\geq d(\alpha(t), p) = d(\beta(t), f(p)) \\ &= L_0^t(\beta) = tL(\beta) = t\|f_{*p}v\|_{f(p)}, \end{aligned}$$

y nuevamente dividiendo por t y haciendo tender t a cero se tiene la desigualdad opuesta. □

10.6.1. Invariancia de la derivada de Levi-Civita por isometrías

Recordemos que dado X campo en D, y una función suave e inyectiva $f : D \to M$, el campo f_*X en $F(M) \subset D$ se define como $f_*X(f(p)) = Df_p(X_p)$.

Teorema 10.6.3 (Invariancia de la conexión por isometrías). *Si $f : (D, g) \to (M, \tilde{g})$ es una isometría global, y f_*X, f_*Y son campos en M, entonces las derivadas covariantes están f- relacionadas: para todo $p \in M$,*

$$\nabla^M_{f_*X} f_*Y(f(p)) = Df_p(\nabla^D_X Y(p)).$$

Demostración. Está claro que todo par de campos en M es de la forma f_*X, f_*Y para campos X, Y en D (Sección 2.5.2). También es claro que el operador

$$\nabla_{f_*X} f_*Y = Df(\nabla^D_X Y)$$

es $\mathbb{R}$-bilineal y h-lineal en la variable f_*X, para toda $h : M \to \mathbb{R}$ suave. Es claro que es una derivación en la segunda variable, y es fácil ver que no tiene torsión. Por último, para todo campo Z en D se tiene

$$f_*Z\langle f_*X, f_*Y\rangle(f(p)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle f_*X(\Phi(t)), f_*Y(\Phi(t))\rangle_{\Phi(t)}$$

donde Φ es el flujo de f_*Z, que por el mismo lema, es $f \circ \phi$ con ϕ el flujo de Z. Luego

$$\begin{aligned}
f_*Z\langle f_*X, f_*Y\rangle(f(p)) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle f_*X(f \circ \phi(t)), f_*Y(f \circ \phi(t))\rangle_{f\circ\Phi(t)} \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle Df_{\phi(t)}(X_{\phi(t)}), Df_{\phi(t)}(Y_{\phi(t)})\rangle_{f\circ\Phi(t)} \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle X_{\phi(t)}, Y_{\phi(t)}\rangle_{\phi(t)} = Z\langle X, Y\rangle(p) \\
&= \langle \nabla^D_Z X(p), Y_p\rangle_p + \langle X_p, \nabla^D_Z Y(p)\rangle_p \\
&= \langle Df_p(\nabla^D_Z X(p)), Df_p(Y_p)\rangle_p \\
&\quad + \langle Df_p(X_p), Df_p(\nabla^D_Z Y(p))\rangle_{f(p)} \\
&= \langle \nabla_{f_*Z} f_*X(f(p)), f_*Y(f(p))\rangle_{f(p)} \\
&\quad + \langle f_*X(f(p)), \nabla_{f_*Z} f_*Y(f(p))\rangle_{f(p)} \\
&= \langle \nabla_{f_*Z} f_*X, f_*Y\rangle_{f(p)} + \langle f_*X, \nabla_{f_*Z} f_*Y\rangle_{f(p)},
\end{aligned}$$

lo que prueba que ∇ así definido en M es compatible con la métrica. Por la unicidad de la derivada de Levi-Civita, queda probado el teorema. □

En particular el teorema nos dice que si γ es una curva en D y μ es un campo a lo largo de γ, entonces $Df_\gamma\mu$ es un campo a lo largo de $f \circ \gamma$ y

$$\nabla_{(f\circ\gamma)^\bullet}(Df_\gamma\mu) = \nabla_{Df_\gamma\dot{\gamma}} Df_\gamma\mu = Df_\gamma(\nabla_{\dot{\gamma}}\mu).$$

Corolario 10.6.4 (Invariancia del transporte paralelo por isometrías)**.** *Si* $f : D \to M$ *es una isometría riemanniana, transforma geodésicas de* D *en geodésicas de* M*. Además, si* $\gamma \subset M$, $p = \gamma(a)$, *y* $\mu(t) = P(\gamma)_a^t v$ *es el transporte paralelo de* $v \in T_pD$ *a lo largo de* γ*, entonces*

$$\eta = Df_\gamma \mu$$

es el transporte paralelo de $Df_p v$ *a lo largo de* $f \circ \gamma$*.*

Teorema 10.6.5 (Invariancia de la curvatura por isometrías)**.** *Si* $f : N \to M$ *es una isometría local riemanniana, entonces* Df *preserva las curvaturas. Explícitamente, para todo* $p \in N$, $x, y, z \in T_pD$ *se tiene*

$$Df_p R^N_p(x, y)z = R^M_{f(p)}(Df_p x, Df_p y)Df_p z.$$

Demostración. Se deduce de la definición del tensor de curvatura y el Teorema 10.6.3. □

10.6.2. Campos de Killing métricos

En la Sección 7.3 estudiamos los campos de Killing de un spray; veremos en esta sección una subclase de campos de Killing que son los de la geometría riemanniana.

Definición 10.6.6. Decimos que el campo X en la variedad riemanniana (M, g) es un campo de Killing métrico si el flujo ρ_t de X es una isometría para todo t, esto es

$$\|D\rho_t v\|_{\rho_t(p)} = \|v\|_p \qquad \textit{para todo } p \in M,\ v \in T_pM.$$

Denotamos $\mathrm{Kill}(M, g)$ al conjujnto de todos los campos de Killing de la métrica g.

Observación 10.6.7. El Teorema 10.6.3 nos dice que toda isometría es automorfismo de la conexión. Luego todo campo de Killing métrico es un campo de Killing de la conexión, esto es $\mathrm{Kill}(M, g) \subset \mathrm{Kill}(M, \nabla)$ (Definición 7.3.9).

Teorema 10.6.8. *Sea* X *campo en* M*, sea* ρ_t *su flujo. Son equivalentes:*

1. $X \in \mathrm{Kill}(M, g)$.
2. *Para todo par de campos* Y, Z *en* M*, y todo* t *en el dominio del flujo, se tiene*
$$\langle \rho_t^* Y, \rho_t^* Z\rangle = \langle Y, Z\rangle \circ \rho_t$$
como funciones en M.

3. *Para todo par de campos* Y, Z *en* M

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle = -\langle \nabla_Z X, Y\rangle.$$

4. *Para todo campo* Y *en* M, $\langle \nabla_Y X, Y\rangle = 0$.

Demostración. De la definición, cambiando t por $-t$ y polarizando sabemos que

$$\langle D\rho_{-t}v, D\rho_{-t}w\rangle_{\rho_{-t}(p)} = \langle v, w\rangle_p$$

para todo $p \in M$, para todo $v, w \in T_pM$. Tomamos $v = Y_p$, $W = Z_p$ y tomando $p = \rho_t(q)$ deducimos que

$$\langle D\rho_{-t}Y_{\rho_t(q)}, D\rho_{-t}Z_{\rho_t(q)}\rangle = \langle Y_{\rho_t(q)}, Z_{\rho_t(q)}\rangle_{\rho_t(q)}$$

que se reescribe como

$$\langle \rho_t^* Y, \rho_t^* Z\rangle(q) = \langle Y, Z\rangle(\rho_t(q)).$$

Esto prueba que vale la segunda afirmación; claramente podemos deshacer el razonamiento y en realidad las dos primeras afirmaciones son equivalentes. Ahora derivamos ambos lados de la segunda identidad respecto de t. Por el Lema 7.3.8 y la compatibilidad de la métrica con la conexión obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \rho_t^* Y, \rho_t^* Z\rangle_q &= \langle [X, \rho_t^* Y], \rho_t^* Z\rangle_q + \langle \rho_t^* Y, [X, \rho_t^* Z]\rangle_q = X(\langle Y, Z\rangle)|_{\rho_t(q)} \\ &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle_{\rho_t(q)} + \langle Y, \nabla_X Z\rangle_{\rho_t(q)}.\end{aligned}$$

Ahora recordemos que la conexión tiene torsión nula para escribir $\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$ y similarmente $\nabla_X Z = \nabla_Z X + [X, Z]$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle [X, \rho_t^* Y], \rho_t^* Z\rangle_q + \langle \rho_t^* Y, [X, \rho_t^* Z]\rangle_q &= \langle \nabla_Y X, Z\rangle_{\rho_t(q)} + \langle [X, Y], Z\rangle_{\rho_t(q)} \\ &\quad + \langle Y, \nabla_Z X\rangle_{\rho_t(q)} + \langle Y, [X, Z]\rangle_{\rho_t(q)}.\end{aligned}$$

Podemos entonces aplicar la identidad (2) que estamos asumiendo para los campos $\overline{Y} = [X, Y], Z$ en el segundo producto interno a la derecha de la igualdad, e $Y, \overline{Z} = [X, Z]$ en el cuarto producto interno. Combinando con el Lema 7.3.8 obtenemos

$$\begin{aligned}\langle [X, \rho_t^* Y], \rho_t^* Z\rangle_q + \langle \rho_t^* Y, [X, \rho_t^* Z]\rangle_q &= \langle \nabla_Y X, Z\rangle_{\rho_t(q)} + \langle [X, \rho_t^* Y], \rho_t^* Z\rangle_q \\ &\quad + \langle Y, \nabla_Z X\rangle_{\rho_t(q)} + \langle \rho_t^* Y, [X, \rho_t^* Z]\rangle_q.\end{aligned}$$

Cancelando los términos iguales obtenemos

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle_{\rho_t(q)} = -\langle \nabla_Z X, Y\rangle_{\rho_t(q)},$$

y evaluando en $t = 0$ se deduce la tercer afirmación. La tercera afirmación es equivalente a la cuarta, polarizando. Acabamos de probar que en general (sin ninguna hipótesis sobre X) vale

$$\frac{d}{dt}\langle Y, Z\rangle(\rho_t(q)) = \langle \nabla_Y X, Z\rangle_{\rho_t(q)} + \langle [X, \rho_t^* Y], \rho_t^* Z\rangle_q + \langle Y, \nabla_Z X\rangle_{\rho_t(q)} + \langle \rho_t^* Y, [X, \rho_t^* Z]\rangle_q.$$

Supongamos que vale entonces la tercera afirmación, entonces tenemos

$$\frac{d}{dt}\langle Y, Z\rangle(\rho_t(q)) = \frac{d}{dt}\langle \rho_t^* Y, \rho_t^* Z\rangle_q$$

y esto dice que ambas funciones difieren en una constante. Evaluando en $t = 0$ vemos que en realidad son iguales, y esto prueba que la tercer afirmación implica la segunda. Esto concluye la prueba de las equivalencias. □

Ya observamos al comienzo de esta sección que los campos de Killing métricos forman un subespacio del álgebra de Lie de campos de Killing de la conexión, y también sabemos que los campos de Killing de la conexión forman un álgebra de Lie (Teorema 7.3.14). Dejamos como ejercicio para el lector probar el siguiente resultado:

Proposición 10.6.9. $\mathrm{Kill}(M, g)$ *es subálgebra de Lie de* $\mathrm{Kill}(M, \nabla)$.

10.7. Curvatura seccional

En esta sección estudiamos la relación entre el tensor de curvatura y la métrica, que nos define la curvatura seccional de la variedad. Veremos como esta controla la diferencial de la exponencial y los campos de Jacobi.

Dada (M, g) Riemanniana, $p \in M$ y un plano bi-dimensional $\pi \subset T_pM$, queremos definir una cantidad que sólo depende del plano, que puede pensarse, ya que la exponencial en p es un difemorfismo local $\exp_p : B \to U_p$, como la curvatura seccional de la superficie bi-dimensional

$$M_\pi = \exp_p(B \cap \pi) \subset M.$$

Si $v, w \in \pi$, el *área* del paralelogramo generado por v, w está dada por

$$A(v, w) = \sqrt{\|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w\rangle_p^2}.$$

Esta cantidad es positiva y no nula si v, w son linealmente independientes por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Definimos

$$R_p : \{\pi \subset T_pM \text{ con } \pi \text{ un 2-plano}\} \to \mathbb{R}$$

de la siguiente manera. Sean $v, w \in \pi$ linealmente independientes. Entonces

$$R_p(\pi) = -\frac{\langle R_p(v,w)v, w\rangle_p}{A(v,w)^2}.$$

Lema 10.7.1. *La cantidad $R_p(\pi)$ no depende de la base de π que elijamos. En particular podemos suponer que v, w son ortonormales y en ese caso*

$$R_p(\pi) = -\langle R_p(v,w)v, w\rangle_p.$$

Demostración. Si $v_1, v_2 \in \pi$ son linealmente independientes y $x, y \in \pi$ también son linealmente independientes, entonces existen $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$x = a_1v_1 + a_2v_2,\ y = b_1v_1 + b_2v_2.$$

Identificamos $(\pi, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con $\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual. Entonces

$$\begin{aligned} A(x,y) &= \|(a_1v_1 + a_2v_2) \times (b_1v_1 + b_2v_2)\| \\ &= |a_1b_2 - b_1a_2|\|v_1 \times v_2\| = |a_1b_2 - b_1a_2|A(v_1,v_2). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\langle R(x,y)x, y\rangle = \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_ia_kb_jb_l\langle R(v_i,v_j)v_k, v_l\rangle.$$

Por el Lema 10.3.1, la última expresión se anula si $k = l$, luego debe ser $k \neq l$. Por otra parte, como $R(w,z) = -R(z,w)$, también se anula si $i = j$, luego debe ser $i \neq j$. Por último, la identidad de Bianchi nos permite deshacernos de los términos cíclicos y es un ejercicio (Ejercicio 10.VIII) ver que

$$\langle R(x,y)x, y\rangle = |a_1b_2 - b_1a_2|^2\langle R(v,w)v, w\rangle.$$

□

En consecuencia usaremos la notación $\sec(\pi)$ para denotar la curvatura seccional de la subvariedad generada por el plano $\pi \subset T_pM$.

Observación 10.7.2 (Invariancia de la curvatura seccional por isometrías). Del Teorema 10.6.5 deducimos que si $f : N \to M$ es una isometría local riemanniana, y $\pi' = Df_p(\pi)$ con $\pi \subset T_pN$ un 2-plano, entonces $\sec^N(\pi) = \sec^M(\pi')$.

10.7.1. Variedades planas

Una variedad Riemanniana se dice *plana* cuando $\mathfrak{R}^M \equiv 0$. En ese caso es localmente isométrica a un espacio de Hilbert, como muestra el siguiente resultado.

Teorema 10.7.3. *Sea (M, g) Riemanniana y completa. Supongamos que $\mathfrak{R} \equiv 0$. Entonces localmente la diferencial de la exponencial es el transporte paralelo y por ende una isometría, y $\exp_p : T_pM \to M$ es un difeomorfismo isométrico local para todo $p \in M$. Si M es simplemente conexa entonces es isométricamente isomorfa a su espacio tangente.*

Demostración. Sea $\gamma \subset B_r(p)$ una geodésica (r pequeño) con $\gamma(0) = x$, $\dot\gamma(0) = v$. Si $\mathfrak{R} \equiv 0$, entonces el único campo de Jacobi $\eta \in Lev(\gamma)$ a lo largo de γ tal que $\eta(0) = 0$, $D_{\gamma'}\eta(0) = w \in T_xM$ está dado por $\eta(t) = tP(\gamma)_0^t w$ puesto que

$$D_t\eta = P(\gamma)_0^t w + 0$$

y entonces $D_t^2\eta = D_tP(\gamma)_0^t w = 0 = R(\dot\gamma, \eta)\dot\gamma$. Por otra parte, por el Teorema 7.2.3, se tiene que $\eta(t) = (\exp_p)_{*tv} tw$ luego la diferencial de la exponencial coincide con el transporte paralelo y resulta así una isometría local. Si M es simplemente conexa, entonces podemos aplicar el Teorema de Cartan-Hadamard (Corolario 9.5.6) para concluir que $\exp_p : T_pM \to M$ es un difeomorfismo, y por el primer item de la proposición previa resulta una isometría global. □

10.7.2. Curvatura de grupos lineales y espacios homogéneos

En esta sección calculamos la curvatura seccional de los ejemplos que desarrollamos en la Sección 7.6 y en la Sección 10.1.2.

10.7.2.1. La esfera de un espacio de Hilbert

Comenzamos con la esfera S de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Se tiene para todo $x, y, z \in T_pS = span(p)^\perp$

$$R_p(x, y)z = \langle y, z\rangle x - \langle x, z\rangle y.$$

Luego si $\pi = span(x, y) \subset T_pS$, y suponiendo sin pérdida de generalidad que $x \perp y$, se tiene

$$sec_\pi = -\langle\langle y, x\rangle x - \langle x, x\rangle y, y\rangle = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle = 1.$$

Es decir, la esfera tiene curvatura seccional constante $= 1$. No es difícil ver que si tomamos la esfera $S_R \subset \mathcal{H}$ de radio $R > 0$, su estructura es similar con la diferencia de que su curvatura seccional es exactamente $1/R$.

10.7.2.2. El spray métrico del grupo de inversibles

El spray obtenido en (10.6) nos permite calcular la curvatura, apelando a la fórmula (10.10), obteniéndose la siguiente expresión para el tensor en $g = 1$ (hemos usado reiteradas veces la identidad de Jacobi para simplificar la expresión):

$$\begin{aligned} 4\mathfrak{R}_1(x,y,z) &= [z,[x,y]] + [z,[x^*,y^*]] + [z^*,[x^*,y]] \\ &\quad +[z^*,[x,y^*]] + [z,[x,y^*]] + [z,[x^*,y]] \\ &\quad -[x,[y^*,z]] - [y,[z,x^*]]. \end{aligned} \tag{10.14}$$

En cuanto a la curvatura seccional, no aporta en principio mayor información, al ser una expresión que es posible reescribir de muchas formas gracias a la ciclicidad de la traza. ¿Es posible identificar subvariedades de curvatura seccional con signo constante? Como veremos en las próximas secciones, el grupo unitario tiene curvatura positiva mientras que los operadores positivos tienen curvatura negativa.

10.7.2.3. El grupo unitario

Si nos restringimos al grupo unitario o a los operadores positivos e inversibles, el spray métrico coincide con el spray canónico $F(v) = vg^{-1}v$ ($g \in G, v \in \mathcal{A}$ un álgebra C^*). Entonces el tensor de curvatura se reduce por los cálculos del capítulo previo a

$$g^{-1}\mathfrak{R}_g(x,y,z) = -1/4[[g^{-1}x, g^{-1}y], g^{-1}z].$$

Es fácil ver que, por ser la métrica invariante a izquierda, la curvatura es la misma en cualquier punto del espacio homogéneo, luego podemos suponer que $g = 1$, y se tiene

$$R_1(x,y)z = -1/4[[x,y],z].$$

Esta expresión también puede obtenerse apelando a (10.14), usando que x, y, z son antihermitianos y apelando a la identidad de Jacobi.

Si x, y son ortonormales, y $\pi = span(x,y)$, se tiene

$$\begin{aligned} sec_\pi &= -\langle R_1(x,y)x, y\rangle_2 = 1/4\langle[[x,y],x],y\rangle_2 \\ &= 1/4 Tr([[x,y],x]y^*). \end{aligned} \tag{10.15}$$

Como $x, y \in \mathcal{A}_{ah}$, se tiene

$$sec_\pi = -1/4 Tr([[x,y],x]y) = 1/2 Tr(-xyxy + x^2y^2).$$

Pero

$$Tr(xyxy) = Tr(xy(yx)^*) = \langle xy, yx\rangle_2 \leq \|xy\|_2\|yx\|_2,$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y por otra parte es fácil ver que

$$\|yx\|_2^2 = \|xy\|_2^2 = Tr(x^2y^2),$$

se tiene nuevamente por C-S

$$2sec_\pi = Tr(-xyxy + x^2y^2) = -\langle xy, yx\rangle + \|xy\|_2^2 \geq 0.$$

Esto nos dice que la curvatura del grupo unitario es no negativa, y de hecho es fácil ver que para que sea nula debe ser $xy = yx$, pues debe valer la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Luego tenemos subvariedades planas (conocidas como *flats*) para cada familia de operadors que conmutan, y por ejemplo si estamos en dimensión finita y $\mathcal{U}$ es el grupo unitario de las matrices $n \times n$, la dimensión maximal de los flats es n, que corresponde a considerar el álgebra abeliana maximal dada por las matrices unitarias diagonales respecto de una base ortonormal fija. En el lenguaje de espacios simétricos, esta cantidad se conoce como el *rango* del espacio. Es decir $rango(\mathcal{U}) = n$ donde $n = \dim \mathcal{H}$. Una referencia fundamental en este contexto de espacios simétricos es el libro de S. Helgason [46].

10.7.2.4. Operadores positivos inversibles

Supongamos ahora que estamos en el espacio de operadores positivos e inversibles $M = G_{\mathcal{A}}^+$. Cabe aquí distinguir dos casos sutilmente distintos. El primero compete a la discusión de las dos secciones previas, y es cuando pensamos a este espacio como subvariedad del grupo de inversibles, con el spray métrico. En ese caso, dados x, y, z Hermitianos, el tensor de curvatura en $g = 1$ se computa de (10.14) obteniéndose

$$R_1(x, y)z = -{}^7\!/_4[[x, y], z].$$

Luego, con una cuenta similar a la efectuada en (10.15), recordando que con nuestra convención sec difiere de R en un signo, obtenemos

$${}^2\!/_7 sec_\pi^{G_{\mathcal{A}}^+} = Tr(xyxy - x^2y^2) = \langle xy, yx\rangle - \|xy\|_2^2 \leq 0$$

para todo $\pi \subset T_1 G_{\mathcal{A}}^+ = \mathcal{A}_h$. Esta curvatura es nula si y sólo si $xy = yx$.

El otro caso, corresponde a considerar a la variedad de operadores positivos e inversibles con la métrica dada por

$$\|v\|_a = \|a^{-1/2} v a^{-1/2}\|_2,$$

según lo discutimos en la Sección 9.4.3. Aquí usamos la norma Frobenius (o la norma de Hilbert-Schmidt, ver la Sección 10.3.5.2) para computar la norma del vector trasladado; $a \in G_{\mathcal{A}}^+$, $v \in T_a G_{\mathcal{A}}^+$ al igual que antes. Esto es,

$$\langle v, w\rangle_a = \langle g_a v, w\rangle_2$$

donde ahora $g_a v = a^{-1} v a^{-1}$. Apelando a la ecuación (10.3), es fácil ver que en este caso el spray coincide con el spray canónico $F_a(v) = v a^{-1} v$ que introdujimos en

la Sección 7.6.5.2. Luego se aplican las consideraciones allí hechas, y en particular tenemos la expresión para la curvatura dada por

$$R_1(x,y)z = -1/4[[x,y],z]$$

y con una cuenta idéntica a la recién hecha deducimos que en este caso también la curvatura es no positiva. Veremos (Teorema 10.9.5) que esta condición es en general equivalente a la condición de curvatura semi-negativa en el contexto de variedades de Finsler con spray.

Observemos que si bien en ambos casos la curvatura es no positiva, las geometrías no coinciden ya que, en el segundo caso las geodésicas son los grupos a un parámetro, luego se describen como $\beta(t) = ae^{tv}$, así que la única geodésica que une $a, b \in G_{\mathcal{A}}^+$ está dada por

$$\beta(t) = a\exp(t\ln(a^{-1}b)) = a^{1/2}(a^{-1/2}ba^{-1/2})^t a^{1/2}.$$

Notar que esta curva está íntegramente contenida en $G_{\mathcal{A}}^+$ (lo cual es esperable pues es la geodésica de una conexión métrica definida allí). La geometría de este caso hace que la posición relativa de $G_{\mathcal{A}}^+$ en $G_{\mathcal{A}}$ sea buena.

No ocurre lo mismo en el primer caso: de acuerdo a la ecuación (10.9), las geodésicas que pasan por $a \in G_{\mathcal{A}}^+$ se describen como $\alpha(t) = ae^{tv^*}e^{t(v-v^*)}$. Notemos que por el teorema de Hopf-Rinow, como las geodésicas están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, dado $b \in G_{\mathcal{A}}^+$ existe una de estas que una a, b en el grupo $G_{\mathcal{A}}$. Para que esta curva sea un grupo a un parámetro ae^{tz}, debe ocurrir que $z = v$ (esto se deduce derivando en $t = 0$). Pero $e^{tx}e^{ty} = e^{t(x+y)}$ sólo es posible si x, y conmutan, lo cual equivale a que v sea normal; entonces $v = \ln(a^{-1}b)$ es normal o equivalentemente $a^{-1}b$ es normal y a su vez esto equivale a que b conmuta con a (Ejercicio 10.XII). Dejamos también como ejercicio (10.XIII) verificar que $\alpha^* = \alpha$ solamente en el caso especial recién mencionado, luego esta curva en general no permanece dentro de $G_{\mathcal{A}}^+$, es decir $G_{\mathcal{A}}^+$ no es *geodésicamente convexa* en $G_{\mathcal{A}}$ si dotamos a este último del spray métrico que viene de la métrica invariante a izquierda.

10.7.2.5. La Grassmanniana

Como vimos en la Sección 10.1.1.1, el spray que introdujimos en la Grassmanniana no es otra cosa que el spray métrico inducido por la inclusión $Gr(p) \subset \mathcal{A}_h$, donde consideramos a este último como espacio de Hilbert con la norma Frobenius. Recordemos entonces que (Ejemplo 7.6.6 en la Sección 7.6), dado un proyector p se tenía la fórmula del tensor de curvatura

$$\mathfrak{R}_p(x,y,z) = [[x,y],z].$$

A partir de este, calculamos, para $x \perp y \in T_p\mathcal{P}(\mathcal{A})$, la curvatura seccional $sec(x,y)$ dada por

$$\begin{aligned} sec(x,y) &= -\langle R_p(x,y)x, y\rangle_p = -2Tr(xyxy) + 2Tr(x^2y^2) \\ &= -2\langle xy, yx\rangle + 2\|xy\|_2^2 \geq 0, \end{aligned}$$

de manera similar al caso de los operadores unitarios y el espacio de operadores positivos invertibles, obteniéndose $sec(x,y) = 0$ si y sólo si $xy = yx$.

10.8. Espacios simétricos riemannianos

Vamos a especializar aquí resultados obtenidos para conexiones que provienen de sprays (obtenidos en las Secciones 7.5 y 7.5.1) al caso particular de (M, ∇) donde ∇ es la derivada de Levi-Civita de una métrica riemanniana g en M.

Definición 10.8.1. Sea (M, g) riemanniana y conexa, diremos que M es un espacio simétrico si para cada $p \in M$ existe una isometría $S_p : M \to M$ tal que $S_p(p) = p$, $(DS_p)_p = -id_{T_pM}$.

Teorema 10.8.2. *Con la estructura $\mu(p,q) = S_p(q)$ el par (M, μ) es un espacio simétrico (Definición 7.5.1).*

Demostración. El primer axioma se cumple por definición de punto fijo. Si γ es la geodésica por p con $\gamma_0' = v$ entonces $\beta = S_p\gamma$ es geodésica por p porque S_p es isometría, y como $\beta_0' = (DS_p)_p v = -v$ debe ser $S_p\gamma(t) = \gamma(-t)$. Entonces $S_p^2 = id$ en un entorno de p y por el Lema 7.3.11 debe ser $S_p^2 = id_M$. Esto nos dice que se cumple el segundo axioma. Veamos que vale el tercer axioma: como S_p es isometría entonces $(S_p)_*$ es automorfismo de la conexión de Levi-Civita (Teorema 10.6.3), y esto nos dice que S_p es automorfismo de la estructura simétrica (demostración del Teorema 7.5.6). Por último, si $S_p(q) = q$ y q está cerca de p entonces $q = exp_p(v)$ y por lo recién observado debe ser

$$exp_p(v) = q = S_p(q) = exp_p(-v)$$

y por la inyectividad local de la exponencial debe ser $v = 0$, o equivalentemente $q = p$. Esto prueba que p es punto fijo aislado de S_p y valel cuarto axioma de espacios simétricos. □

Razonando como en la prueba del último ítem del Teorema 7.5.8, deducimos que $\nabla R = 0$ en un espacio simétrico riemanniano. Veamos ahora la categoría de los espacios localmente simétricos.

Teorema 10.8.3 (Espacios localmente simétricos)**.** *Sea* (M, g) *riemanniana, son equivalentes*

1. $\nabla R = 0$
2. $P\,R_\gamma(X, Y, Z) = R_\gamma(P\,X, P\,Y, P\,Z)$ *para toda curva* γ *y todo* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *(aquí* $P = P(\gamma)$ *denota el transporte paralelo a lo largo de* γ*)*
3. *Para todo* $p \in M$ *la simetría geodésica* $S_p(\exp_p(v)) = \exp_p(-v)$ *es una isometría en un entorno normal de* p*.*

Demostración. La equivalencia entre los dos primeros ítems tiene la misma prueba que en el Teorema 7.5.12 y la omitimos. También la implicación (2) $\Rightarrow$ (3) tiene la misma demostración, de hecho $(DS_p)_{\gamma_t} = -P_t^{-t}(\gamma)$ y como el transporte paralelo es una isometría, entonces S_p es isometría local (Teorema 10.6.2), que verifica $S_p(p) = p$, $(DS_p)_p = -\mathrm{id}_{T_pM}$. Suponiendo que este es el caso, tenemos una estructura de espacio riemanniano simétrico en un entorno normal de p por el teorema anterior, y entonces por la observación previa a este teorema $\nabla R = 0$ (que es una condición local). □

Apelando a la versión global del Teorema de Ambrose (observación que le sigue al Teorema 7.4.8), se obtiene lo siguiente:

Teorema 10.8.4. *Si* (M, g) *es localmente simétrica, completa y simplemente conexa, entonces las simetrías geodésicas son isometrías globales de* M*, y entonces* M *es un espacio simétrico.*

10.8.1. Espacios simétricos de Cartan (caso Finsler y riemanniano)

Para seguir especializando los resultados obtenidos para conexiones de un spray al caso métrico y en especial al caso riemanniano, discutimos aquí los espacios de Cartan $M = G/K$ con (G, σ) un grupo involutivo, σ automorfismo del grupo de Lie G con $\sigma^2 = \mathrm{id}$ y $K = G^\sigma$ el conjunto de puntos fijos de σ (Sección 7.5.2).

Tenemos la estructura diferenciable $q_{*1} : \mathrm{Lie}(G) \simeq \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m} \to T_oM$ con $q : G \to M$ el mapa cociente y $o = q(1) \in M$; recordemos que $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K) = \ker q_{*1}$ y que $q_{*1}|_{\mathfrak{m}}$ es un isomorfismo con T_oM.

Observación 10.8.5 (Métricas de Finsler via normas Ad_K-invariantes)*.* Si pretendemos dotar a M de una métrica de Finsler, podemos comenzar por darle a $\mathrm{Lie}(G)$ una norma, pero notemos que si pretendemos que el trasnporte paralelo en M sea una isometría es necesario y suficiente que la norma sea Ad_K invariante. En efecto: si $V = q_{*1}v$ con $v \in \mathfrak{m}$ entonces definimos $\|V\|_o = \|v\|$ y en general

$$\|V\|_{g\cdot o} = \|v\|$$

si $V = q_{*g}(gv) = (\ell_g)_{*o}q_{*1}v$, con $v \in \mathfrak{m}$. Notemos que $V = q_{*h}(hw)$ sólo es posible si $g^{-1}h = u \in K$ y $(\ell_g)_{*o}q_{*1}v = (\ell_h)_{*o}q_{*1}w$. Esto sólo es posible si $v = Ad_u w$ (ejercicio usando la ecuación (3.13)). Luego

$$\|w\| = \|Ad_u w\| = \|v\|$$

y esto muestra la buena definición. Por otro lado, como el transporte paralelo está dado por los mapas $(\ell_g)_*$ (Teorema 7.5.23), para ver que la métrica de Finsler es invariante por transporte paralelo basta observar que

$$\begin{aligned}\|(\ell_h)_* V\|_{h\cdot(g\cdot o)} &= \|(\ell_h)_*(\ell_g)_* q_{*1}v\|_{(hg\cdot o} = \|(\ell_{hg})_* q_{*1}v\| \\ &= \|v\| = \|(\ell_g)_* q_{*1}v\|_{g\cdot o} = \|V\|_{g\cdot o}.\end{aligned}$$

Observación 10.8.6 (Función exponencial). Dado que las geodésicas del spray son de la forma $t \mapsto ge^{tx}\cdot o$ con $x \in \mathfrak{m}$, la función exponencial $\exp_{g\cdot o} : T_o M \to M$ está dada por $\exp_{g\cdot o}(V) = ge^v \cdot o$ para $V = (\ell_g)_{*o}q_{*1}v = q_{*g}(gv) \in T_{g\cdot o}M$, y no es difícil ver usando la fórmula de la diferencial de la exponencial que

$$(D\exp_{g\cdot o})_V W = (\ell_g)_{*o}q_{*1}\left(\frac{\sinh(ad v)}{ad v}w\right)$$

cuando $V = (\ell_g)_{*o}q_{*1}v, W = (\ell_g)_{*o}q_{*1}w \in T_{g\cdot o}M$ (aquí como antes $v, w \in \mathfrak{m}$). Como esta función es un difeomorfismo local alrededor de $V = 0$, la norma es equivalente a la norma original del espacio de Banach $\mathfrak{m}$.

Observación 10.8.7 (De espacios simétricos a espacios de Cartan). Si M tiene dimensión finita, puede probarse que el grupo de isometrías $Iso(M, g)$ para la métrica riemanniana g, munido de la topología compacto abierta, es un grupo localmente compacto (ver [53, Capítulo 1, Teorema 4.7]). Entonces de acuerdo a lo discutido en la Sección 7.5.2.1, $Iso(M, g)$ tiene estructura de grupo de Lie y la acción $A : G\times M \to M$ dada por la evaluación $A(f, p) = f(p)$ es suave. Fijando $o \in$ tenemos el mapa cociente $q : G \to M$ dado por $f \mapsto f(o)$ que es sobreyectivo. Luego $M \simeq G/K$ y además podemos considerar el automorfismo involutivo

$$\sigma(g) = S_o \circ g \circ S_o.$$

Como S_o tiene sólo a o como punto fijo, de acuerdo a lo discutido en dicha sección, obtenemos

$$K = \{f \in G : f(o) = o\} = \ker q = \{f \in G : \sigma(f) = f\} = K^\sigma.$$

Además es claro que

$$Lie(Iso(M, g) = Kill(M, g),$$

y la descomposición $\mathrm{Kill}(M,g) = \mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{m}_o$ es la descomposición de Cartan del álgebra de Lie del grupo de isometrías. Entonces M es un espacio simétrico de Cartan (riemanniano) por la acción del par $(\mathrm{Iso}(M,g), \sigma)$.

En síntesis, si (M,μ) es espacio simétrico riemanniano de dimensión finita entonces M es espacio simétrico de Cartan para la acción del grupo de isometrías dada por evaluar y la involución recién mencionada. Notemos por último que el rango del espacio simétrico es la dimensión de cualquier variedad plana maximal, ya que la curvatura está dada por los conmutadores.

Observación 10.8.8 (Clasificación de espacios simétricos). Podemos separar los espacios simétricos riemannianos en reducibles e irreducibles, siendo los primeros los que se pueden escribir como un producto directo de espacios simétricos riemannianos. El teorema de descomposición de de Rham muestra que todo espacio admite via su revestimiento riemanniano universal una descomposición en factores simétricos irreducibles [83, Teorema 6.9]; un factor irreducible tiene álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ semisimple y además $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}] = \mathfrak{k}$. Los factores irreducibles a su vez se clasifican en tres tipos: los euclideos, donde $\mathfrak{m}$ es abeliana (y entonces M es plana), y luego en dos clases llamadas de tipo compacto (con curvatura seccional no negativa) y de tipo no compacto (con curvatura seccional no positiva). Los espacios simétricos riemannianos simplemente conexos en dimensión finita fueron completamente clasificados por Cartan, en 7 clases infinitas por un lado y 12 espacios excepcionales por el otro [24, 25].

Ejemplos de espacios simétricos de tipo compacto son la esfera S de un espacio de Hilbert, la Grassmanniana $\mathrm{Gr}(p)$ y los grupos unitario y ortogonal $\mathcal{U}$ (Sección 10.7.2). El espacio de operadores positivos inversibles GL^+ discutido en esa sección en cambio, es un ejemplo de tipo no compacto con una propiedad universal: todo espacio simétrico M de tipo no compacto admite una sumersión cerrada $i : M \hookrightarrow \mathrm{GL}^+$ que preserva la métrica en el siguiente sentido: el pull-back por i de la métrica de GL^+ a M es un múltiplo constante de la métrica de M, en cada factor irreducible de de Rham [38].

10.9. El teorema de Cartan

En esta sección probamos la equivalencia entre curvatura seccional no positiva, y la propiedad curvatura semi-negativa de la diferencial de la exponencial (Sección 9.5), obteniendo como corolario el teorema clásico de Cartan para variedades Riemannianas.

10.9.1. Campos de Jacobi versus curvatura

En esta proposición se hace explícita la relación entre los campos de Jacobi a lo largo de geodésicas y la curvatura seccional de una variedad Riemanniana (M, g), a través de las derivadas de la norma del campo.

Proposición 10.9.1. *Sean* (M, g) *Riemanniana débil,* $\alpha(t) = \exp_p(tv)$ *una geodésica de* M *y* $\eta \in \mathrm{Lev}(\alpha)$ *un campo de Jacobi. Sea* $f(t) = \|\eta\|$. *Entonces:*

1. *Para aquellos* t *tales que* $\eta(t) \neq 0$, *se tiene*

$$f'(t) = \frac{1}{\|\eta\|}\langle D_t\eta, \eta\rangle,$$

$$f''(t) = \frac{1}{\|\eta\|^3}(\|D_t\eta\|^2\|\eta\|^2 - \langle D_t\eta, \eta\rangle^2) + \frac{1}{\|\eta\|}\langle R(\dot\alpha, \eta)\dot\alpha, \eta\rangle,$$

y

$$f''(t) \geq -\frac{1}{\|\eta\|}\mathrm{sec}_\pi(\dot\alpha, \eta)A(\dot\alpha, \eta).$$

2. *Si* $\eta(0) = 0$ *y* $\dot\eta(0) = w \in T_pM$, *entonces* f *es derivable tres veces en el origen, siendo*

$$f'(0) = \|w\|_p, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = \frac{1}{\|w\|_p}\langle R_p(v, w)v, w\rangle_p.$$

Demostración. Las expresiones de f', f'' son inmediatas de la compatibilidad de la métrica y la definición de campo de Jacobi. La desigualdad para f'' se obtiene utilizando la definición de curvatura seccional y la desigualdad Cauchy-Schwarz:

$$\|D_t\eta\|\|\eta\| \geq |\langle D_t\eta, \eta\rangle|.$$

Las derivadas en el origen se calculan recordando que en una carta, $\eta(t) = tw + o(t^2)$. □

Definición 10.9.2. Sea (M, g) Riemanniana. Diremos que M tiene curvatura seccional no positiva ($\mathrm{sec}^M \leq 0$) si $\mathrm{sec}_\pi \leq 0$ para todo π que sea un 2-plano en T_pM, para todo $p \in M$.

Corolario 10.9.3. *Si* (M, g) *es Riemanniana débil, y* $\mathrm{sec}^M \leq 0$, *entonces para todo* $p \in M$, *para todo* $v \in \mathrm{Dom}(\exp_p)$ *y para todo* $w \in T_pM$, *se verifica*

$$\|(\exp_p)_{*v}w\|_{\exp_p(v)} \geq \|w\|_p$$

y además $(\exp_p)_{*tv}tw$ *no se anula en* $(0, 1]$.

Demostración. Sea $\alpha(t) = \exp_p(tv)$, tomamos η el único campo de Jacobi a lo largo de α tal que $\eta(0) = 0$, $D_t\eta(0) = w$. Por el Teorema 7.2.3 que da la identificación entre $\eta(t)/t$ y la diferencial de la exponencial, tenemos que probar que $\|\eta(t)\| \geq t\|w\|$, y que $\eta(t) \neq 0$ para todo $t \in (0,1]$. De no ser así, supongamos que η se anula en $t_n \in (0,1]$ con $t_n \to 0$. Entonces

$$w = \dot{\eta}(0) = \lim_n \eta(t_n)/t_n = 0$$

lo cual es absurdo. La otra posibilidad es que exista $t_0 > 0$ que es el mínimo de los $t \in (0,1]$ donde η se anula. Como la curvatura de M es no positiva, por la proposición previa se tiene que en el intervalo $(0,t_0)$ la función f es convexa, es decir $f'' \geq 0$. Por otra parte, como $f'(0) = \|w\|_p > 0$, se deduce que f es creciente en $[0,t_0)$ y como $f(0) = 0$ se tiene un absurdo pues f no se anulaba en $(0,t_0)$.

Sea $h(t) = \|\eta(t)\| - t\|w\|$ para $t \in [0,1]$. Entonces aplicando la fórmula de la Proposición 10.9.1 en el intervalo $[0,1]$ tenemos que $h'(t) = f'(t) - \|w\|$, $h''(t) = f''(t) \geq 0$. Como $h'(0) = f'(0) - \|w\|_p = 0$, h también es creciente y se tiene la conclusión. □

10.9.2. La adjunta de la diferencial de exp

En esta sección supondremos que (M,g) es Riemanniana débil.

Lema 10.9.4. *Sea (M,g) pseudo-Riemanniana, $p \in M$ y $\alpha(t) = \exp_p(tv)$ con $v \in \mathrm{Dom}(\exp_p)$ y $q = \alpha(1)$. Sea P el transporte paralelo a lo largo de α y sea $v' = -Pv \in T_qM$. Entonces si $w \in T_pM$, $z \in T_qM$, se verifica*

$$\langle (\exp_p)_{*v}w, z\rangle_q = \langle w, (\exp_q)_{*v'}z\rangle_p,$$

y si P^* indica el transporte paralelo desde 1 hasta 0, entonces

$$\langle P^*(\exp_p)_{*v}w, P^*z\rangle_p = \langle w, (\exp_q)_{*v'}PP^*z\rangle_p,$$

luego el operador adjunto de $P^*(\exp_p)_{*v}$ es $(\exp_q)_{*v'}P$.

Demostración. Sea η el único campo de Jacobi a lo largo de α tal que $\eta(0) = 0$, $\dot{\eta}(0) = w$, y sea ξ el único campo de Jacobi a lo largo de α tal que $\xi(1) = 0$ y $\dot{\xi}(1) = z$. Derivando

$$g(t) = \langle D_t\eta, \xi\rangle - \langle \eta, D_t\xi\rangle$$

se deduce que

$$g'(t) = \langle R(\dot{\alpha},\eta)\dot{\alpha},\xi\rangle + \langle D_t\eta, D_t\xi\rangle - \langle D_t\eta, D_t\xi\rangle - \langle \eta, R(\dot{\alpha},\xi)\dot{\alpha}\rangle = 0$$

por el Lema 10.3.1. Entonces $g(t) = C = cte$, luego $g(1) = g(0)$, y se tiene

$$g(0) = \langle w, \xi(0)\rangle - \langle \eta(0), D_t\xi(0)\rangle = \langle w, \xi(0)\rangle_p.$$

puesto que $\eta(0) = 0$. Por otra parte, considerando la curva revertida $\alpha^*(t) = \alpha(1-t)$, el campo $\xi^*(t) = \xi(1-t)$ es el único campo de Jacobi a lo largo de α^* tal que $\xi^*(0) = 0$, $\dot\xi^*(0) = -D_t\xi(1) = -z$, luego

$$\xi(0) = \xi^*(1) = (\exp_q)_{*v'}z,$$

y como

$$g(1) = 0 - \langle \eta(1), D_t\xi(1)\rangle = \langle (\exp_p)_{*v}w, z\rangle_q,$$

se tiene el resultado. □

10.9.3. Curvatura no positiva

Recordemos que en el contexto de variedades de Banach-Finsler (Sección 9.5) definimos curvatura semi-negativa via la diferencial de la exponencial (Definición 9.5.4). Probamos aquí la equivalencia en el contexto Riemanniano de esa noción con la de curvatura seccional no positiva. Nuevamente supondremos que g es acotada superiormente, es decir que (M, g) es Riemanniana débil.

Teorema 10.9.5. *Sea (M, g) Riemanniana débil. Entonces M tiene curvatura seccional no positiva si y sólo si es una variedad de curvatura semi-negativa. Es decir $\sec^M \le 0$ si y sólo si para todo $p \in M$, para todo $v \in \mathrm{Dom}(\exp_p)$ y para todo $w \in T_pM$, el operador $(\exp_p)_{*v} : T_pM \to T_{\exp_p(v)}M$ es invertible y se verifica*

$$\|(\exp_p)_{*v}w\|_{\exp_p(v)} \ge \|w\|_p.$$

Demostración. Supongamos primero que M tiene curvatura seminegativa. Sea $p \in M$, $v, w \in T_pM$. Si $\alpha(t) = \exp_p(tv)$ y η es el único campo de Jacobi a lo largo de α tal que $\eta(0) = 0$, $\dot\eta(0) = w$, se tiene por hipótesis

$$f(t) = \|\eta(t)\|_{\alpha(t)} \ge t\|w\|_p$$

donde f es la función de la Proposición 10.9.1. Sea $h(t) = f(t) - t\|w\|_p$, entonces $h(t) \ge 0$ en $[0, 1]$, y por la misma proposición se tiene $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$, mientras que

$$h'''(0) = \frac{1}{\|w\|_p}\langle R_p(v, w)v, w\rangle_p.$$

Si fuese $sec(v, w) > 0$, se tendría $h'''(0) < 0$, lo cual diría que h es estrictamente decreciente en un entorno de cero, y esto es absurdo. Luego $sec(v, w) \le 0$, lo que prueba que $sec^M \le 0$.

Ahora supongamos que $sec^M \leq 0$. Sea η como antes, por el Corolario 10.9.3 se tiene la desigualdad de la curvatura seminegativa, resta ver que $(\exp_p)_{*v}$ es invertible para $v \in Dom(\exp_p)$. Componiendo con el transporte paralelo P a lo largo de $\alpha^*(t) = \alpha(1-t)$, se tiene que $T = P(\exp_p)_{*v} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H} = T_pM$ es un operador acotado, inyectivo y de rango cerrado por la desigualdad $\|Tw\| \geq \|w\|$ para todo $w \in \mathcal{H}$. Resta ver que $Ran(T) = \mathcal{H}$, o equivalentemente, como el rango es cerrado, que $ker(T^*) = \{0\}$. Pero por el Lema previo, T^* es otra diferencial de la exponencial que por hipótesis es expansiva y por ende inyectiva. □

Tenemos el siguiente corolario, consecuencia de los resultados de la sección 9.5, que nos dice que la exponencial es un revestimiento y vale propiedad EMI (Teorema 9.5.5 y Corolario 9.5.6).

Corolario 10.9.6 (Teorema de Cartan-Hadamard)**.** *Si* (M, g) *es Riemanniana fuerte, de curvatura seccional no positiva y geodésicamente completa, entonces la exponencial* $\exp_p : T_pM \to M$ *es un revestimiento para todo* $p \in M$*. Si además* M *es simplemente conexa* $\exp_p$ *resulta un difeomorfismo.*

10.A. Problemas

10.I. Si Γ es la forma bilineal asociada al spray métrico de una variedad Riemanniana (M, g), probar la propiedad de compatibilidad de la derivada covariante de campos (10.1) y la propiedad de compatibilidad de la derivada covariante de curvas levantadas (10.2) a partir de la identidad (10.4) que define localmente Γ.

10.II. Probar que si (M, g) es de dimensión $n < \infty$, el espacio de campos suaves sobre M tiene dimensión n como módulo sobre $C^\infty(M)$.

10.III. Probar la fórmula de la derivada covariante para curvas levantadas (10.11) del grupo de inversibles con su spray canónico.

10.IV. Probar el Teorema 10.3.14 sobre curvas cortas en la Grassmanniana con la métrica dada por una norma simétrica. Sugerencia: considerar el isomorfismo $p \mapsto 2p - 1$ entre proyecciones y simetrías, el Teorema 10.3.13 y la Observación 4.7.1.

10.V. Probar que la funcional energía $E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^1 \|\dot\gamma\|_\gamma^2 dt$ no es independiente de la parametrización de γ.

10.VI. Probar el Teorema 10.2.5 y el Corolario 10.2.6.

10.VII. Probar la segunda identidad del Lema 10.3.1,

$$\langle R_p(x, y)x, z\rangle_g = \langle R_p(x, z)x, y\rangle_g$$

para todo $x, y, z \in T_pM$, para todo $p \in M$.

10.VIII. Dado $p \in M$ Riemanniana, sean $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $v_i \in \pi \subset T_pM$. Probar que, si $x = a_1v_1 + a_2v_2$, $y = b_1v_1 + b_2v_2$, entonces

$$\langle R(x,y)x, y\rangle = |a_1b_2 - b_1a_2|^2\langle R(v,w)v, w\rangle.$$

10.IX. Probar que si S es la esfera de un espacio de Hilbert con la métrica ambiente y la conexión de Levi-Civita, entonces la diferencial de la aplicación exponencial es un difeomorfismo (Ejemplo 10.3.9), en cada entorno $\{v \in T_pS : \|v\| < \pi\}$.

10.X. Sea $R > 0$ y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Sea $S_R = \{v \in \mathcal{H} : \|v\| = R\}$. Calcular el spray métrico de S_R, sus geodésicas y probar que la curvatura seccional de S_R es exactamente $1/R$.

10.XI. Probar la expresión de $\mathfrak{R}_1$ para el grupo de inversibles de un álgebra C^* dada en la Sección 10.7.2.2.

10.XII. Probar que si $x, y \in \mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $e^{tx}e^{ty} = e^{t(x+y)}$ en algún entorno de $t = 0$, entonces x conmuta con y. Probar que si $a, b \in \mathcal{A}$ es un álgebra C^* son positivos e inversibles, y $a^{-1}b$ es normal, entonces a conmuta con b. Sugerencia: probar que ab es normal y luego su espectro es real.

10.XIII. Probar que si $\alpha(t) = ae^{tv^*}e^{t(v-v^*)}$ es una curva en $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con $a, b = \alpha(1)$ positivos e inversibles, entonces $\alpha(t) = \alpha(t)^*$ si y sólo si a conmuta con b.

10.XIV. Calcular las derivadas primera, segunda y tercera de la función $f(t) = \|\eta\|$, en la notación de la Proposición 10.9.1 (con las hipótesis del segundo ítem). ¿Existe la derivada cuarta en el origen?

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 325

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 326

Parte III

Apéndices: Álgebras de Operadores

En estos apéndices, vamos a presentar los resultados del cálculo funcional en álgebras de operadores (sin restricciones de dimensión) que utilizamos a lo largo del texto, así como resultados sobre funcionales continuas y normas en álgebras de operadores, para poder estudiar los ejemplos relevantes de estructuras geométricas en espacios homogéneos del grupo de operadores inversibles.

Esencialmente, hay dos clases de álgebras que nos interesan por encima de las demás, que son las álgebras C^* y de von Neumann. Una es una subclase de la otra, ambas son álgebras de Banach. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, usemos $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para denotar el conjunto de todos los operadores lineales acotados en $\mathcal{H}$. Si $\langle , \rangle$ denota el producto escalar de $\mathcal{H}$, y $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces denotamos con $a^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ al único operador acotado tal que

$$\langle a^* \psi, \eta \rangle = \langle \psi, a\eta \rangle$$

para todo $\psi, \eta \in \mathcal{H}$. Esta es la *involución usual* de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Tiene la siguiente propiedad fundamental: si $\|\cdot\|$ denota la norma supremo de operadores acotados en $\mathcal{H}$, entonces

$$\|a^* a\| = \|a\|^2$$

para todo $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. En particular se deduce de aquí que $*$ es isométrico, $\|x^*\| = \|x\|$. Observemos que como

$$(ab)^* = b^* a^*$$

no se trata de un automorfismo sino de un *antiautomorfismo*.

La *topología fuerte* en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ se define de la siguiente manera: dados $a_n, a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, decimos que $a_n \to a$ SOT (por Strong Operator Topology) si $a_n \xi \to a\xi$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ -como vectores de $\mathcal{H}$ con la norma del espacio de Hilbert-. Es decir, es la topología de convergencia puntual.

La *topología débil* en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ se define de la siguiente manera: dados $a_n, a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, decimos que $a_n \to a$ WOT (por Weak Operator Topology) si $\langle a_n \xi, \eta \rangle \to \langle a\xi, \eta \rangle$ para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

Estas topologías son una más débil que la otra, en el sentido siguiente:

$$(a_n \to a \text{ uniformemente }) \Rightarrow (a_n \to a \quad \text{SOT}) \quad \Rightarrow (a_n \to a \quad \text{WOT}).$$

En efecto, dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, entonces

$$|\langle (a_n - a)\xi, \eta\rangle| \leq \|a_n\xi - a\xi\|_{\mathcal{H}}\|\eta\|_{\mathcal{H}} \leq \|a_n - a\|\|\xi\|_{\mathcal{H}}\|\eta\|_{\mathcal{H}}.$$

En el caso $\dim \mathcal{H} = +\infty$ estas topologías no coinciden. Una *subálgebra involutiva* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una subálgebra sobre $\mathbb{C}$ tal que $a^* \in \mathcal{A}$ cada vez que $a \in \mathcal{A}$. Diremos que una subálgebra involutiva $\mathcal{A}$ es

- Un *álgebra* C^* cuando $\mathcal{A}$ es cerrada para la topología de la norma uniforme.
- Un *álgebra* W^* o *álgebra de von Neumann* si $\mathcal{A}$ es cerrada para la topología fuerte.

Se deduce que toda álgebra de von Neumann es un álgebra C^*. En la definición de álgebra de von Neumann, se puede reemplazar la topología fuerte por la débil.

Supongamos que $\mathcal{H}$ es infinito dimensional y separable. El primer ejemplo de álgebra C^* que no es de von Neumann es el álgebra $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ de operadores compactos en $\mathcal{H}$, donde por un operador compacto $t : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ entendemos un operador acotado tal que la imagen de todo conjunto acotado tiene clausura compacta. Equivalentemente, se consigue $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ como la clausura en norma uniforme de todos los operadores de rango finito. De hecho, si $\{e_i\}$ es una b.o.n. de $\mathcal{H}$ y $p_i = e_i \otimes e_i$ son los proyectores unidimensionales asociados, poniendo

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

tenemos que cada $T_n \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ (de hecho, tiene rango finito). Pero si $x = \sum_i x_i e_i$, $y = \sum_i y_i e_i$ son dos vectores cualesquiera de $\mathcal{H}$, entonces

$$\langle T_n x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_j \to \sum_{i\geq 1} x_i \overline{y}_j = \langle x, y\rangle$$

lo que prueba que T_n tiende débilmente a la identidad de $\mathcal{H}$, que no es un operador compacto.

Se pueden definir las álgebras C^* y de von Neumann de manera abstracta (que resulta ser equivalente a la definición como operadores en $\mathcal{H}$). En el primer apéndice introducimos las nociones necesarias para este enfoque.

Apéndice **A**

Álgebras de Banach

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa con identidad 1 sobre $\mathbb{C}$, provista de una norma $\|\cdot\|$ que la hace un *álgebra de Banach*, es decir $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach y el producto no sólo es una función conjuntamente continua, sino que además se verifica la desigualdad siguiente:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

En general supondremos que la identidad del álgebra tiene norma unitaria, es decir $\|1\| = 1$.

A.1. Álgebras con involución

Sea $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una *involución* es decir, para todo $a \in \mathcal{A}$, se tiene

$$(a^*)^* = a.$$

Notemos que $*$ es una biyección. Supongamos que es también *antiautomorfismo antilineal*, es decir para todo $a, b \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, se tiene

$$(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$$

$$(a + b)^* = a^* + b^*$$

$$(ab)^* = b^* a^*.$$

Usualmente se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach *con involución*. Diremos que $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* si la involución verifica

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 \text{ para todo } a \in \mathcal{A}.$$

En esta presentación abstracta, un álgebra de von Neumann es una álgebra C^* que tiene predual (como espacio de Banach). En ese caso, el predual es (salvo isomorfismos) único. Este resultado se debe a S. Sakai, la prueba puede encontrarse en [82].

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 330

Observación A.1.1. Las álgebras de von Neumann se suelen considerar con 1, en todo caso siempre se puede adjuntar una identidad a un álgebra C^* de manera estándar: tomamos la suma directa $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$, que resulta ser un álgebra con identidad $I = (0, 1)$, con el producto

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu).$$

Se le da la norma

$$\|(a, \lambda)\| = \sup_{b \in \mathcal{A},\ \|b\| \leq 1} \|ab + \lambda b\|.$$

Entonces $\tilde{\mathcal{A}}$ es un álgebra C^* y además $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ es un ideal maximal (en particular cerrado).

A.2. Cálculo funcional analítico

En un álgebra de Banach $\mathcal{B}$, el *espectro* $\sigma(a)$ del elemento $a \in \mathcal{B}$ se define de la manera habitual como el conjunto de los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $a - \lambda$ no es inversible en $\mathcal{B}$. El complemento de $\sigma(a)$ es el conjunto *resolvente* de a, denotado $\rho(a)$.

A.2.1. Propiedades del espectro

Observación A.2.1. Si $\mu \in \mathbb{C}$, entonces para todo $a \in \mathcal{B}$ se tiene

$$\sigma(1 - \mu a) = \{1 - \mu\lambda : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Para $\mu = 0$ la afirmación es trivial. Supondremos $\mu \neq 0$. Si $\lambda \in \sigma(a)$ entonces

$$1 - \mu a - (1 - \mu\lambda) = \mu(\lambda - a)$$

lo que prueba que $1 - \mu\lambda \in \sigma(1 - \mu a)$. Recíprocamente, si $x \in \sigma(1 - \mu a)$, tomamos $\lambda_x = \frac{1-x}{\mu}$ y se tiene

$$a - \lambda_x = {}^1\!/_\mu[(1 - \mu a) - x]$$

lo que prueba que $\lambda_x \in \sigma(a)$ y $x = 1 - \mu\lambda_x$.

Lema A.2.2. *Para todo* $a, b \in \mathcal{B}$,

- $1 - ab$ *tiene inversa a izquierda (resp. derecha) si y sólo si* $1 - ba$ *tiene inversa a izquierda (resp. derecha).*
- $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$.

Demostración. El segundo resultado es consecuencia más o menos inmediata del primero y de la observación previa, y queda como ejercicio. Para ver el primer resultado, supongamos que $c \in \mathcal{B}$ es la inversa a derecha de $1 - ab$, es decir

$$(1 - ab)c = 1.$$

Esto se puede reescribir como $abc = c - 1$. Se tiene que $1 + bca$ es la inversa a derecha de $1 - ba$:

$$\begin{aligned}(1 - ba)(1 + bca) &= 1 - ba + bca - babca \\ &= 1 - ba + bca - b(c - 1)a \\ &= 1 - ba + bca - bca + ba = 1.\end{aligned}$$

Para la inversa a izquierda se razona de forma análoga. □

A.2.1.1. Radio espectral

El *radio espectral* de $a \in \mathcal{B}$ es

$$r(a) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Observemos que r puede anularse sobre elementos no nulos. Por ejemplo, si $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ y

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces $\sigma(a) = \{0\}$, con lo cual $r = 0$, pero $a \neq 0$. En general, el radio espectral de cualquier nilpotente ($a^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$) es nulo. La fórmula

$$x^{-1} = \sum_{n \geq 0} (1 - x)^n$$

si $\|1 - x\| < 1$ tiene la misma prueba que en el caso de matrices. Si b es inversible y $\|b - c\| < \|b^{-1}\|^{-1}$, como

$$\|1 - b^{-1}c\| = \|b^{-1}(b - c)\| \leq \|b^{-1}\|\|b - c\| < 1,$$

se sigue que $b^{-1}c$ es inversible y en consecuencia, c es inversible. Luego el conjunto de inversibles es un grupo abierto en $\mathcal{B}$, que denotaremos con $G_{\mathcal{B}}$. Observemos que si $|\lambda| > \|a\|$ entonces $\|\frac{a}{\lambda}\| < 1$ con lo cual $1 - \frac{a}{\lambda}$ es inversible o equivalentemente $\lambda - a$ es inversible lo que nos dice que $\lambda \notin \sigma(a)$. Luego $\sigma(a)$ es un conjunto acotado, $r(a) \leq \|a\|$ para todo $a \in \mathcal{B}$.

Consideremos $g(\lambda) = a - \lambda$, que resulta ser una función continua $g : \mathbb{C} \to \mathcal{B}$. El conjunto

$$g^{-1}(G_{\mathcal{B}}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \text{ es inversible}\}$$

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 332

coincide con el complemento del espectro de a, es decir $\rho(a) = g^{-1}(G_{\mathcal{B}})$, lo que prueba que la resolvente es abierta, y en consecuencia $\sigma(a)$ es cerrado; como es acotado resulta ser compacto. Veremos que es siempre no vacío. Previamente, probamos un lema que establece que el espectro $\sigma : \mathcal{B} \to 2^{\mathbb{C}}$ es una función semicontinua inferiormente en el siguiente sentido:

Lema A.2.3. *Sea $a \in \mathcal{B}$ tal que $\sigma(a) \subset \Omega$ con $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Entonces existe $\epsilon(\Omega)$ tal que $\|x - a\| < \epsilon$ implica $\sigma(x) \subset \Omega$.*

Demostración. Si $\lambda \notin \sigma(a)$, entonces $f(\lambda) = \|(a-\lambda)^{-1}\|$ es una función continua, que verifica $f(\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$ pues para λ suficientemente grande $\|a/\lambda\| < 1$ y entonces

$$\|(a-\lambda)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|}\|(1-a/\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n\geq 0}\|a/\lambda\|^n = \frac{1}{|\lambda| - \|a\|}.$$

En consecuencia, existe $M > 0$ tal que $f(\lambda) < M$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} - \Omega$. Sea $\epsilon = 1/M$, entonces si $x \in \mathcal{B}$ verifica $\|x - a\| < \epsilon$ y $\mu \notin \Omega$, probaremos que $\mu \notin \sigma(x)$. Se tiene que $\mu - a$ es inversible y además

$$\|(\mu-a)^{-1}(x-a)\| < f(\mu)\|x-a\| < 1,$$

con lo cual $1 - (\mu-a)^{-1}(x-a)$ es inversible y entonces

$$\mu - x = (\mu-a)\left[1 - (\mu-a)^{-1}(x-a)\right]$$

también es inversible por ser producto de inversibles. □

A.2.2. El grupo de inversibles

Observación A.2.4. Observemos que el producto $m : G_{\mathcal{B}} \times G_{\mathcal{B}} \to G_{\mathcal{B}}$

$$m(x,y) = xy$$

es una función continua en cada variable, pues

$$\|(x+h)y - xy\| = \|hy\| \leq \|h\|\|y\|.$$

Por ser una forma bilineal, resulta continua, por ende diferenciable y de hecho analítica. Se sigue que la inversión también es analítica.

Es sencillo ver que, como $\mathfrak{g} = T_1 G = \mathcal{B}$, por ser el grupo un abierto en el álgebra, entonces el corchete de Lie está dado por el conmutador usual, es decir si $v, w \in \mathfrak{g} = \mathcal{B}$, entonces

$$[v,w] = vw - wv.$$

Observemos que aquí los grupos a un parámetro e^{tv} están de hecho dados por la serie de potencias usual de la exponencial, la prueba es que verifican la ecuación diferencial correspondiente al campo invariante a izquierda

$$X_v(g) := gv.$$

Luego $\exp : \mathcal{B} \to G_{\mathcal{B}}$ está dada por

$$v \mapsto e^v = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} v^n,$$

y la serie converge uniformemente en conjuntos acotados de $\mathcal{B}$. Sea

$$\log : U = \{k \in G_{\mathcal{B}} : \|k-1\| < 1\} \to \mathcal{B}$$

la función analítica dada por la serie de potencias

$$\log(k) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}(k-1)^n.$$

Es fácil ver que $e^{\log(k)} = k$ para todo k tal que $\|k-1\| < 1$, y que $\log(e^z) = z$ para todo $z \in \mathcal{B}$ tal que $\|z\| < \log(2)$. Restringida a U, la exponencial es un isomorfismo con su imagen, y para cada $g \in G$ ponemos

$$\varphi_g = \log(g^{-1}k),$$

definida en el abierto $gU \subset G_{\mathcal{B}}$. Entonces (gU, φ_g) es una carta en $G_{\mathcal{B}}$ alrededor de $g \in G$, y si g, h están suficientemente cercanos entonces los mapas transición están dados por

$$\varphi_h \circ \varphi_{g^{-1}}(z) = \log(h^{-1}ge^z),$$

lo que prueba que $G_{\mathcal{B}}$ es un grupo de Lie-Banach de clase C^ω.

A.2.3. Cálculo funcional de Cauchy

Ahora introducimos el cálculo funcional con una identidad fundamental:

Lema A.2.5. *Sea γ una curva simple alrededor del espectro de a, orientada de forma positiva. Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene*

$$a^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma w^n (w-a)^{-1} dw.$$

Demostración. En la resolvente de a, que como dijimos es un conjunto abierto en el plano complejo, definimos $f : \rho(a) \to \mathcal{B}$ como

$$f(\lambda) = (\lambda - a)^{-1},$$

que es una función continua -de hecho, analítica-. Sea $\varphi \in \mathcal{B}'$ una funcional continua, consideramos la composición $g = \varphi \circ f : \rho(a) \to \mathbb{C}$, que es una función genuinamente analítica y por ende holomorfa en $\rho(a)$. Supongamos que $|\lambda| > \|a\|$: entonces por la fórmula de la serie de Neumann,

$$g(\lambda) = \varphi((\lambda - a)^{-1}) = \sum_{k \geq 0} \lambda^{-1-k} \varphi(a^k).$$

Tomando una circunferencia $\Gamma_R \subset \mathbb{C}$ centrada en el origen y de radio $R > \|a\|$ nos aseguramos que $\Gamma_R \subset \rho(a)$ y que $\sigma(a) \subset \mathrm{Int}(\Gamma_R)$. Podemos entonces calcular, para cualquier $n \in \mathbb{N}_0$, la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \lambda^n g(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \sum_{k \geq 0} \lambda^{n-k-1} d\lambda \varphi(a^k) = \varphi(a^n),$$

donde el único término que sobrevive es el correspondiente a $k = n$ pues todos los demás tienen primitiva (estamos usando la fórmula de los residuos). Reemplazando la curva Γ_R por una curva cualquiera γ simplemente orientada que tenga al espectro de a en su interior, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n g(\lambda) d\lambda = \varphi(a^n).$$

pues $\lambda^n g(\lambda)$ es analítica en el interior de la región encerrada por γ y Γ_R. Como esto vale para cualquier φ en el dual, se tiene

$$a^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n f(\lambda) d\lambda.$$

□

Corolario A.2.6. *Si $a \in \mathcal{B}$, entonces*

- *El espectro $\sigma(a)$ es un compacto no vacío en el plano complejo.*
- *El radio espectral satisface*

$$r(x) = \lim_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{1/n}.$$

Demostración. Ya probamos que $\sigma(a)$ es un conjunto compacto. Si fuera vacío, entonces todas las integrales del lema previo serían nulas (basta componer con una φ del dual y observar que $\lambda^n\varphi((a-\lambda)^{-1})$ es una función entera). Esto es absurdo, por ejemplo para $n=0$ o $n=1$. Si $z\in\sigma(a)$, entonces

$$z^n-a^n=(z-a)q(z,a)$$

nos dice que $z^n\in\sigma(a^n)$, luego $|z^n|\le\|a^n\|$, de donde deducimos $|z|\le\|a^n\|^{1/n}$, con lo cual

$$|z|\le\lim\inf_{n\to\infty}\|a^n\|^{1/n}$$

y tomando supremo sobre $z\in\sigma(a)$ se tiene

$$r(a)\le\lim\inf_{n\to\infty}\|a^n\|^{1/n}.$$

Por otra parte, si ponemos $M(r)=\max_\theta\|f(re^{i\theta})\|$ para $r>r(a)$, con f la función $f(\lambda)=(a-\lambda)^{-1}$ del lema anterior, tenemos por la fórmula integral que

$$\|a^n\|\le r^{n+1}M(r),$$

con lo cual $\lim\sup_{n\to\infty}\|a^n\|^{1/n}\le r$, de manera que

$$\lim\sup_{n\to\infty}\|a^n\|^{1/n}\le r(a).$$

Ahora

$$r(a)\le\lim\inf_{n\to\infty}\|a^n\|^{1/n}\le\lim\sup_{n\to\infty}\|a^n\|^{1/n}\le r(a),$$

con lo cual el límite existe y coincide con $r(a)$. Por último, de $|z|\le\|a^n\|^{1/n}$ también se deduce que

$$r(a)\le\inf_{n\to\infty}\|a^n\|^{1/n}\le\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{1/n}=r(a).$$

□

Esta función analítica que tuvo gran protagonismo

$$\lambda\mapsto(a-\lambda)^{-1}$$

se conoce como *resolvente* de a, y se suele denotar $f(\lambda)=R_a(\lambda)$.

Consideremos, para $a\in\mathcal{B}$, el conjunto

$$H(\sigma(a))=\{f:\ \text{existe un abierto } \Omega\supset\sigma(a) \text{ tal que } f \text{ es analítica en } \Omega\}.$$

Notemos que el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ *depende de* f. Dada $f \in H(\sigma(a))$, consideremos una curva simple cerrada $\gamma : [0,1] \to \Omega$ alrededor del espectro de a, orientada de forma positiva, y notamos que

$$t \mapsto f(\gamma(t))(a-\gamma(t))^{-1}\gamma'(t) \in \mathcal{B}$$

es una función continua. La integral

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(w)(w-a)^{-1}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 f(\gamma(t))(a-\gamma(t))^{-1}\gamma'(t)dt \end{aligned} \tag{A.1}$$

está bien definida como integral de una curva continua a valores en el espacio de Banach $\mathcal{B}$, y además *no depende de la curva* γ. Para convencernos, componemos con una $\varphi \in \mathcal{B}'$, y si $\tilde{\gamma}$ es otra curva con las mismas características, entonces la diferencia de las integrales -que son ahora integrales de funciones a valores en $\mathbb{C}$- se puede reescribir -como es habitual- como suma de integrales de curvas cerradas, y en este caso los integrandos quedan analíticos en los interiores, con lo cual la diferencia es nula. Esta fórmula se conoce como la *fórmula de Cauchy del cálculo funcional analítico*. Tomemos un polinomio

$$p(z) = \alpha_n z^n + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

donde los α_i son números reales o complejos. Entonces tiene sentido calcular

$$p(a) = \alpha_n a^n + \cdots + \alpha_1 a + \alpha_0$$

para cualquier $a \in \mathcal{B}$. Como es habitual, evaluar α_0 en el elemento $a \in \mathcal{A}$ lo pensamos como el elemento $\alpha_0 1 \in \mathcal{A}$, donde 1 denota a la identidad del álgebra $\mathcal{A}$. También seguimos la costumbre de denotar $\alpha_0 1$ directamente como α_0.

Claramente, si γ es cualquier curva simple orientada de manera positiva alrededor de $\sigma(a)$, se tiene

$$p(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma p(w)(w-a)^{-1}dw$$

por el Lema A.2.5. Por otra parte, los límites de polinomios dan funciones analíticas. Un resultado que necesitamos para seguir adelante es el teorema de Runge que recordamos a continuación (la prueba puede encontrarse en cualquier libro de variable compleja):

Teorema A.2.7 (Teorema de Runge)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto contenido en un compacto* K*. Si $f : K \to \mathbb{C}$ es continua y analítica en Ω, existe una sucesión de funciones racionales $r_n = p_n/q_n$ en* K *tales que $r_n \to f$ uniformemente sobre* K*.*

Si $\mathbb{C} - K$ es conexo, existe una sucesión de polinomios $p_n = p_n(z)$ tales que $p_n \to f$ uniformemente sobre K*.*

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 337

En nuestro caso, tomamos $f \in H(\sigma(a))$ y una curva simple γ que contiene al espectro de a, contenida en algún entorno abierto del mismo, y consideramos $K = \overline{Int(\gamma)}$, $\Omega = Int(\gamma)$. Si $\sigma(a)$ es conexo, podemos suponer que Ω y por ende K es conexo, y se sigue del teorema de Runge que existe una sucesión de polinomios que aproxima a f en K, en particular en γ. Luego

$$\begin{aligned} \|f(a) - p_n(a)\| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma |f(w) - p_n(w)|\|(w-a)^{-1}\|d|\gamma| \\ &\leq \text{cte.} \max_{w\in\gamma} |f(w) - p_n(w)| \to 0. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Esto prueba que la definición de la fórmula de Cauchy es natural para toda $f \in H(\sigma(a))$. Si $\sigma(a)$ no es conexo, el argumento es válido en cada componente conexa K_i de $\sigma(a)$, para funciones analíticas definidas en un abierto que contiene a alguna de las componentes. Terminamos esta sección con un resultado conocido como *teorema espectral* para funciones analíticas. El caso general queda como ejercicio, se deduce del caso para polinomios que probamos a continuación.

Proposición A.2.8. *Si p es un polinomio y $a \in \mathcal{B}$, entonces*

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Demostración. Supongamos primero que $\alpha \in \sigma(p(a))$. Escribimos

$$p(z) - \alpha = c_n \prod (z - \lambda_i)$$

con $\lambda_i \in \mathbb{C}$ las n raíces del polinomio $p - \alpha$. Como

$$p(a) - \alpha = c_n \prod (a - \lambda_i)$$

y $p(a) - \alpha$ no es inversible, al menos uno de los factores -digamos $a - \lambda_1$- es no inversible, es decir $\lambda_1 \in \sigma(a)$. Ahora observemos que $p(\lambda_1) - \alpha = 0$, luego $\alpha = p(\lambda_1)$ con $\lambda_1 \in \sigma(a)$ lo que prueba que $\alpha \in p(\sigma(a))$. Para ver la otra inclusión, tomamos $p(\lambda) \in p(\sigma(a))$ con $\lambda \in \sigma(a)$. Escribimos

$$p(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0,$$

luego

$$\begin{aligned} p(a) - p(\lambda) &= c_n(a^n - \lambda^n) + \cdots + c_1(a - \lambda) \\ &= (a - \lambda)q(a, \lambda) = q(a, \lambda)(a - \lambda). \end{aligned}$$

Como $a - \lambda$ no es inversible, concluimos que $p(a) - p(\lambda)$ no es inversible puesto que de serlo, si c es su inversa entonces $cq(a, \lambda)$ resultaría la inversa de $a - \lambda$. □

Observación A.2.9. Si $r(z) = p(z)/q(z)$ es una función racional en $\sigma(a)$, entonces $q(z)$ no se anula en $\sigma(a)$, con lo cual $q(a)$ es inversible lo que prueba que la definición de

$$r(a) = p(a)q(a)^{-1}$$

es natural usando las operaciones del álgebra de Banach (incluyendo la inversión). Luego el teorema de Runge nos dice que si f es analítica en un entorno de $\sigma(a)$, existe una sucesión r_n de funciones racionales que lo aproxima, y como tiene sentido calcular $r_n(a)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se sigue de la fórmula integral de Cauchy que

$$\|f(a) - r_n(a)\| \to 0$$

cuando $n \to \infty$.

La prueba del siguiente teorema queda para el lector (Ejercicio A.v).

Teorema A.2.10. *Dado $a \in \mathcal{B}$, y H holomorfa en un entorno del espectro de a, se tiene*

1. *El mapa $\Psi : H(\sigma(a)) \to \mathcal{B}$ dado por $f \mapsto f(a)$ es un monomorfismo de álgebras, continuo si en $H(\sigma(a))$ consideramos la topología de convergencia uniforme sobre compactos.*
2. *$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ para toda $f \in H(\sigma(a))$.*

A.3. Rango y radio numérico

En este apéndice estudiamos propiedades del rango y radio numérico de un elemento de un álgebra de Banach, y su relación con el espectro. Una referencia fundamental sobre este tema es el libro de Bonsall y Duncan [19]. Para a no nulo en un espacio de Banach E, definimos

$$D(a) = \{\varphi \in E' : \|\varphi\| = 1,\ \varphi(a) = \|a\|\}.$$

Observemos que por el teorema de Hahn-Banach, este conjunto es siempre no vacío. De hecho, como

$$(t\varphi + (1-t)\psi)(a) = t\varphi(a) + (1-t)\psi(a)$$

el conjunto $D(a)$ es un convexo. Con un argumento similar, vemos que es cerrado en la topología ω^* de E'. Luego es un compacto convexo no vacío.

Observación A.3.1. Notar que si E es un espacio de Hilbert, entonces para $x \neq 0$ en E la funcional

$$\varphi_x = \frac{\langle x, \cdot \rangle}{\|x\|}$$

es un elemento de $D(x)$, y por la convexidad estricta de la bola de E, resulta único.

Si ahora $\mathcal{B}$ es un *álgebra* de Banach con identidad 1, los elementos de $D(1)$ se denominan *estados* del álgebra.

Observación A.3.2. Si $\mathcal{B} = M_n(\mathbb{C})$ es el álgebra de matrices con la norma uniforme, podemos considerar, para $A \in \mathcal{B}$ la descomposición polar dada por $A = U|A|$ con U matriz unitaria y $|A| = \sqrt{A^*A}$ (ver la Sección B.4 para más detalles). Entonces, si x es un autovector unitario correspondiente al máximo autovalor de $|A|$, como este autovalor coincide con $\| |A| \| = \|A\|$, definimos

$$\varphi_A(T) = \langle Ux, Tx \rangle$$

que resulta un elemento de $D(A)$. Notar que si la multiplicidad de $\|A\|$ como autovalor de $|A|$ no es simple, entonces $D(A)$ tiene más de un elemento (de hecho infinitos). En este contexto es fácil ver entonces que

$$\{\varphi_x = \langle x, \cdot\, x \rangle \,:\, x \in \mathbb{C}^n,\ \|x\| = 1\} \subset D(1),$$

dejamos como ejercicio (A.VI) probar que en realidad

$$D(1) = \{\varphi_T = \mathrm{Tr}(T\,\cdot) : \mathrm{Tr}(T) = 1 = \|T\|_1 = \mathrm{Tr}|T|\}$$

y por el Lema B.3.12, se tiene

$$D(1) = \{\varphi_T = \mathrm{Tr}(T\,\cdot) : T \geq 0,\ \mathrm{Tr}(T) = 1\}.$$

Volviendo al caso general, sea $S \subset \mathcal{B}$ la esfera unitaria de un álgebra de Banach, es decir

$$S = \{x \in \mathcal{B} : \|x\| = 1\}.$$

Dados $a \in \mathcal{B}$, definimos para $x \in S$

$$V(a, x) = \{\varphi(ax) : \varphi \in D(x)\} \subset \mathbb{C}.$$

Es un conjunto no vacío, y observemos que si $\lambda \in V(a, x)$ entonces $|\lambda| \leq \|a\|$.

Se define el *rango numérico* de $a \in \mathcal{B}$ como

$$V(a) = \cup_{x \in S} V(a, x) \subset \mathbb{C}.$$

Claramente $V(a) \subset B(0, \|a\|)$. El *radio numérico* de $a \in \mathcal{B}$ es

$$v(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in V(a)\} \leq \|a\|.$$

Observemos que $V(a,1) \subset V(a)$ es obvio pero además si $\lambda \in V(a)$ entonces existen $x \in S$, $\varphi \in D(x)$ tal que $\lambda = \varphi(ax)$. Definimos $\phi(z) = \varphi(zx)$ $(z \in \mathcal{B})$. Entonces $\phi \in \mathcal{B}'$ pero además $\phi(1) = \varphi(x) = 1$ y $\|\phi\| = 1$; es decir $\phi \in D(1)$. Como

$$\lambda = \varphi(ax) = \phi(a),$$

se deduce que $\lambda \in V(a,1)$. En resumen, para todo $a \in \mathcal{B}$, $V(a,1) = V(a)$.

Definición A.3.3. Dado un espacio de Banach E, podemos definir, para $T : E \to E$ lineal y acotado, el *rango numérico espacial* como

$$V_E(T) = \{\xi(Tx) : x \in E, \|x\| = 1, \xi \in D(x)\}.$$

Dado $\lambda \in V_E(T)$, $\lambda = \xi(Tx)$, podemos considerar $\varphi(A) = \xi(Ax)$. Claramente $\varphi \in \mathcal{B}(E)'$, pero además es fácil ver que $\varphi \in D(T)$. Como $\varphi(T) = \xi(Tx) = \lambda$, se tiene la inclusión $V_E(T) \subset V(T)$ para todo $T \in \mathcal{B}(E)$. Puede probarse [19, p. 83] que

$$\overline{\text{co}V_E(T)} = V(T),$$

y por otro lado cuando E es un espacio de Hilbert el Teorema de Toeplitz-Hausdorff [33] nos dice que $V_E(T)$ es un conjunto convexo, luego para todo operador T en un espacio de Hilbert H se tiene la igualdad entre rango numérico y rango numérico espacial.

Observación A.3.4. ¿Qué es el rango numérico de una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$? Por la Observación A.3.2), se trata del conjunto compacto y convexo del plano complejo dado por

$$V(A) = \{\text{Tr}(TA) : T \geq 0, \text{Tr}(T) = 1\},$$

y por lo comentado en el último párrafo, también se tiene la igualdad

$$V(A) = \{\langle Ax, x\rangle, \|x\| = 1\}.$$

Si A es una matriz de 2×2, entonces $V(A)$ es una elipse cuyos focos son los autovalores de A [70] (cabe observar que esta elipse degenera a una línea en el plano cuyos extremos son los dos autovalores de A cuando A es normal, ver la próxima sección y los ejercicios).

Lema A.3.5. *Si $a \in \mathcal{B}$ un álgebra de Banach, entonces*

1. *$V(a)$ es un conjunto compacto, convexo y no vacío de $\mathbb{C}$.*
2. *$\sigma(a) \subset V(a)$ y $r(a) \leq v(a) \leq \|a\|$.*

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 341

Demostración. Sea S' la esfera unitaria de $\mathcal{B}'$ con la topología ω^* y $ev : S' \to \mathbb{C}$ la evaluación $ev(\varphi) = \varphi(a)$. Esta es una función lineal y continua. Como $D(1) \subset S'$ es compacto convexo y no vacío, lo mismo vale para

$$V(a) = V(a, 1) = ev(D(1)).$$

Veamos 2. Si $\lambda \in \sigma(a)$, entonces $a-\lambda$ no tiene inversa a izquierda o no tiene inversa a derecha. Supongamos que no tiene inversa a izquierda, entonces $J = \mathcal{B}(a-\lambda)$ es un ideal propio (a izquierda) de $\mathcal{B}$. Se tiene $\|1 - x\| \geq 1$ para todo $x \in J$ pues la bola unitaria alrededor del uno consta de elementos inversibles. Luego J está dentro de un hiperplano cerrado que no contiene al $1 \in \mathcal{B}$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe $\varphi \in \mathcal{B}'$ tal que $\varphi(1) = 1 = \|1\|$ y $J \subset \ker \varphi$. Es decir $\varphi \in D(1)$ y como $\varphi(a - \lambda) = 0$, $\varphi(a) = \lambda$ lo que nos dice que $\lambda \in V(a)$. Si $a - \lambda$ no tiene inversa a derecha, la prueba es idéntica. La desigualdad $r(a) \leq \nu(a)$ es ahora evidente, y ya mencionamos que $\nu(a) \leq \|a\|$. □

A.3.1. El rango numérico y los grupos a un parámetro

En este teorema damos relaciones más finas entre espectro y rango numérico.

Teorema A.3.6. *Si $a \in \mathcal{B}$ un álgebra de Banach, entonces*

1. $\max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(a)\} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log\|e^{na}\| = \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log\|e^{ta}\|$.
2. $\max\{\operatorname{Im}\lambda : \lambda \in \sigma(a)\} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log\|e^{-ina}\| = \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log\|e^{-ita}\|$.
3. $$\begin{aligned}\max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in V(a)\} &= \sup_{t>0} \tfrac{1}{t} \log\|e^{ta}\| = \lim_{t\to 0^+} \tfrac{1}{t} \log\|e^{ta}\| \\ &= \inf_{t>0} \tfrac{1}{t}(\,\|1 + ta\| - 1\,) = \lim_{t\to 0^+} \tfrac{1}{t}(\,\|1 + ta\| - 1\,).\end{aligned}$$
4. $$\begin{aligned}\max\{\operatorname{Im}\lambda : \lambda \in V(a)\} &= \sup_{t>0} \tfrac{1}{t} \log\|e^{-ita}\| = \lim_{t\to 0^+} \tfrac{1}{t} \log\|e^{-ita}\| \\ &= \inf_{t>0} \tfrac{1}{t}(\,\|1 - ita\| - 1\,) = \lim_{t\to 0^+} \tfrac{1}{t}(\,\|1 - ita\| - 1\,).\end{aligned}$$

Demostración. Veamos 1. Como $\sigma(e^a) = \exp(\sigma(a))$, se tiene

$$\{|\mu| : \mu \in \sigma(e^a)\} = \{e^{\operatorname{Re}\lambda} : \lambda \in \sigma(a)\}$$

luego $\log r(e^a) = \max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(a)\}$. Por otro lado

$$\log r(e^a) = \log \inf_{n\in\mathbb{N}} \|(e^a)^n\|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log\|e^{na}\|.$$

Sea $f(t) = \log \|e^{ta}\|$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esta es una función continua pero además es subaditiva pues

$$f(t+s) = \log \|e^{ta}e^{sa}\| \leq \log \|e^{ta}\|\|e^{sa}\| = f(t) + f(s).$$

Ciertamente

$$I = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} f(n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} f(n) \leq \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} f(t) = S.$$

Para terminar la demostración del primer ítem, veamos que $S = I$. Tomemos $\alpha > I$ y elijamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} f(n) < \alpha$. Sea

$$m = \sup\{f(r) : n \leq r \leq 2n\} < \infty.$$

Dado $k \in \mathbb{N}$, tomemos $t \in [(k+1)n, (k+2)n]$ y por la subaditividad de f,

$$f(t) \leq f(kn) + f(t - kn) \leq kf(n) + m,$$

luego

$$1/t\, f(t) \leq \frac{kf(n)}{t} + \frac{m}{t} < \frac{kn}{t}\alpha + \frac{m}{t}.$$

Si hacemos tender $k \to \infty$, dejando que t permanezca en el intervalo dado, se tiene $\frac{kn}{t} \leq 1$, y deducimos que

$$\limsup_{t\to+\infty} 1/t\, f(t) \leq \alpha,$$

lo que prueba la desigualdad que faltaba, $S \leq I$. El segundo ítem se deduce del primero, notando que $\sigma(-ia) = -i\sigma(a)$ y entonces

$$\begin{aligned} \max\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(-ia)\} &= \max\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in -i\sigma(a)\} \\ &= \max\{\mathrm{Im}\,\mu : \mu \in \sigma(a)\}. \end{aligned}$$

Para probar el ítem 3., sea $\mu = \max\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in V(a)\}$. Tomemos $t > 0$, y para $x \in S$, $\varphi \in D(x)$ entonces

$$\varphi((1-ta)x) = \varphi(x) - t\varphi(ax) = 1 - t\lambda$$

con $\lambda \in V(a)$. Entonces

$$\|(1-ta)x\| \geq |\varphi((1-ta)x)| \geq \mathrm{Re}\,\varphi((1-ta)x) \geq 1 - t\mu. \tag{A.3}$$

Si $a = 0$ la afirmación es trivial. Si tomamos $0 < t < \|a\|^{-1}$, se tiene $1 - t\mu \geq 1 - \alpha\|a\| > 0$, y aplicando la desigualdad (A.3) a $x = \frac{1+ta}{\|1+ta\|}$, obtenemos

$$(1-t\mu)^{-1}(1 + t^2\|a^2\|) \geq (1-t\mu)^{-1}\|1 - t^2a^2\| \geq \|1 + ta\|.$$

Entonces

$$\|1+ta\|-1 \le \frac{1t^2\|a^2\|}{1-t\mu} - 1 = \frac{t\mu + t^2\|a^2\|}{1-t\mu}.$$

Luego

$$i = \inf_{t>0} \frac{1}{t}(\,\|1+ta\|-1\,) \le \frac{1}{t}(\,\|1+ta\|-1\,) \le \frac{\mu + t\|a^2\|}{1-t\mu}$$

para $0 < t < \|a\|^{-1}$. Basta probar que $\mu \le i$ para obtener, tomando límite, la primera identidad

$$\mu = \inf_{t>0} \frac{1}{t}(\,\|1+ta\|-1\,) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(\,\|1+ta\|-1\,). \tag{A.4}$$

Pero si $\varphi \in D(1)$ entonces $\varphi(a) = {}^1\!/_t(\varphi(1+ta)-1)$ para todo $t>0$, con lo cual

$$\operatorname{Re}\varphi(a) = {}^1\!/_t(\operatorname{Re}\varphi(1+ta)-1) \le {}^1\!/_t(|\varphi(1+ta)|-1) \le {}^1\!/_t(\|1+ta\|-1),$$

de donde se deduce que $\mu \le i$. Ahora vamos a probar la identidad

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\log\|e^{ta}\| = \sup_{t>0} \frac{1}{t}\log\|e^{ta}\| = \mu. \tag{A.5}$$

Tomemos $t>0$, e iteramos la ecuación (A.3) para obtener

$$\|(1-ta)^n x\| \ge (1-t\mu)^n\|x\|$$

para todo $x \in \mathcal{B}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dividiendo por $n!$ y sumando sobre n, se deduce que

$$\|\exp(1-ta)x\| \ge e^{1-t\mu}\|x\|.$$

Cancelando los términos $\exp(1) = e$ de ambos lados y tomando $x = e^{ta}$ se tiene $e^{t\mu} \ge \|e^{ta}\|$ para todo $t>0$ con lo cual

$$\sup_{t>0} \frac{1}{t}\log\|e^{ta}\| \le \mu.$$

Ahora, como $\|e^{ta}\| = \|1+ta+o(t^2)\| \ge \|1+ta\| - o(t^2)$, y usando que $r^{-1}(r-1) \le \log(r)$ para todo $r>0$, tenemos

$$\frac{\frac{1}{t}\{\|1+ta\|-1\}-o(t)}{\|1+ta\|-o(t^2)} \le \frac{1}{t}\log\|e^{ta}\|$$

para todo $t>0$. Luego

$$\frac{\frac{1}{t}\{\|1+ta\|-1\}-o(t)}{\|1+ta\|-o(t^2)} \le \frac{1}{t}\log\|e^{ta}\| \le \sup_{t>0}\frac{1}{t}\log\|e^{ta}\| \le \mu.$$

para todo $t>0$, y haciendo tender $t \to 0^+$ en el término de la izquierda y usando (A.4), obtenemos (A.5). El cuarto ítem se deduce del tercero, de la misma manera que el segundo se dedujo del primero. □

A.3.2. La relación entre rango numérico y espectro

Dado $X \subset \mathbb{C}$, denotamos con $\mathrm{co}(X)$ a la cápsula convexa de X,

$$\mathrm{co}(X) = \{z \in \mathbb{C} : z = t\mu + (1-t)\lambda, \quad \lambda, \mu \in X,\ t \in [0,1]\}.$$

Como $V(a)$ es convexo (Lema A.3.5), se deduce que $\mathrm{co}(\sigma(a)) \subset V(a)$.

Recordemos que $x \in \mathcal{B}$ es *Hermitiano* si e^{itx} tiene norma unitaria para todo $t \in \mathbb{R}$ (Observación 4.5.3).

Teorema A.3.7. *Sea $a \in \mathrm{Herm}(\mathcal{B})$. Entonces:*

1. $\|a\| = r(a)$.
2. $\min \sigma(a) = \min V(a)$ *y* $\max V(a) = \max \sigma(a)$. *En particular* $r(a) = \nu(a)$ *y* $V(a) = \mathrm{co}(\sigma(a))$.

Demostración. Para probar el primer ítem, usamos el desarrollo en serie de potencias de la función $\operatorname{arc\,sen} : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$:

$$\operatorname{arc\,sen}(x) = \sum_{n \geq 0} a_k x^k.$$

Los a_k son reales y positivos. No es difícil probar que la serie converge uniformemente en $|x| < 1$, y que para $x = 1$ es convergente y

$$\operatorname{arc\,sen}(1) = \sum_{n \geq 0} a_k = \frac{\pi}{2}.$$

Sea $b \in \mathrm{Herm}(\mathcal{B})$ tal que $r(b) < \pi/2$. Entonces $r(\operatorname{sen}(b)) = \operatorname{sen}(r(b)) < 1$, y por el cálculo funcional analítico,

$$b = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen}(b)) = \sum_{n \geq 0} a_k \operatorname{sen}(b)^k.$$

Como $\operatorname{sen}(b) = \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}$ y b es Hermitiano, resulta $\|\operatorname{sen}(b)\| \leq 1$, con lo cual

$$\|b\| \leq \sum_{n \geq 0} a_k \|\operatorname{sen}(b)\|^k \leq \sum_{n \geq 0} a_k = \frac{\pi}{2}.$$

Para $a \in \mathrm{Herm}(\mathcal{B})$, si $r(a) = 0$, tomamos $t > 0$ y entonces por lo que acabamos de probar, como $r(ta) = r(a)t = 0$, se tiene $\|ta\| \leq \pi/2$; haciendo tender $t \to +\infty$ se tiene un absurdo. Sea entonces $0 < t < \frac{\pi}{2r(a)}$. Entonces $r(ta) = r(a)t < \pi/2$, con lo cual $t\|a\| \leq \pi/2$. Haciendo tender $t \to \frac{\pi}{2r(a)}^-$, se tiene $\frac{\pi}{2r(a)}\|a\| \leq \pi/2$, luego $\|a\| \leq r(a)$ y la otra desigualdad vale siempre.

Para probar 2, usamos el ítem previo y el ítem 3 del Teorema A.3.6: tomamos $t > 0$ tal que $\sigma(a+t) \subset V(a+t) \subset [0, +\infty)$ y calculamos

$$\begin{aligned} \max V(a+t) &= \sup_{\alpha>0} \frac{1}{\alpha} \log \|e^{\alpha(a+t)}\| \leq \sup_{\alpha>0} \frac{1}{\alpha} \log e^{\alpha\|a+t\|} \\ &= \|a+t\| = r(a+t). \end{aligned}$$

Como $\sigma(a+t) \subset [0, +\infty)$, se tiene $r(a+t) = \max \sigma(a+t)$, luego

$$\max V(a+t) \leq \max \sigma(a+t).$$

Como la otra desigualdad vale siempre en realidad tenemos

$$\max V(a+t) = \max \sigma(a+t).$$

Entonces de $V(a) + t = V(a+t)$ y $\sigma(a+t) = \sigma(a) + t$ deducimos que

$$\max V(a) = \max \sigma(a).$$

Ahora usamos que

$$\begin{aligned} \min V(a) &= \min V(-(-a)) = \min -V(-a)) = -\max V(-a) \\ &= -\max \sigma(-a) = \min -\sigma(-a) = \min \sigma(a). \end{aligned}$$

Luego

$$\min \sigma(a) = \min V(a) \leq \max V(a) = \max \sigma(a),$$

y como $V(a)$ es convexo se tiene la conclusión $V(a) = \mathrm{co}(\sigma(a))$. □

A.4. Problemas

A.I. Probar las afirmaciones de la Observación A.1.1: la unitización $\mathcal{A}^\sim$ de un álgebra C^* es a su vez un álgebra C^* y además $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^\sim$ es un ideal maximal.

A.II. Probar que todo ideal maximal en un álgebra C^* es cerrado.

A.III. Si $a, b \in \mathcal{B}$ un álgebra de Banach, probar que $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$ (ver el Lema A.2.2).

A.IV. Si $\mathcal{B}$ es un álgebra de Banach y $G_\mathcal{B}$ es el grupo de inversibles, dados $v, w \in \mathcal{B}$ sean X_v, X_w los correspondientes campos invariantes a izquierda. Si $[v, w] = \mathcal{L}_{X_v} X_w(1)$ indica el corchete de Lie usual del grupo, probar que $[v, w] = vw - wv$. Probar además que la exponencial abstracta del grupo de Lie coincide con la serie de potencias de la exponencial usual del álgebra.

A.V. Probar el Teorema A.2.10 del cálculo funcional analítico.

A.VI. Sea $\mathcal{B} = M_n(\mathbb{C})$ el álgebra de matrices con la norma uniforme.

1. Probar que toda funcional φ del dual de $\mathcal{B}$ está realizad por la traza, es decir existe $T \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $\varphi(A) = \mathrm{Tr}(AT)$.

2. Probar que $\|\varphi\| = \|T\|_1 = \mathrm{Tr}|T|$.

3. Probar que $D(1) = \{\mathrm{Tr}(T\,\cdot) : \mathrm{Tr}(T) = 1 = \mathrm{Tr}|T|\}$.

A.VII. * Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach.

1. Probar que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ es una subálgebra que contiene a la identidad, entonces el rango numérico no depende del álgebra que se mire. Es decir $V_{\mathcal{B}}(a) = V_{\mathcal{A}}(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

2. Un elemento $n \in \mathcal{B}$ es *normal* si existen $h, k \in \mathrm{Herm}(\mathcal{B})$ tales que $n = h + ik$ y $hk = kh$. Probar que si n es normal, entonces $\mathrm{co}(\sigma(n)) = V(n)$. Sugerencia: aplicar la teoría de Gelfand (Lema B.3.1 y Corolario B.3.2) al doble conmutante del álgebra conmutativa generada por $1, h, k$.

Apéndice **B**

Álgebras C^*

Consideraremos en este apéndice el cálculo funcional en el caso particular de un álgebra C^*. Un elemento $a \in \mathcal{A}$ es *autoadjunto* o *Hermitiano* si $a^* = a$. Un elemento $n \in \mathcal{A}$ es *normal* si $n^*n = nn^*$. Todo elemento autoadjunto es normal. Comenzamos con las propiedades del radio espectral para elementos normales.

B.1. El radio espectral de un operador normal

Proposición B.1.1. *Sea $a \in \mathcal{A}$ un elemento normal en un álgebra C^*. Entonces*

$$\|a^2\| = \|aa^*\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$$

y además

$$r(a) = \|a\|.$$

Demostración. Observemos primero que, si $x^* = x$, entonces

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|x^2\|.$$

Ahora notemos que $x = aa^* = a^*a$ es Hermitiano, y también que $(aa)^* = a^*a^*$. Luego

$$\|aa^*\|^2 = \|aa^*aa^*\| = \|aaa^*a^*\| = \|a^2(a^*)^2\| = \|a^2(a^2)^*\| = \|a^2\|^2.$$

Esto nos dice que $\|a^2\| = \|aa^*\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Iterando, obtenemos $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego

$$\|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \|a\|$$

y tomando límite se tiene el resultado, mediante la fórmula del radio espectral $r(a) = \lim_k \|a^k\|^{1/k}$. □

B.2. Cálculo funcional continuo

Combinando resultados previos, se deduce que si $a^* = a$ y f es analítica en un entorno de $\sigma(a)$, entonces el elemento $f(a)$ es normal, y autoadjunto si además $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Luego

$$\|f(a)\| = \max\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(a)\} = \|f\|_{\infty,\sigma(a)}.$$

Por el Teorema de Runge (Teorema A.2.7) existe una sucesión de funciones racionales $r_n(z)$ que convergen uniformemente sobre $\sigma(a)$ a la función f. Observemos que $f(a)$, en este contexto de álgebras C^* puede calcularse (o incluso definirse) como

$$f(a) = \lim_n r_n(a) \in \mathcal{A},$$

donde la convergencia es en el sentido de la norma del álgebra $\mathcal{A}$. Observemos que el límite existe pues

$$\|r_n(a) - r_m(a)\| = \|(r_n - r_m)(a)\| = \|r_n - r_m\|_{\infty,\sigma(a)},$$

con lo cual la sucesión $r_n(a) \in \mathcal{A}$ es de Cauchy y $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach. De hecho, si f tiene una expansión analítica

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k (z - z_0)^k,$$

entonces

$$f(a) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k (a - z_0)^k$$

donde la convergencia de la serie es con la norma de $\mathcal{A}$. Ahora supongamos que f es una función únicamente *continua* en el compacto $\sigma(a)$. Enunciamos un caso particular del teorema de Stone-Weierstrass que será de extrema utilidad. La demostración puede verse en el libro de Reed-Simon, [80, pág. 103].

Teorema B.2.1 (Teorema de Stone-Weierstrass)**.** *Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto. Si $C(K)$ denota el álgebra de Banach de funciones continuas a valores complejos sobre K, con la topología de convergencia uniforme, entonces los polinomios en dos variables $p = p(z, \bar{z})$ son densos en $C(K)$.*

Observación B.2.2. Si adoptamos la convención de que evaluando $\bar{z}$ en $z = a$ obtenemos a^*, tiene sentido calcular $p(a, a^*)$ para un polinomio $p = p(z, \bar{z})$. Por ejemplo, si

$$p(z, \bar{z}) = 2z^2 + 3z + \bar{z}^2 z + \overline{z^3},$$

entonces

$$p(a, a^*) = 2a^2 + 3a + (a^*)^2 a + (a^*)^3.$$

Supongamos que $a \in \mathcal{A}$ es normal, entonces $p(a)$ es normal también, y el álgebra generada por a, a^* y la identidad se identifica con los polinomios en dos variables evaluados en a, a^*, donde $\bar{z}(a) = a^*$.

Si $a = a^*$, en realidad se tiene que $p(z, \bar{z})|_a = q(a)$ donde $q = q(z)$ es otro polinomio únicamente en la variable z. Luego si $p_n \to f$, entonces

$$\|p_n(a) - p_m(a)\| = \|q_{n,m}(a)\| = \|q_{n,m}\|_{\infty,\sigma(a)} = \|p_n - p_m\|_{\infty,\sigma(a)} \to 0,$$

con lo cual podemos definir como antes $f(a) = \lim_{n\to\infty} p_n(a)$.

Al álgebra $C^*(a) \subset \mathcal{A}$ de todas las funciones continuas $f \in C(\sigma(a))$, evaluadas en a, la llamamos *álgebra* C^* *generada por* a. Observemos que es un álgebra C^* conmutativa, que de hecho por definición coincide con la clausura del álgebra generada por las potencias de a y la identidad de $\mathcal{A}$.

Lema B.2.3. *Sean* $a = a^* \in \mathcal{A}$, $f, g \in C(\sigma(a))$. *Entonces:*

- $fg(a) = f(a)g(a) = g(a)f(a)$, $\bar{f}(a) = f(a)^*$.
- $\|f(a)\| = \|f\|_{\infty,\sigma(a)}$.
- $f(a)$ *es inversible si y sólo si* $f(\lambda) \neq 0$ *para todo* $\lambda \in \sigma(a)$.
- $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.

Demostración. Las afirmaciones del primer ítem son obvias para polinomios, y se sigue que valen tomando límite. Lo mismo se puede decir del segundo ítem.

Para ver el tercer ítem, supongamos primero que f no se anula en el espectro de a. Entonces $g = 1/f$ es una función continua en $\sigma(a)$. Como $fg = 1$, obtenemos $f(a)g(a) = g(a)f(a) = 1$, lo que prueba que $f(a)$ es inversible.

Recíprocamente, sea $\lambda \in \sigma(a)$ tal que $f(\lambda) = 0$. Si p_n es una sucesión de polinomios que aproxima a f uniformemente en $\sigma(a)$, sea $n(k)$ tal que

$$|p_{n(k)}(\lambda)| < 1/k.$$

Tomamos la sucesión de polinomios q_k dada por

$$q_k(x) = p_{n(k)}(x) - p_{n(k)}(\lambda).$$

Como $\|f - q_k\|_\infty \leq \|f - p_{n(k)}\|_\infty + 1/k$, esta sucesión también tiende uniformemente a f en $\sigma(a)$. Como $q_k(\lambda) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se deduce que

$$0 \in q_k(\sigma(a)) = \sigma(q_k(a)).$$

Luego ninguno de los $q_k(a)$ es inversible. Se deduce que $f(a)$ no puede ser inversible, pues los inversibles forman un conjunto abierto de $\mathcal{A}$.

Para probar el último ítem, sea $\beta \in \mathbb{C}$. Observemos que $f(a) - \beta$ es inversible si y sólo si $\beta \notin \sigma(f(a))$, lo cual ocurre por el ítem previo si y sólo si $f(\lambda) - \beta \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma(a)$, o equivalentemente si y sólo si $\beta \notin f(\sigma(a))$. □

Observación B.2.4. Si $f \in C(\sigma(a))$ y $g \in C(f(\sigma(a)))$, entonces $g \circ f \in C(\sigma(a))$, y además

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Esta afirmación es obvia si f, g son polinomios, y luego se deduce el caso general pasando al límite.

B.3. Teorema de Gelfand y la representación GNS

Observemos primero que el espacio $C(X)$ de funciones continuas a valores en $\mathbb{C}$ sobre un espacio topológico compacto X, es un álgebra C^* abeliana, si lo munimos de la norma supremo y la involución dada por la conjugación. El teorema del isomorfismo de Gelfand nos da la recíproca de este resultado.

Sea $a \in \mathcal{A}$ normal, y $f \in C(\sigma(a))$. Por el Teorema de Stone-Weierstrass, existe una sucesión de polinomios $p_n(z, \bar{z})$, tales que $p_n \to f$ en el compacto $\sigma(a)$. Intentamos definir

$$f(a) = \lim_n p_n(a, a^*) \in \mathcal{A},$$

donde la convergencia es en el sentido de la norma del álgebra $\mathcal{A}$, que debiera ser un operador normal. Pero hay un obstáculo: no podemos probar directamente que este límite existe, pues no tenemos la fórmula del espectro

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$$

para elementos que no sean autoadjuntos. Sin embargo, la fórmula es correcta así como propiedades idénticas a las del Lema B.2.3. En lo que resta de esta sección veremos como se prueba esto, pasando por un teorema de Gelfand para álgebras conmutativas que tiene interés independiente.

B.3.1. El espacio de caracteres

Dada un álgebra de Banach abeliana $\mathcal{A}$, podemos considerar *homomorfismos* $h \in \mathcal{A}'$, es decir $h(ab) = h(a)h(b)$, $h(1) = 1$, también conocidos como *caracteres*. No es difícil probar (ver por ejemplo la Sección 4.4 del primer tomo del libro de Kadison-Ringrose [52]) que todo homomorfismo a valores en $\mathbb{C}$ es continuo. Ponemos

$$\Sigma = \{h \in \mathcal{A}' : h \text{ es un homomorfismo}\},$$

conocido como el *espacio maximal* o *espacio de caracteres* de $\mathcal{A}$. Le damos la topología de subespacio de $\mathcal{A}'$, y en $\mathcal{A}'$ consideramos la topología ω^*, que es la topología

de convergencia puntual. Recordemos que por el Teorema de Banach-Alaoglu (ver [80, IV.21]), la bola unitaria en $\mathcal{A}'$ es ω^*-compacta.

Lema B.3.1. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach abeliana. Entonces:*

1. *Σ es ω^*-compacto.*
2. *Si $a \in \mathcal{A}$, entonces $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \Sigma\}$.*

Demostración. Como la topología es la de convergencia puntual, es fácil ver que un punto límite de elementos en Σ es un homomorfismo, con lo cual Σ es cerrado y por ende compacto. Si $b \in \mathcal{A}$ es inversible, y $h \in \Sigma$, entonces $1 = h(bb^{-1}) = h(b)h(b^{-1})$, con lo cual $b \notin \ker h$. En particular, si $a \in \mathcal{A}$ y $h \in \Sigma$, entonces $a - h(a) \in \ker h$, con lo cual $h(a) \in \sigma(a)$. Recíprocamente, dado $\lambda \in \sigma(a)$, entonces $(a-\lambda)\mathcal{A}$ es un ideal propio en $\mathcal{A}$, contenido en algún ideal maximal $\mathcal{A}_\lambda$. Si tomamos $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{A}_\lambda \simeq \mathbb{C}$ la proyección al cociente, es fácil ver que $h \in \Sigma$. Por construcción $h((a-\lambda)) = 0$ con lo cual $h(a) = \lambda$. □

Corolario B.3.2. *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach arbitraria y sean $x, y \in \mathcal{B}$ que conmutan ($xy = yx$). Entonces*

$$\sigma(x+y) \subset \sigma(x) + \sigma(y) \qquad y \qquad \sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y).$$

Demostración. Observemos que si x e y conmutan, entonces $x^n y = x^{n-1}xy = x^{n-1}yx = \cdots = yx^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Con un razonamiento análogo, $x^n y^k = x^n yy^{k-1} = yx^n y^{k-1} = yx^n yy^{k-2} = \cdots = y^k x^n$. Luego x, y generan un álgebra de Banach conmutativa que llamaremos $\mathcal{A}$. Sean

$$\mathcal{A}' = \{z \in \mathcal{B} : zw = wz \text{ para todo } w \in \mathcal{A}\},$$

$$\mathcal{A}'' = (\mathcal{A}')' = \{a \in \mathcal{B} : az = za \text{ para todo } z \in \mathcal{A}'\}.$$

Tautológicamente, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$, y además como $\mathcal{A}$ es conmutativa, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. Luego si $a \in \mathcal{A}''$, entonces en particular a conmuta con todos los elementos de $\mathcal{A}$, con lo cual $a \in \mathcal{A}'$, es decir $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}'$. Resumiendo $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}'$. Si $a, b \in \mathcal{A}''$, en particular $b \in \mathcal{A}'$ y por definición de $\mathcal{A}'' = (\mathcal{A}')'$ se deduce que a y b conmutan, es decir $\mathcal{A}''$ es un álgebra de Banach conmutativa. Afirmamos que

$$\sigma_{\mathcal{A}''}(a) = \sigma_{\mathcal{B}}(a)$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. Ciertamente $\sigma_{\mathcal{A}''}(a) \supset \sigma_{\mathcal{B}}(a)$ pues $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{B}$ y una inversa en $\mathcal{A}''$ de $a - \lambda$ sirve de inversa en $\mathcal{B}$. Recíprocamente, si $b \in \mathcal{A}''$ y $b^{-1} \in \mathcal{B}$, es su inversa, se tiene $bw = wb$ para todo $w \in \mathcal{A}'$, con lo cual $wb^{-1} = b^{-1}w$ nos dice que $b^{-1} \in \mathcal{A}''$.

Por último, si Σ es el espacio de caracteres de $\mathcal{A}''$, el ítem 2 del Lema previo nos dice que

$$\sigma_{\mathcal{A}''}(a+b) = \{h(a)+h(b) : h \in \Sigma\} \subset \sigma_{\mathcal{A}''}(a) + \sigma_{\mathcal{A}''}(b),$$
$$\sigma_{\mathcal{A}''}(ab) = \{h(a).h(b) : h \in \Sigma\} \subset \sigma_{\mathcal{A}''}(a)\sigma_{\mathcal{A}''}(b).$$

□

B.3.2. La transformada de Gelfand en C^*-álgebras

La *transformada de Gelfand* de $a \in \mathcal{A}$ es la asignación $a \mapsto \widehat{a}$, donde $\widehat{a} : \mathcal{A} \to C(\Sigma)$ está dada por $\widehat{a}(h) = h(a)$, que es de hecho un homomorfismo. En el caso en que $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*, la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico. Para probarlo necesitamos algunas herramientas específicas que condensamos en los siguientes dos resultados que tienen interés *per se*.

Lema B.3.3. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* abeliana, y $h \in \Sigma$, entonces*

1. $h(a) \in \mathbb{R}$ *si* $a^* = a$.
2. $h(a^*) = \overline{h(a)}$ *para todo* $a \in \mathcal{A}$.
3. $h(a^*a) \geq 0$ *para todo* $a \in \mathcal{A}$.
4. $|h(u)| = 1$ *si* u *es unitario* $(uu^* = u^*u = 1)$.

Demostración. Todos los ítems se deducen trivialmente del primero. Para probarlo, podemos suponer que $\|h\| = 1$. Ponemos $h(a) = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ y observemos que para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} t^2 + \|a\|^2 &\geq \|a^2 + t^2\| = \|(a+it)^*(a+it)\| = \|a+it\|^2 \\ &\geq |h(a+it)|^2 = x^2 + y^2 + 2yt + t^2. \end{aligned}$$

Si $y \neq 0$ se tiene una contradicción. □

B.3.2.1. Invariancia del espectro

Lema B.3.4. *Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es una inclusión de C^*-álgebras, entonces para todo $a \in \mathcal{B}$ se tiene*

$$\sigma_{\mathcal{B}}(a) = \sigma_{\mathcal{A}}(a).$$

Demostración. Ciertamente si $a - \lambda$ tiene inversa en $\mathcal{B}$ tendrá inversa (el mismo elemento) en $\mathcal{A}$. Luego $\sigma_{\mathcal{B}}(a) \supset \sigma_{\mathcal{A}}(a)$. Para ver la otra inclusión, basta probar que si $b \in \mathcal{B}$ tiene una inversa $b^{-1} \in \mathcal{A}$, en realidad $b^{-1} \in \mathcal{B}$. Supongamos primero que $b = b^*$. Dada $f(t) = t^{-1}$, tiene sentido entonces el cálculo funcional $f(b)$ efectuado

en la C^*-álgebra $\mathcal{A}$. Por el teorema espectral para autoadjuntos, en realidad debe ser $f(b) \in \mathcal{B}$ (por ejemplo porque es límite uniforme de polinomios en b). En el caso general, dado $b \in \mathcal{B}$, supongamos que $c \in \mathcal{A}$ es su inversa. Entonces $c^* \in \mathcal{A}$ es la inversa de $b^* \in \mathcal{B}$. Es fácil ver que cc^* es inversible, y además

$$bb^*c^*c = 1 = c^*cbb^*,$$

con lo cual c^*c es la inversa de $bb^* \in \mathcal{B}$. Como bb^* es Hermitiano, se sigue por el caso anterior que $c^*c \in \mathcal{B}$. Luego $c = (c^*c)b^* \in \mathcal{B}$. □

B.3.3. El Teorema de Gelfand

Teorema B.3.5 (Teorema del isomorfismo de Gelfand)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* abeliana, y Σ su espacio de caracteres. Entonces la transformada de Gelfand es un *-isomorfismo isométrico entre $\mathcal{A}$ y $C(\Sigma)$.*

Demostración. Ciertamente $\widehat{a} : \mathcal{A} \to C(\Sigma)$ es un morfismo, resulta $*$-morfismo por el segundo ítem del Lema B.3.3. Como $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \Sigma\}$, tenemos

$$\|\widehat{a}\|_\infty = \max_{h \in \Sigma} |h(a)| = r(a) = \|a\|,$$

pues todo elemento de $\mathcal{A}$ es normal. Luego la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico con su rango, que resulta cerrado en $C(\Sigma)$. Para ver que es sobreyectiva, basta ver que la imagen es densa; esto último es una aplicación trivial del teorema de Stone-Weierstrass. □

Podemos tomar entonces, dado $a \in \mathcal{A}$ un elemento normal en un álgebra C^* arbitraria, el álgebra abeliana generada por a, a^* y 1, que denotamos $C^*(a)$. Es decir, clausuramos en la norma de $\mathcal{A}$ a los polinomios en $1, a, a^*$. Para esta álgebra C^* abeliana especializamos el Teorema de Gelfand. Observemos que el espectro de a como elemento de $\mathcal{A}$ coincide con el espectro de a como elemento de $C^*(a)$, y en particular

$$\sigma(a) = \{h(a) : h \text{ es un caracter de } C^*(a)\}.$$

Lema B.3.6. *Si Σ es el espacio de caracteres de $C^*(a)$ con $a \in \mathcal{A}$ normal, entonces la aplicación $h \mapsto h(a)$ es un homeomorfismo entre espacios topológicos compactos, $\Sigma \simeq \sigma(a)$.*

Demostración. Que la aplicación es sobreyectiva se deduce de la observación previa. Que es continua es evidente pues la topología de Σ es la de convergencia puntual, luego si $h_n \to h$ en Σ, entonces $h_n(a) \to h(a)$ in $\mathbb{C}$. Por último, para cualquier

elemento $b \in C^*(a)$, se tiene $b = \lim_n p_n(a, a^*)$ con $p_n = p_n(z, \bar{z})$ polinomios, luego si $h_1, h_2 \in \Sigma$ entonces

$$h_1(b) = \lim_n h_1(p_n(a, a^*)) = \lim_n p_n(h_1(a), \overline{h_1(a)}),$$

lo que prueba que $h_1 = h_2$ si $h_1(a) = h_2(a)$. □

Observemos que si

$$\mu : C^*(a) \to C(\sigma(a)) = C(\Sigma)$$

es el homomorfismo dado por

$$\mu(b)(\lambda) = h(b) \text{ para } h \in \Sigma \text{ tal que } h(a) = \lambda \in \sigma(a),$$

este no es otra cosa que la transformada de Gelfand compuesta con el isomorfismo entre $\sigma(a)$ y Σ. Hemos probado el siguiente teorema, los detalles quedan como ejercicio:

Teorema B.3.7. *Sea $a \in \mathcal{A}$ un elemento normal en un álgebra C^*. La aplicación $\phi : C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$ dada por $\phi(f) = f(a)$ es un isomorfismo isométrico entre $C(\sigma(a))$ y $C^*(a)$, que preserva la involución en el sentido que*

$$\phi(\bar{f}) = f(a)^*.$$

Además se tiene

- $\sigma(f(a)) = \sigma(\phi(f)) = f(\sigma(a))$ *para toda* $f \in C(\sigma(a))$.
- $\phi(1) = 1$.
- *Si* $id : \sigma(a) \to \sigma(a)$ *denota la función identidad,* $id(z) = z$, *entonces* $\phi(id) = a$.

B.3.4. Propiedades del cálculo funcional continuo

Observemos que todo elemento $a^* = a \in \mathcal{A}$ tiene su espectro real. En efecto,

$$\phi(id) = a = a^* = \phi(\overline{id}),$$

lo que prueba que $\overline{id} = id$, y esto sólo es posible si $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Asimismo, si $u \in \mathcal{A}$ es unitario (es decir $u^*u = uu^* = 1$) entonces

$$\phi(1) = 1 = \phi(id)\phi(id)^* = \phi(id \cdot \overline{id}) = \phi(|id|^2),$$

lo que prueba que $|z|^2 = 1$ sobre $\sigma(u)$, con lo cual $\sigma(u) \subset S^1$.

B.3.4.1. Elementos positivos

Un elemento $a \in \mathcal{A}$ en un álgebra C^* es *positivo* si $a^* = a$ y $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$, lo denotamos $a \geq 0$.

Lema B.3.8. *Sean* $a, b \in \mathcal{A}$. *Entonces*

- $a \geq 0$ *sii* $a = b^*b$ *para algún* $b \in \mathcal{A}$.
- $-\|a\| \leq a \leq \|a\|$ *para* $a = a^*$.
- *Si* $0 \leq a \leq b$ *entonces* $\|a\| \leq \|b\|$.
- *Si* $a \geq 0$ *entonces* $xax^* \geq 0$ *para todo* $x \in \mathcal{A}$.
- *Si* $a \leq b$ *entonces* $xax^* \leq xbx^*$ *para todo* $x \in \mathcal{A}$.

Demostración. Ciertamente, si $b \in \mathcal{A}$ entonces b^*b es claramente autoadjunto y además

$$\sigma(b^*b) = \sigma(\phi(id)\phi(\overline{id})) = \sigma(\phi(id \cdot \overline{id})) = \sigma(\phi(|id|^2)) = |id|^2(\sigma(a)).$$

Pero $f(z) = |z|^2$ toma sólo valores reales no negativos en cualquier subconjunto de $\mathbb{C}$, lo que prueba que $\sigma(b^*b) \subset [0, +\infty)$. Recíprocamente, si $a \geq 0$ podemos considerar $s(x) = \sqrt{x}$ definida y continua en $\sigma(a)$, y tomar $b = f(a) \in \mathcal{A}$. Entonces $b^* = b$ (de hecho, $b \geq 0$) y además como $s^2 = id$ se tiene

$$b^*b = b^2 = (s(a))^2 = a.$$

Para ver el segundo ítem, observemos primero que $\|a\| - a$ es autoadjunto. Por otro lado, $\sigma(a) \subset [-\|a\|, \|a\|]$, luego

$$\sigma(\|a\| - a) = \{\|a\| - \lambda : \lambda \in \sigma(a)\} \subset [0, 2\|a\|].$$

Esto nos dice que $\|a\| - a \geq 0$, o equivalentemente que $a \leq \|a\|$. La otra desigualdad es similar. Para ver el tercer ítem, si $0 \leq a \leq b$ entonces por el ítem anterior $0 \leq a \leq b \leq \|b\|$. Pero esto nos dice que $\sigma(a) \subset [0, \|b\|]$, de donde se deduce que $\|a\| \leq \|b\|$. Para ver el cuarto ítem, denotamos $a^{1/2}$ a la raíz cuadrada positiva de a. Entonces

$$xax^* = xa^{1/2}\left(xa^{1/2}\right)^* \geq 0.$$

El último ítem es una consecuencia trivial del anterior. □

B.3.4.2. Funciones monótonas y convexas

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ (con I un intervalo de $\mathbb{R}$) se denomina *monótona de operadores* si dados a, b positivos con espectro contenido en I, tales que $a \leq b$, se verifica $f(a) \leq f(b)$. Una función g se denomina *convexa de operadores* si para a, b con espectro contenido en I, se verifica

$$g\left(\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b\right) \leq \tfrac{1}{2}g(a) + \tfrac{1}{2}g(b).$$

No toda función monótona en el sentido usual es monótona de operadores (Ejercicio B.iv). Tal vez el ejemplo más relevante de función monótona de operadores es $f(t) = t^s$ para $s \in [0, 1]$.

Teorema B.3.9 (Löwner). *Sea* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalo y* $a, b \in \mathcal{A}$ *tales que* $\sigma(a), \sigma(b) \subset I$. *Si* $0 \leq a \leq b$, *entonces para todo* $s \in [0, 1]$ *se verifica*

$$a^s \leq b^s.$$

Demostración. Usando un argumento con los números diádicos, basta probar el resultado para $s = 1/2$ (Ejercicio B.v). Supongamos primero que b es inversible. Entonces $a \leq b$ implica

$$b^{-1/2}ab^{-1/2} \leq 1,$$

con lo cual $\|b^{-1/2}ab^{-1/2}\| \leq 1$, y entonces

$$\begin{aligned} b^{-1/4}a^{1/2}b^{-1/4} &\leq \|b^{-1/4}a^{1/2}b^{-1/4}\| \leq \|a^{1/2}b^{-1/2}\| \\ &= \|(a^{1/2}b^{-1/2})^*(a^{1/2}b^{-1/2})\|^{1/2} \\ &= \|b^{-1/2}ab^{-1/2}\|^{1/2} \leq 1 \end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad usamos que si xy es autoadjunto entonces

$$\|xy\| = \rho(xy) = \rho(yx) \leq \|yx\|$$

aplicado a $x = b^{-1/4}$, $y = a^{1/2}b^{-1/4}$. Esto prueba que $b^{-1/4}a^{1/2}b^{-1/4} \leq 1$ o equivalentemente $a^{1/2} \leq b^{1/2}$. Si b no es inversible, dado $\epsilon > 0$ tenemos $b' = b + \epsilon > b \geq a$ y aplicando el resultado previo a b' se deduce que

$$(b + \epsilon)^{1/2} \geq a^{1/2},$$

haciendo tender ϵ a cero se tiene la conclusión. □

B.3.4.3. Los $*$-morfismos

Un $*$-*morfismo* entre álgebras C^* es un morfismo de álgebras $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ que preserva la estrella, es decir

$$\pi(x^*) = \pi(x)^*$$

donde por supuesto la estrella de la izquierda es la de $\mathcal{A}$, y estrella de la derecha es la de $\mathcal{B}$.

Lema B.3.10. *Todo $*$-morfismo $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre álgebras C^**

- *Preserva el orden, es decir $\pi(a^*a) \geq 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$.*
- *Es contractivo $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$, en particular continuo.*

Demostración. Observemos que

$$\pi(a^*a) = \pi(a^*)\pi(a) = \pi(a)^*\pi(a) \geq 0.$$

Ahora como $x^*x \leq \|x^*x\| = \|x\|^2$ para todo $x \in \mathcal{A}$, luego $\pi(\|x\|^2 - x^*x) \geq 0$, es decir $0 \leq \pi(x^*x) \leq \|x\|^2\pi(1) = \|x\|^2$. Luego

$$\|\pi(x)\|^2 = \|\pi(x)^*\pi(x)\| = \|\pi(x^*x)\| \leq \|x\|^2,$$

que es lo que queríamos probar. □

B.3.5. La representación GNS

Que toda álgebra C^* abstracta admite alguna representación como una subálgebra uniformemente cerrada de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para algún espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es consecuencia de la construcción de Gelfand-Naimark-Segal (GNS), que describimos brevemente a continuación porque la usaremos en reiteradas ocasiones.

B.3.5.1. Funcionales positivas y estados

Una funcional $\rho \in \mathcal{A}'$ es *positiva* si $\rho(a^*a) \geq 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$. A las funcionales positivas de norma unitaria se les suele decir *estados* de $\mathcal{A}$ y a este conjunto se lo denota $\mathcal{S}(A)$. Este es un conjunto convexo, a los extremales se los denomina *estados puros* de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces fijado $\eta \in \mathcal{H}$, la funcional

$$a \mapsto \rho(a) = \langle a\eta, \eta\rangle$$

es positiva pues

$$\rho(a^*a) = \langle a^*a\eta, \eta\rangle = \langle a\eta, a\eta\rangle = \|a\eta\|^2 \geq 0.$$

Por otra parte,

$$|\rho(a)| = |\langle a\eta, \eta\rangle| \leq \|a\|\|\eta\|^2$$

mientras que $\rho(1) = \|\eta\|^2$ lo que nos dice que $\|\rho\| = \|\eta\|^2$, luego ρ tiene norma unitaria si y sólo si $\|\eta\| = 1$. De una manera que precisamos a continuación (ver la representación GNS), todos los estados son de esta forma para algún espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Observación B.3.11. Si $\rho \in \mathcal{A}'$ es positiva, entonces ρ es Hermitiana, es decir

$$\rho(a) \in \mathbb{R}$$

para todo $a = a^*$. Para verlo basta notar que

$$\rho(a) = 1/2\,[\rho(\|a\| + a) - \rho(\|a\| - a)]$$

y cada término es positivo pues $-\|a\| \leq a \leq \|a\|$. Se sigue que

$$\overline{\rho(a)} = \rho(a^*)$$

tomando partes real e imaginaria, es decir si $a = x + iy$ con x, y Hermitianos, entonces

$$\overline{\rho(x + iy)} = \rho(x) - i\rho(y) = \rho(a^*).$$

Lema B.3.12. *Una funcional $\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ es positiva si y sólo si es acotada y $\rho(1) = \|\rho\|$.*

Demostración. Supongamos primero que ρ es positiva, sea $a \in \mathcal{A}$ y $e^{i\theta} \in S^1$ tal que $e^{i\theta}\rho(a) = |\rho(a)| \geq 0$, sea

$$h = Re(e^{i\theta}a) = 1/2(e^{i\theta}a + e^{-i\theta}a^*).$$

Entonces $h = h^*$ y por ende $h \leq \|h\| \leq \|a\|$, con lo cual

$$\|a\|\rho(1) - \rho(h) = \rho(\|a\| - h) \geq 0.$$

Pero de aquí se sigue que

$$|\rho(a)| = \rho(e^{i\theta}a) = \overline{\rho(e^{i\theta}a)} = \rho(e^{-i\theta}a^*) = \rho(h) \leq \rho(1)\|a\|.$$

Luego $\|\rho\| \leq \rho(1)$ y ρ es acotada. La otra desigualdad vale siempre.

Supongamos ahora que ρ es acotada y que $\rho(1) = \|\rho\|$; claramente para ver si ρ es positiva podemos suponer que $\|\rho\| = 1$. Tomemos $a \geq 0$, pongamos $\rho(a) = \alpha + i\beta$ y veamos que $\alpha \geq 0$ y $\beta = 0$. Para $s \in \mathbb{R}$ positivo y suficientemente pequeño, tenemos que

$$\sigma(1 - sa) = \{1 - st : t \in \sigma(a)\} \subset [0, 1]$$

pues $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$. Como $1 - sa$ es autoadjunto, $\|1 - sa\| = r(1 - sa) \leq 1$, de donde se sigue que

$$0 \leq 1 - s\alpha \leq |1 - s\alpha - is\beta| = |\rho(1 - sa)| \leq \|1 - sa\| \leq 1$$

lo que nos dice que $\alpha \geq 0$. Por otra parte, si definimos $B_n = a - \alpha + in\beta$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\|B_n\|^2 = \|B_n^* B_n\| = \|(a - \alpha)^2 + n^2\beta^2\| \leq \|a - \alpha\|^2 + n^2\beta^2.$$

Luego, si $\beta \neq 0$ se tiene una contradicción pues

$$(n^2 + 2n + 1)\beta^2 = |i(n + 1)\beta|^2 = |\rho(B_n)|^2 \leq \|a - \alpha\|^2 + n^2\beta^2.$$

□

Corolario B.3.13. *Si $\mathcal{A}$ es C^*-álgebra, entonces*

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \{\rho \in \mathcal{A}' : \rho(1) = 1 = \|\rho\|\}.$$

Además si $a = a^*$ y $\rho(a) \geq 0$ para todo $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, entonces $a \geq 0$.

Demostración. Por el lema previo, se tiene la caracterización del espacio de estados. Por otra parte,

$$\{\rho \in \mathcal{A}' : \rho(1) = 1 = \|\rho\|\} = D(1),$$

es decir el espacio de estados coincide con las funcionales normizantes de $x = 1 \in \mathcal{A}$ (ver la Sección A.3). Luego si $a^* = a$ y $\rho(a) \geq 0$ para todo estado ρ, entonces $V(a) \subset [0, +\infty)$, así que $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$ por el Lema A.3.5. □

B.3.5.2. Estados normizantes

Lema B.3.14. *Dado $a \in \mathcal{A}$ normal, existe $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ que es* normizante *para a, es decir*

$$|\varphi(a)| = \|a\|.$$

Demostración. Si a es normal, $\|a\| = r(a)$, luego existe $\lambda \in \sigma(a)$ tal que $|\lambda| = \|a\|$. Tomamos $h_0 \in \Sigma$ -con Σ el espacio de caracteres del álgebra conmutativa $C^*(a)$ generada por $1, a, a^*$- tal que $h_0(a) = \lambda$, y lo extendemos por Hahn-Banach a una funcional φ en todo $\mathcal{A}$, de norma $\|\varphi\| = 1$. Ciertamente

$$|\varphi(a)| = |h_0(a)| = |\lambda| = \|a\|.$$

Por otra parte, $\varphi(1) = h_0(1) = 1 = \|\varphi\|$, y por el lema previo φ es un estado. □

B.3.6. La construcción de Gelfand, Naimark y Segal

Dado $a \in \mathcal{A}$ no nulo, tomamos un estado φ tal que $\varphi(a^*a) > 0$. Consideremos la forma bilineal $\langle\ ,\ \rangle_\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\langle x, y\rangle_\varphi = \varphi(y^*x)$$

para $x, y \in \mathcal{A}$. Pongamos $\|x\|_\varphi = \sqrt{\langle x, x\rangle_\varphi}$. Como φ es positiva, este es un número real positivo, y además la forma sesquilineal es definida positiva. En particular vale la desigualdad de Cauchy-Schwarz, con la misma demostración que se da en $\mathbb{R}^n$,

$$|\langle x, y\rangle_\varphi| \leq \|x\|_\varphi \|y\|_\varphi.$$

Un detalle importante que usaremos en un momento es el siguiente: si tenemos una forma bilineal simétrica β, definida positiva, entonces

$$|\beta(x, y)| = \|x\|_\beta \|y\|_\beta$$

sólo puede ocurrir si $x = \lambda y$, con $\lambda \in \mathbb{C}$. Consideremos el espacio

$$\mathcal{N}_\varphi = \{x \in \mathcal{A} : \|x\|_\varphi = 0\} \subset \mathcal{A}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, si $x \in \mathcal{N}_\varphi$, entonces $yx, xy \in \mathcal{N}_\varphi$ para todo $y \in \mathcal{A}$, es decir, $\mathcal{N}_\varphi$ es un ideal bilátero (propio pues $a \notin \mathcal{N}_\varphi$). Luego, si $\mathcal{A}_\varphi = \mathcal{A}/\mathcal{N}_\varphi$ es el espacio cociente, la forma bilineal $\langle , \rangle_\varphi : \mathcal{A}_\varphi \times \mathcal{A}_\varphi \to \mathbb{C}$ es no degenerada. El espacio $\mathcal{A}_\varphi$ es un espacio vectorial con producto interno, si llamamos $\mathcal{H}_\varphi$ a su completación con respecto a la norma $\|\cdot\|_\varphi$, se deduce que $\mathcal{H}_\varphi$ es un espacio de Hilbert.

Observemos que la aplicación $\pi_a : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$ dada por $x \mapsto L_x$, donde $L_x \cdot \eta = x\eta$ para $\eta \in \mathcal{H}_\varphi$, es una *representación* del álgebra $\mathcal{A}$. Es decir

$$\pi_a(x + y) = \pi_a(x) + \pi_a(y), \qquad \pi_a(xy) = \pi_a(x)\pi_a(y)$$

para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Además es una $*$ *representación*, en el sentido que

$$\pi_a(x^*) = (\pi_a(x))^*$$

para todo $x \in \mathcal{A}$. Esta última propiedad no es tan evidente pero se deduce así

$$\langle \pi_a(x^*)\eta, \xi\rangle_\varphi = \varphi(\xi^* x^* \eta) = \varphi((x\xi)^*\eta) = \langle \eta, x\xi\rangle_\varphi = \langle \eta, \pi_a(x)\xi\rangle_\varphi.$$

Por ser π_a un $*$-morfismo, se tiene $\|\pi_a(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{A}$, y además $\pi_a(a) = L_a$ verifica

$$\|L_a \cdot 1\|^2 = \varphi(a^*a) > 0$$

con lo cual la representación *es fiel*.

Supongamos ahora que φ es normizante para a^*a. Como

$$\|a\|_\varphi = \sqrt{\varphi(a^*a)} = \sqrt{\|a\|^2} = \|a\|$$

la representación preserva la norma de a como *vector* de $\mathcal{H}_\varphi$. Pero además, si pensamos en el operador $L_a = \pi_a(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$, entonces

$$\|L_a \cdot 1\|^2 = \varphi(a^*a) = \|a\|^2,$$

con lo cual $\|L_a\| = \|a\|$.

Observación B.3.15. Si elegimos al estado φ puro, la representación π_φ es *irreducible*. Siempre se puede encontrar un estado puro normizante para $a \in \mathcal{A}$ normal.

Observación B.3.16. Como para cada $a \in \mathcal{A}$ se puede producir un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y una representación $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que preserva la norma de a, podemos considerar la suma directa de las representaciones

$$\oplus_{a\in\mathcal{A}}\pi_a : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\oplus_{a\in\mathcal{A}}\mathcal{H}_a)$$

que resulta ser fiel. De esta manera $\mathcal{A}$ se representa como un álgebra de operadores en un espacio de Hilbert.

B.3.6.1. Vectores normizantes

Si $a \geq 0$, podemos tomar un estado tal que $\varphi(a) = \|a\|$. Repitiendo la construcción de arriba, tenemos que

Lema B.3.17. *Si $a \geq 0$, existe $\xi \in \mathcal{H}_\varphi$ de norma unitaria tal que $L_a \cdot \xi = \|a\|\xi$.*

Demostración. Tomamos como ξ la clase de 1 en $\mathcal{H}_\varphi$, que resulta ser un vector de norma unitaria en $\mathcal{H}_\varphi$ pues $\|1\|_\varphi = \varphi(1) = 1$. Para cualquier vector ξ de norma unitaria se tiene, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que

$$\langle L_a \cdot \xi, \xi\rangle_\varphi \leq \|L_a\| = \|\pi_a(a)\| \leq \|a\|.$$

Pero para esta elección particular de ξ se tiene

$$\langle L_a \cdot \xi, \xi\rangle_\varphi = \varphi(\xi^* a \xi) = \varphi(a) = \|a\|.$$

Al valer la igualdad en C-S, debe ser $L_a\xi = \lambda\xi$, luego

$$\lambda\|\xi\|^2 = \langle\lambda\xi, \xi\rangle_\varphi = \langle L_a \cdot \xi, \xi\rangle_\varphi = \|a\|$$

lo que prueba que $\lambda = \|a\|$. □

B.4. Descomposición polar

Nuevamente $\mathcal{A}$ es un álgebra C*. Representando el álgebra $\mathcal{A}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, recordemos que $\ker(b) = \operatorname{ran}(b^*)^\perp$ y que $\overline{\operatorname{ran}(b^*)} = \ker(b)^\perp$ para todo $b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dado $a \in \mathcal{A}$, podemos considerar el cálculo funcional

$$|a| := \sqrt{a^* a},$$

que tiene sentido siempre pues $a^* a \geq 0$. Luego $|a| \geq 0$, además $|a| = 0$ implica que $a = 0$ pues la raíz cuadrada es inyectiva en positivos y $a^* a = 0$ implica que $\sigma(a) = 0$ y como $a^* a$ es autoadjunto, $\|a\| = r(a) = 0$. Sin embargo,

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

es *falso* (ver el Ejercicio B.IX).

Tomemos $\nu \in \mathcal{H}$. Entonces

$$\|a\nu\|^2 = \langle a\nu, a\nu\rangle = \langle a^* a\nu, \nu\rangle = \langle |a|^2\nu, \nu\rangle = \langle |a|\nu, |a|\nu\rangle = \| |a|\nu\|^2,$$

de donde se deduce que $\ker(a) = \ker(|a|)$. Definimos $u : \operatorname{ran}(|a|) \to \operatorname{ran}(a)$ como

$$u|a|\eta := a\eta$$

para $|a|\eta \in \operatorname{ran}|a|$. Esta es una buena definición pues si $|a|\eta = |a|\xi$ entonces $\eta - \xi \in \ker(|a|) = \ker(a)$. Extendemos a u como cero en $\operatorname{ran}(|a|)^\perp = \ker(|a|)$, luego $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Se tiene

$$\begin{aligned} \|u|a|\eta\|^2 &= \|a\eta\|^2 = \langle a\eta, a\eta\rangle = \langle a^* a\eta, \eta\rangle \\ &= \langle |a|^2\eta, \eta\rangle = \langle |a| \cdot |a|\eta, \eta\rangle = \||a|\eta\|^2 \end{aligned}$$

pues $|a|$ es autoadjunto. Luego $\|u\xi\| = \|\xi\|$ para $\xi \in \operatorname{ran}|a|$, mientras que $u = 0$ en el complemento ortogonal. Extendemos a u para que sea una isometría de las clausuras de los respectivos rangos,

$$\overline{\operatorname{ran}(|a|)} \to \overline{\operatorname{ran}(a)}$$

para obtener un operador acotado en $\mathcal{H} = \ker|a| \oplus \overline{\operatorname{ran}|a|}$. Un operador con estas propiedades se conoce como *isometría parcial*. Equivalentemente, $uu^*u = u$, o bien uu^* es un proyector, o bien u^*u es un proyector (en ese caso el otro también lo es). Algunas propiedades:

- Todo proyector es una isometría parcial.
- u^*u se denomina *proyector inicial* de u.
- uu^* se denomina *proyector final* de u.

B.4.1. Descomposición polar

Observemos que, escribiendo cualquier $\nu \in \mathcal{H}$ como $\nu = \xi + \psi \in \overline{\mathrm{ran}|a|} \oplus \ker|a|$, se tiene

$$u|a|\nu = u|a|\xi + u|a|\psi = u|a|\xi = a\xi = a\xi + a\psi = a\nu.$$

Es decir, $a = u|a|$. Esta fórmula se conoce como *descomposición polar de* a. Dado un subespacio $S \subset \mathcal{H}$, la notación P_S indica el único proyector ortogonal a (la clausura de) el subespacio S. Dejamos como ejercicio (B.x) algunos hechos de demostración sencilla.

B.5. Problemas

B.I. Probar la afirmación de la Observación B.2.4.

B.II. Probar que todo homomorfismo es automáticamente continuo.

B.III. Probar todos los detalles del Teorema B.3.7 sobre cálculo funcional continuo.

B.IV. Probar mediante un ejemplo en $M_2(\mathbb{R})$ que $f(t) = t^2$ no es monótona de operadores.

B.V. Probar que $f(t) = t^s$ es monótona de operadores para $s \in [0,1]$. Sugerencia: use que $g(t) = \sqrt{t}$ es monótona de operadores y un argumento con los numeros diádicos.

B.VI. Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ es un estado, probar la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\varphi(a^*b)| \leq \varphi(a^*a)^{1/2}\varphi(b^*b)^{1/2} \qquad \forall\, a, b \in \mathcal{A}.$$

B.VII. Probar que si el estado φ es puro, entonces la representación GNS inducida por φ es irreducible.

B.VIII. * Probar que para todo $a \in \mathcal{A}$, existe un estado puro normizante para a.

B.IX. Consideramos $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$, y las matrices

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Probar que $|a+b|$ no es $\leq$ que $|a| + |b|$.

B.X. Sea $a \in \mathcal{A}$ una C*-álgebra. Si $a = u|a|$ es la descomposición polar de a, entonces

- $u^*u = P_{\mathrm{ran}|a|}$ mientras que $uu^* = P_{\mathrm{ran}(a)}$.
- En general $|a|u \neq u|a|$.
- Empezando con a^* se tiene $a = |a^*|v$ donde v es otra isometría parcial.

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 364

- Si a es normal, entonces $|a| = |a^*|$, $u = v$ y $|a|$ conmuta con u.
- Podemos siempre extender u a un operador unitario sin perder la propiedad $a = u|a|$.
- Si $a = a^*$, además se tiene que $u^* = u$, es decir que u es una *simetría*. Observemos que $\sigma(u) \subset \{-1, 1\}$.
- Si $a = -a^*$, se tiene que $u^* = -u$, con lo cual $\sigma(u) \subset \{-i, i\}$.

Apéndice C

Álgebras de von Neumann

Extendemos en esta sección el cálculo funcional para operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, considerando funciones Borelianas en la recta. Recordemos que un álgebra de von Neumann es un álgebra C^* que es además cerrada en la topología fuerte (convergencia puntual) de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

C.1. Cálculo funcional Boreliano

Dado $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, sea $W^*(a)$ el álgebra de von Neumann generada por a y a^*, que es la clausura fuerte del álgebra C^* generada por a. Resulta un álgebra abeliana si a es normal.

En este capítulo, denotaremos con $\mathcal{B}or(X)$ a las funciones Borelianas y acotadas en el espacio X.

C.1.1. Teorema espectral

Si a es normal, dado $\xi \in \mathcal{H}$, y una función $f \in C(\sigma(a))$, podemos tomar la funcional lineal

$$f \mapsto \langle f(a)\xi, \xi\rangle$$

que resulta ser un elemento del dual de $C(\sigma(a))$. Por el teorema de Riesz-Markov (ver por ejemplo [80, Teorema IV.14]), existe una única medida μ_ξ en $\sigma(a)$ tal que

$$\langle \xi, f(a)\xi\rangle = \int_{\sigma(a)} f(t)d\mu_\xi(t).$$

Esta medida se llama *medida espectral asociada al vector* ξ. Dada una función $g \in \mathcal{B}or(\mathbb{C})$, ponemos

$$Q_g(\xi) = \int_{\sigma(a)} g(t)d\mu_\xi(t)$$

Supongamos que $f_n, f \in \mathcal{B}or(\mathbb{C})$, y que $f_n(x) \to f(x)$ puntualmente y $\|f_n\|_\infty$ es un conjunto acotado. Entonces

$$Q_{f_n}(\xi) - Q_f(\xi) = \langle \xi, [f_n(a) - f(a)]\xi \rangle = \int_{\sigma(a)} [f_n(t) - f(t)] d\mu_\xi(t) \to 0$$

por convergencia dominada. Supongamos que las $f_n \in C(\sigma(a))$, entonces acabamos de probar que

$$Q_f(\xi) = \lim_n \langle \xi, f_n(a)\xi \rangle.$$

Luego $Q_f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ es una forma cuadrática, y es fácil ver que proviene de una forma bilineal continua $\beta_f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ por polarización. Por el Teorema de Riesz, proviene de un operador acotado que llamaremos $f(a)$, que verifica

$$\langle \xi, f(a)\eta \rangle = \lim_n \langle \xi, f_n(a)\eta \rangle$$

para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, lo que nos dice que $f_n(a) \to f(a)$ en la topología fuerte de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si $f \in C(\sigma(a))$ inicialmente, entonces ciertamente $f(a)$ coincide con la definición anterior. Se deduce de aquí, aproximando puntualmente cualquier función Boreliana acotada f por funciones continuas f_n en $\sigma(a)$, que $f(a) \in W^*(a)$. Recíprocamente, si $b \in W^*(a)$ entonces existe una sucesión de elementos $a_n \in C^*(a)$ tales que $a_n \to b$ en la topología fuerte. Por el teorema de Gelfand, hay una sucesión de funciones $f_n \in C(\sigma(a))$ tales que $a_n = f_n(a)$. Esta sucesión tiende puntualmente a una función $f \in \mathcal{B}or(\sigma(a))$, la cual extendemos por cero fuera. Se tiene por el resultado previo que $f(a) \in W^*(a)$, pero además por la unicidad del límite en cada $\xi \in \mathcal{H}$, debe ser $b = f(a)$. No es difícil chequear que la asignación $f \mapsto f(a)$ para f Boreliana y acotada, es en efecto un $*$-morfismo. Hemos probado el siguiente teorema.

Teorema C.1.1. *Sea $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal. Existe un único $*$-isomorfismo $\Phi : \mathcal{B}or(\sigma(a)) \to W^*(a)$ de manera que si $\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ denota la función identidad, entonces $\Phi(\mathrm{id}) = a$. Además*

- $\|\Phi(f)\| \leq \|f\|_\infty$.
- *Si $ab = ba$ entonces $\Phi(f)b = b\Phi(f)$.*
- *Si $f \geq 0$, entonces $\Phi(f) \geq 0$.*

Los tres ítems se deducen del cálculo funcional para funciones continuas, aproximando puntualmente a la funcion Boreliana acotada f.

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 367

C.1.2. Medida espectral

Dado a normal, consideramos el conjunto χ de funciones características de conjuntos medibles acotados en $\mathbb{R}$. Tenemos una asignación

$$\varepsilon : \chi \to W^*(a)$$

dada por $\varepsilon(\chi_I) = \chi_I(a)$. Como χ_I tiene su imagen en el $\{0,1\}$, $p_I = \varepsilon(\chi_I) \geq 0$. Como $\chi_I^2 = \chi_I$, entonces $p_I^2 = p_I$. Luego la función ε toma valores en los proyectores del álgebra. Con la convención de que $\varepsilon(\emptyset) = 0$, se tiene que

- Si $I \cap J$ tiene medida nula, entonces $p_I = \varepsilon(\chi_I)$ y $p_J = \varepsilon(\chi_J)$ son disjuntos en el sentido que $p_I p_J = p_J = p_I = 0$; en general $p_{I\cap J} = p_I p_J$.
- Si $\sigma(a) \subset I$ entonces $p_I = 1$.
- Si $I = \cup_n I_n$ e $I_k \cap I_j = \emptyset$, entonces $p_I = \sum_n p_{I_n}$ donde la convergencia es en la topología fuerte.

Una asignación de este tipo se conoce como *medida espectral*, o *medida a valores proyectores*. En este caso se trata de la *medida espectral de* a. Es usual también denotar $\varepsilon(A)$ en vez de $\varepsilon(\chi_A)$ para $A \subset \mathbb{R}$ acotado.

C.1.3. Descomposición polar en W^*-algebras

Si $a = u|a|$ es la descomposición polar de $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, aunque $|a|$ está en el álgebra $C^*(a)$ generada por a -por ser un cálculo funcional continuo-, no es cierto que la isometría parcial $u \in C^*(a)$. Sin embargo, tomemos para $x \geq 0$ la sucesión de funciones continuas

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/x & x \geq 1/n \\ n & x \leq 1/n \end{cases}$$

Observemos que f_n converge puntualmente a x^{-1}. Sea ε la medida espectral de $|a|$, pongamos

$$p_n = \varepsilon[0, 1/n], \qquad q_n = \varepsilon[1/n, \|a\|]$$

que son dos proyectores disjuntos tales que $p_n \to P_{ker|a|}$, $q_n \to P_{ran|a|}$ en la topología fuerte. Además, conmutan entre sí y conmutan con $|a|$.

Escribimos $|a|_{n-} = p_n|a|$, $|a|_{n+} = q_n|a|$ que son positivos que conmutan con $|a|$ y disjuntos entre sí, luego

$$|a| = (p_n + q_n)|a| = |a|_{n-} + |a|_{n+}.$$

En esta expresión, es sencillo calcular $f_n|a|$, se tiene

$$f_n|a| = \frac{1}{n}p_n + |a|_{n+}^{-1}.$$

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 368

Multiplicamos por $|a|$ para obtener $|a|f_n|a| = \frac{1}{n}|a|_{n-} + q_n$, ahora multiplicamos por u para obtener $af_n|a| = \frac{1}{n}u|a|_{n-} + uq_n$. Esta expresión converge en la topología fuerte a $0 + uP_{ran|a|} = u$. Luego u es límite fuerte de funciones Borelianas en a, con lo cual $u \in W^*(a)$, el álgebra de von Neumann generada por a. Con un argumento similar se prueba que $P_{ran|a|}$ y $P_{ker|a|} = P_{kera}$ están en $W^*(a)$.

Observación C.1.2. Notemos que si a es inversible, entonces $|a|$ es inversible con lo cual de $a = u|a|$ se deduce que

$$u = a|a|^{-1} \in C^*(a) \cap G_{(}\mathcal{A}),$$

luego $u \in \mathcal{U} \cap C^*(a)$ pues

$$uu^* = a|a|^{-1}|a|^{-1}a^* = a|a|^{-2}a^* = a(a^*a)^{-1}a^* = aa^{-1}(a^*)^{-1}a^* = 1$$

y $u^*u = |a|^{-1}a^*a|a|^{-1} = |a|^{-1}|a|^2|a|^{-1} = 1$.

C.2. Problemas

C.I. Probar el Teorema C.1.1 sobre cálculo funcional Boreliano.

C.II. Probar que si $a \in \mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann, entonces $P_{ran|a|}$ y $P_{ker|a|} = P_{kera}$ están en $W^*(a)$.

Apéndice **D**

Normas en Álgebras de Operadores

Discutiremos en este último apéndice nociones elementales de normas simétricas en álgebras de operadores. Comenzamos con el caso discreto, que se corresponde con los operadores compactos en un espacio de Hilbert. Obtendremos generalizaciones a operadores de las clásicas desigualdades de Hölder y Young, basadas en el cálculo de la traza de operadores compactos.

D.1. Ideales en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

A lo largo de esta sección $\mathcal{H}$ denotará un espacio de Hilbert complejo separable, de dimensión n donde $n \in \mathbb{N}$ ó $n = \infty$.

D.1.1. Descomposición en valores singulares

Dado un operador $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, consideramos su descomposición polar $a = u|a|$ donde $|a| = \sqrt{a^* a}$. Supongamos que b es un operador compacto (lo cual ocurre siempre si $n \neq \infty$). Si además $b^* = b$, entonces b es diagonalizable, en el siguiente sentido: existe una base ortonormal $\{e_k\}$ de $\mathcal{H}$ y una sucesión de numeros reales $\lambda_k(b)$ (que puede acumularse únicamente en $z = 0$) de manera que

$$b = \sum_k \lambda_k(b) \langle e_k, \cdot \rangle e_k$$

donde la suma es finita si $n \neq \infty$ e infinita y convergente en la topología uniforme de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ en el caso $n = \infty$. Una prueba de esto puede encontrarse en el libro de Reed-Simon [80, Teorema VI.17]. Los números λ_k son el espectro no nulo de b, y cada uno de ellos es un autovalor de b con multiplicidad geométrica finita. De hecho, de la expresión de arriba se deduce que

$$b e_k = \lambda_k(b) e_k.$$

La sucesión se acumula en cero si y sólo si es infinita si y sólo si $\operatorname{ran}(b) = \infty$ si y sólo si $\operatorname{ran}(b)$ no es cerrado.

Observación D.1.1. Los operadores compactos $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ forman una C*-algebra, por ser la clausura en norma unifome de los operadores de rango finito. Luego si a es compacto, entonces también $|a| = \sqrt{a^* a}$ es compacto.

Aplicando el resultado de expansión al operador $b = |a|$, como $\sigma(|a|) \subset [0, +\infty)$, podemos ordenar los autovalores de forma decreciente y escribir la expresión

$$|a| = \sum_k \lambda_k(|a|)\langle e_k, \cdot\rangle e_k. \tag{D.1}$$

Los números positivos $\mu_k(a) = \lambda_k(|a|)$ (ordenados de forma decreciente) se denominan *valores singulares del operador* a. Siendo que el espacio se descompone como

$$\mathcal{H} = \ker|a|^{\perp} \oplus \ker|a| = \overline{\operatorname{ran}|a|} \oplus \ker(a),$$

es conveniente pensar a la base $\{e_k\}$ ordenada en dos partes $\{e_k\} \cup \{e'_k\}$ donde los $\{e_k\}$ son una base de $\overline{\operatorname{ran}|a|}$ (y son los que efectivamente aparecen en la suma) y los $\{e'_k\}$ son una base de $\ker|a| = \ker(a)$ (y no aparecen en la suma). Multiplicando a izquierda (D.1) por la isometría parcial u de a, obtenemos la expresión

$$a = u|a| = \sum_k \mu_k(a)\langle e_k, \cdot\rangle u e_k.$$

Observemos que, como $u : \overline{\operatorname{ran}|a|} \to \overline{\operatorname{ran}(a)}$ es una isometría, la familia $\{f_k\}$ con $f_k = ue_k$ es en efecto una base ortonormal de $\overline{\operatorname{ran}(a)}$ y entonces

$$a = \sum_k \mu_k(a)\langle e_k, \cdot\rangle f_k. \tag{D.2}$$

Observación D.1.2. Los μ_k están únicamente determinados en el siguiente sentido: si $\{g_k\}$, $\{h_k\}$ son bases ortonormales de $\overline{\operatorname{ran}|a|}$ y $\overline{\operatorname{ran}(a)}$ respectivamente, y $s_k > 0$ es una sucesión decreciente tal que

$$a = \sum_k s_k\langle g_k, \cdot\rangle h_k,$$

entonces $s_k = \mu_k(a)$ para todo k. En efecto, como el adjunto de $\langle v, \cdot\rangle w$ es $\langle w, \cdot\rangle v$, entonces se tiene

$$a^* = \sum_j s_j\langle h_j, \cdot\rangle g_j,$$

luego

$$a^* a = \sum_{j,k} s_j s_k \langle h_j, h_k\rangle\langle g_j, \cdot\rangle g_k = \sum_k s_k^2\langle g_k, \cdot\rangle g_k,$$

lo que nos dice que los s_k^2 son los autovalores de $a^* a$, que están únicamente determinados.

Observación D.1.3. Tomando adjuntos en (D.2),

$$a^* = |a|u^* = \sum_k \mu_k(a)\langle f_k, \cdot\rangle e_k,$$

y como $\{e_k\}$ es una base ortonormal de

$$\overline{\operatorname{ran}|a|} = \ker|a|^\perp = \ker(a)^\perp = \overline{\operatorname{ran}(a^*)},$$

y $\{f_k\}$ es una base ortonormal de

$$\overline{\operatorname{ran}(a)} = \ker(a^*)^\perp = \ker|a^*|^\perp = \operatorname{ran}|a^*|,$$

entonces los $\mu_k(a)$ también son los números singulares de a^*. Es decir

$$\mu_k(a) = \mu_k(a^*)$$

para todo k.

D.1.1.1. Espacios de sucesiones

Denotemos al espacio de sucesiones de números complejos que tienden a cero con c^0, es decir

$$c^0 = \{\{x_n\} : \lim_n x_n = 0\}.$$

Dada una sucesión $x = \{x_n\} \in c^0$, consideramos la sucesión $x^\downarrow \in c^0$ decreciente de números positivos que se consigue reordenando los módulos $|x_n|$ de la sucesión original, contando multiplicidades. Sea $c^{(0)}$ el espacio de sucesiones de números complejos con finitos términos no nulos. Una norma $\phi : c^{(0)} \to \mathbb{R}_+$ se dice *simétrica* si ϕ es invariante por permutaciones y transformaciones $a_n \mapsto e^{i\theta_n} a_n$ de módulo uno. Esto es si

$$\phi(x) = \phi(|x|) = \phi(x^\downarrow)$$

para toda sucesión $x \in c^{(0)}$.

Diremos que una sucesión infinita x está en el *espacio maximal* s_ϕ de ϕ si

$$\phi(x) := \lim_{n\to\infty} \phi(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$$

existe y es finito. No es difícil ver que s_ϕ es un espacio vectorial, y que ϕ resulta una norma para s_ϕ, de aquí en más nos referiremos con s_ϕ a este espacio normado. Claramente $c^{(0)} \subset s_\phi$ para toda ϕ simétrica, definimos $s_\phi^{(0)} \subset s_\phi$ como la clausura en s_ϕ de $c^{(0)}$ y lo denominamos *espacio minimal* de ϕ. En el caso que $s_\phi = s_\phi^{(0)}$, diremos que ϕ es *regular*.

Observación D.1.4. Si consideramos, para $p \geq 1$, la función

$$\phi(x) = \|x\|_p = \left(\sum |x_n|^p\right)^{1/p}$$

es simétrica y regular. Los ideales s_ϕ son los usuales espacios ℓ_p. El caso $p = \infty$ se corresponde con la norma

$$\phi(x) = \|x\|_\infty = \max |x_n|,$$

que no es regular puesto que $s_\phi = \ell_\infty$, y la sucesión $x = (1, 1, 1, \dots)$ no es límite en ℓ_∞ de ninguna sucesión con finitos términos no nulos.

Un caso más interesante de norma simétrica no regular es el siguiente: para $p > 1$, consideramos la *norma de Calderón*

$$\phi_{p,w}(x) = \sup_n \{n^{-1+\frac{1}{p}} \sum_{j=1}^{n} x_j^\downarrow\}.$$

El espacio maximal asociado es $\ell_{p,w} = \{x : \sup_n n^{\frac{1}{p}} x_n^\downarrow < \infty\}$ conocido como *espacio ℓ_p-débil*. El espacio minimal es

$$s_\phi^{(0)} = \{x \in \ell_{p,w} : \lim_{n\to\infty} n^{1/p} x_n^\downarrow = 0.$$

Algunas propiedades útiles de estos espacios las resumimos en el siguiente teorema, cuya prueba puede hallarse en el libro de ideales de traza de B. Simon [85, Teorema 1.16].

Teorema D.1.5. *Sea ϕ una norma simétrica en $c^{(0)}$. Entonces,*

1. *Si $x_n \to 0$, entonces $\phi(x) = \phi(x^\downarrow)$.*
2. *Si $x_n, y_n \to 0$ y $\sum_{j=1}^n y^\downarrow \leq \sum_{j=1}^n x^\downarrow$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\phi(y) \leq \phi(x)$.*
3. *Si $\phi(1, 0, 0, \dots) = c$, entonces para todo $x \in s_\phi$ se tiene*

$$c\|x\|_\infty \leq \phi(x) \leq c\|x\|_1.$$

4. *Los espacios $s_\phi, s_\phi^{(0)}$ son completos.*
5. *Si $s_\phi = s_\psi$ como conjuntos, entonces ϕ y ψ son normas equivalentes.*
6. *Si ϕ no es equivalente a $\|\cdot\|_\infty$, entonces $s_\phi \subset c^0$.*

D.1.2. Ideales de operadores compactos

Comenzamos la sección con algunos resultados debidos a Calkin que caracterizan ideales biláteros de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Denotemos con $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ a los operadores compactos y con $\mathcal{B}(\mathcal{H})^0$ a los operadores de rango finito. Seguimos de cerca el libro de Simon [85].

Teorema D.1.6. *Sea $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un ideal bilátero, con $\mathcal{H}$ separable y complejo. Entonces*

1. *Si existe $a \in \mathcal{I}$ que es no compacto, entonces $\mathcal{I} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*
2. *Si $\mathcal{I}$ es propio entonces $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$.*
3. *Si a, b son compactos con $b \in \mathcal{I}$ y $\mu_k(a) \leq \mu_k(b)$ para todo k, entonces $a \in \mathcal{I}$.*
4. *$a \in \mathcal{I}$ si y sólo si $a^* \in \mathcal{I}$.*
5. *Si $\mathcal{I} \neq 0$ entonces $\mathcal{B}(\mathcal{H})^0 \subset \mathcal{I}$.*
6. *Si $\mathcal{I}$ es cerrado en la norma uniforme, entonces $\mathcal{I}$ es cero, es todo $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ o es el ideal de operadores compactos $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.*

Demostración. Si $a \in \mathcal{I}$ es no compacto, también lo es $|a| = u^*a$. Para $t > 0$, sea

$$P_t = \varepsilon[t, \infty)$$

donde ε es la medida espectral de $|a|$ (sección C.1.2). Observemos que $a_t = |a|P_t + (1 - P_t)$ es un operador acotado e inversible, pues tiene su espectro en $[t, \infty)$. Entonces, como $1 = a_t a_t^{-1}$, multiplicando por P_t a la derecha se tiene

$$P_t = a_t^{-1} a_t P_t = a_t^{-1} |a| P_t \in \mathcal{I}$$

para todo $t > 0$ por ser $\mathcal{I}$ un ideal bilátero. Por otra parte, existe $s > 0$ tal que P_s es infinito-dimensional, ya que en caso contrario $|a| = \lim_n |a| P_{1/n}$ en norma uniforme y $|a|$ resultaría compacto. Como $P_s \in \mathcal{I}$ es un proyector infinito-dimensional, existe una isometría $V : \mathcal{H} \to \operatorname{ran}(P_s)$, y entonces

$$1 = V^* P_s V \in \mathcal{I},$$

luego $\mathcal{I} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Se deduce de aquí que si $\mathcal{I}$ es un ideal propio, debe estar dentro de los operadores compactos. Sean $a = u|a|, b = v|b|$ compactos,

$$|a| = \sum_{i \in I} \mu_i(a) \langle e_i, \cdot \rangle e_i, \quad |b| = \sum_{j \in J} \mu_j(b) \langle f_j, \cdot \rangle f_j,$$

con $\{e_i\}$ una base de $\overline{\mathrm{ran}|a|}$ y $\{f_j\}$ una base de $\overline{\mathrm{ran}|b|}$. La hipótesis $\mu_k(a) \leq \mu_k(b)$ para todo k presupone que $\overline{\mathrm{ran}|a|}$ y $\overline{\mathrm{ran}|b|}$ tienen la misma dimensión, es decir $I = J$, luego existe una isometría $w : \overline{\mathrm{ran}|a|} \to \overline{\mathrm{ran}|b|}$ que se extiende (como cero en $\ker(a) = \mathrm{ran}|a|^{\perp}$) a una isometría parcial $w \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, podemos incluso suponer que $we_k = f_k$ para todo k. Luego

$$|b| = \sum_k \mu_k(b)\langle we_k, \cdot\rangle we_k,$$

y multiplicando por w^* se tiene

$$w^*|b| = \sum_k \mu_k(b)\langle we_k, \cdot\rangle e_k.$$

Por otra parte, en cada $\xi \in \mathcal{H}$ se verifica

$$\begin{aligned} w^*|b|w\xi &= \sum_k \mu_k(b)\langle we_k, w\xi\rangle e_k = \sum_k \mu_k(a)\langle w^*we_k, \xi\rangle e_k \\ &= \sum_k \mu_k(a)\langle e_k, \xi\rangle e_k, \end{aligned}$$

luego

$$w^*|b|w = \sum_k \mu_k(b)\langle e_k, \cdot\rangle e_k = \sum_k \langle e_k, \cdot\rangle \mu_k(b) e_k.$$

Consideramos el operador $c \in \mathcal{B}(\overline{\mathrm{ran}|a|})$ dado por

$$ce_k = \frac{\mu_k(a)}{\mu_k(b)} e_k,$$

que es una contracción, y lo extendemos al complemento ortogonal como cero, obteniéndose así una contracción $c \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces

$$cw^*|b|w = \sum_k \langle e_k, \cdot\rangle \mu_k(b) ce_k = \sum_k \langle e_k, \cdot\rangle \mu_k(a) e_k = |a|,$$

es decir $|a| = cw^*|b|w$. Si $b \in \mathcal{I}$ entonces $|b| = v^*b \in \mathcal{I}$ lo que prueba que $|a| \in \mathcal{I}$, y de allí $a = u|a| \in \mathcal{I}$. Como $\mu_k(a) = \mu_k(a^*)$ para todo k, se deduce del ítem previo que $a \in \mathcal{I}$ si y sólo si $a^* \in \mathcal{I}$. Si $\mathcal{I} \neq 0$, sea $a = u|a| \in \mathcal{I}$ con

$$|a| = \sum_{i \in I} \mu_i(a)\langle e_i, \cdot\rangle e_i,$$

y sea $\{e_i\}_{i\in I} \cup \{e_j\}_{j\in J}$ una base de $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{ran}|a|} \oplus \ker(a)$. Si $b = \langle e_s, \cdot\rangle e_l$ con $s, l \in J \cup I$, entonces $\mu_1(b) = 1$ y $\mu_k(b) = 0$ para todo $k > 1$. Multiplicando $|a|$ por un número positivo conveniente se tiene $\mu_k(b) \leq \mu_k(a)$ para todo k, luego $b \in \mathcal{I}$ por el ítem previo. Como todo operador de rango finito se escribe como combinación lineal finita de operadores elementales del tipo de b, se tiene que $\mathcal{B}(\mathcal{H})^0 \subset \mathcal{I}$. El último ítem es consecuencia trivial del item anterior y del hecho de que la clausura uniforme de $\mathcal{B}(\mathcal{H})^0$ es exactamente $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. □

Definición D.1.7. Fijemos una base ortonormal $\{e_k\}$ en $\mathcal{H}$. Dado un ideal *propio* $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, definimos $\mathfrak{s}(\mathcal{I})$ como el conjunto de todas las sucesiones $x \in c^0$ tales que al reordenarlas forman los valores singulares de algún operador $a \in \mathcal{I}$. Es decir

$$\mathfrak{s}(\mathcal{I}) = \{x \in c^0 : \sum x_k^{\downarrow} \langle e_k, \cdot \rangle e_k \in \mathcal{I}\}.$$

Recíprocamente, dado un espacio de sucesiones $s \subset c^0$, definimos $\mathfrak{J}(s)$ como la familia de operadores compactos con valores singulares en s, es decir si $\mu(a)$ denota la sucesión $\{\mu_k(a)\}$, entonces

$$\mathfrak{J}(s) = \{a \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \mu(a) \in s\}.$$

Diremos que $s \subset c^0$ es un *espacio de Calkin* si, dadas $x, y \in c^0$ con $y \in s$ y $x_n^{\downarrow} \leq y_n^{\downarrow}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implica $x \in s$.

Por el segundo y el sexto ítem del Teorema D.1.5, dada una norma $\phi : c^{(0)} \to \mathbb{R}_+$ simétrica, si ϕ no es equivalente a $\|\cdot\|_\infty$, entonces $s_\phi, s_\phi^{(0)}$ son espacios de Calkin.

Una norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con la propiedad

$$\|xyz\|_{\mathcal{I}} \leq \|x\| \|y\|_{\mathcal{I}} \|z\|$$

para todo $x, y, z \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice *simétrica*. En particular toda norma simétrica es unitariamente invariante, es decir

$$\|uyv\|_{\mathcal{I}} = \|y\|_{\mathcal{I}}$$

para todo $u, v \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$. Definimos

$$\mathcal{I} = \{a \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|a\|_{\mathcal{I}} < \infty\},$$

que resulta ser un ideal bilátero, que denominamos *ideal simétricamente normado*. Por el teorema de Calkin, este ideal es trivial, es todo o es un ideal propio de operadores compactos que contiene a todos los operadores de rango finito

$$\mathcal{B}(\mathcal{H})^0 \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

En este último caso, definimos

$$\mathcal{I}^{(0)} = \overline{\mathcal{B}(\mathcal{H})^0} \subset \mathcal{I},$$

donde la clausura está tomada con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$. Diremos que la norma es *regular* cuando $\mathcal{I}^{(0)} = \mathcal{I}$. Dada $\phi : c^{(0)} \to \mathbb{R}_+$ simétrica, definimos

$$I_\phi = \mathfrak{J}(s_\phi), \quad I_\phi^{(0)} = \mathfrak{J}(s_\phi^{(0)}).$$

Para $a \in I_\phi$, definimos $\|\cdot\|_\phi : \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ como

$$\|a\|_\phi = \phi(\mu(a)).$$

Recíprocamente, dada una norma simétrica $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definimos $\phi : c^{(0)} \to \mathbb{R}_+$ como

$$\phi_{\mathcal{I}}(x) = \| \sum x_k^{\downarrow} \langle e_k, \cdot \rangle e_k \|_{\mathcal{I}}.$$

El siguiente teorema condensa todas las propiedades que usaremos de los ideales simétricos normados y su relación con sucesiones de Calkin y normas simétricas en sucesiones. Su prueba puede encontrarse en [85, Teoremas 2.5-2.8].

Teorema D.1.8. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y separable, $\{e_k\}$ una base ortonormal, $\mathcal{I} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un ideal bilátero propio. Entonces*

1. *$\mathfrak{s}(\mathcal{I})$ es un espacio de Calkin y $\mathfrak{J}(\mathfrak{s}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$.*
2. *Si $s \subset c^0$ es un espacio de Calkin entonces $\mathfrak{J}(s)$ es un ideal bilátero y $\mathfrak{s}(\mathfrak{J}(s)) = s$.*
3. *Dada $\phi : c^{(0)} \to \mathbb{R}_+$ simétrica, la función $\|\cdot\|_\phi : I_\phi \to \mathbb{R}_+$ es una norma simétrica.*
4. *Los espacios $I_\phi = \mathfrak{J}(s_\phi)$, $I_\phi^{(0)} = \mathfrak{J}(s_\phi^{(0)})$ son completos con esta norma, y $I_\phi^{(0)}$ es la clausura en la norma $\|\cdot\|_\phi$ de los operadores de rango finito.*
5. *Para todo $a = u|a| \in I_\phi^{(0)}$, la descomposición*

$$a = \sum_k \mu_k(a) \langle e_k, \cdot \rangle u e_k$$

es convergente en la norma $\|\cdot\|_\phi$.

6. *Si $\mathcal{I}$ es simétricamente normado, y*

$$\phi_{\mathcal{I}}(x) = \| \sum x_k^{\downarrow} \langle e_k, \cdot \rangle e_k \|_{\mathcal{I}},$$

entonces ϕ es una norma simétrica en sucesiones, con

$$\mathfrak{s}(\mathcal{I}) \subset s_{\phi_{\mathcal{I}}}.$$

Si $\mathcal{I}$ era completo entonces $s_{\phi_{\mathcal{I}}}^{(0)} \subset \mathfrak{s}(\mathcal{I}) \subset s_{\phi_{\mathcal{I}}}$.

7. *Con la notación del ítem previo, se tiene $\|\cdot\|_{\phi_1} = \|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ sobre los operadores de rango finito y*

$$\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_{\phi_{\mathcal{I}}}.$$

Si $\mathcal{I}$ era completo entonces $\mathcal{I}_{\phi_{\mathcal{I}}}^{(0)} \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{I}_{\phi_{\mathcal{I}}}$.

8. *Desigualdad de Hölder: sean* ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 *normas simétricas en* $c^{(0)}$, *con la propiedad de que si* $x \in s_2, y \in s_3$, *entonces* $xy = (x_n y_n)_n$ *es una sucesión de* s_1 *y además*

$$\phi_1(xy) \leq \phi_2(x)\phi_3(y).$$

Entonces si $a \in \mathcal{I}_2$, $b \in \mathcal{I}_3$, *se tiene* $ab \in \mathcal{I}_1$ *y*

$$\|ab\|_{\phi_1} \leq \|a\|_{\phi_2}\|b\|_{\phi_3}.$$

Además si $a \in \mathcal{I}_2^{(0)}$ *o bien* $b \in \mathcal{I}_3^{(0)}$, *entonces* $ab \in \mathcal{I}_3^{(0)}$.

D.1.3. Operadores compactos de Schatten

Para $p \geq 1$, se definen los ideales p-Schatten, que denotaremos con $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ como

$$\mathcal{B}_p(\mathcal{H}) := \mathfrak{J}(\ell_p),$$

es decir son aquellos operadores compactos cuyos valores singulares están en la clase ℓ_p de sucesiones. Denotamos

$$\|a\|_p = \|s(a)\|_p = \sqrt[p]{\sum_k s_k(a)^p},$$

la norma $\|\cdot\|_p$ se conoce como *norma* p *de Schatten*. El espacio $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ se conoce como espacio de *operadores de traza* o espacio de *operadores nucleares*.

Fijada una base ortonormal $\{e_n\}$ del espacio $\mathcal{H}$, y para $a \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$, definimos la *traza* de a como

$$\mathrm{Tr}(a) := \sum_n \langle ae_n, e_n\rangle.$$

Veamos que esta cantidad es finita (de hecho, que la serie es absolutamente convergente) y no depende de la base elegida. Si

$$a = \sum_k s_k(a)\langle f_k, \cdot\rangle u f_k$$

es la descomposición en valores singulares de $a = u|a|$, con $\{f_k\} \cup \{f_k'\}$ base de

$$\mathcal{H} = \overline{\mathrm{ran}|a|} \oplus \ker(a),$$

podemos escribir, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$e_n = \sum_k \langle e_n, f_k\rangle f_k + \sum_k \langle e_n, f_k'\rangle f_k'.$$

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 378

Luego

$$ae_n = \sum_k \langle e_n, f_k\rangle u|a|f_k + \sum_k \langle e_n, f'_k\rangle u|a|f'_k = \sum_k \langle e_n, f_k\rangle s_k(a) u f_k + 0,$$

con lo cual

$$|\langle ae_n, e_n\rangle| \leq \sum_k s_k(a)|\langle e_n, f_k\rangle||\langle uf_k, e_n\rangle|.$$

Sumando sobre n y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se deduce que, como $\|f_k\| = \|uf_k\| = 1$,

$$\sum_n |\langle ae_n, e_n\rangle| \leq \sum_k s_k(a) \sum_n |\langle e_n, f_k\rangle||\langle uf_k, e_n\rangle| \leq \sum_k s_k(a) = \|a\|_1.$$

lo que prueba que la suma converge absolutamente, y además que

$$|\mathrm{Tr}(a)| \leq \|a\|_1.$$

Como la suma converge absolutamente, podemos intercambiar el orden de las sumas en

$$\begin{aligned}
\sum_n \langle ae_n, e_n\rangle &= \sum_n \sum_k s_k(a)\langle e_n, f_k\rangle\langle uf_k, e_n\rangle \\
&= \sum_k s_k(a) \sum_n \langle e_n, f_k\rangle\langle uf_k, e_n\rangle \\
&= \sum_k s_k(a) \left\langle uf_k, \sum_n \langle e_n, f_k\rangle e_n \right\rangle \\
&= \sum_k s_k(a)\langle uf_k, f_k\rangle,
\end{aligned}$$

lo que prueba que la traza no depende de la base ortonormal con la que comenzamos y que se puede calcular como

$$\mathrm{Tr}(a) = \sum_k s_k(a)\langle uf_k, f_k\rangle.$$

Se tiene entonces que Tr es una funcional lineal acotada en $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$, es decir $\mathrm{Tr} \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})'$. Entonces

$$\mathrm{Tr}(b) = \sum_k s_k(b)$$

para $b = u|b|$ compacto con

$$b = \sum_k s_k(b)\langle f_k, \cdot\rangle uf_k,$$

y $\mathrm{Tr}(b)$ es finita si y sólo si $b \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$.

Corolario D.1.9. *Sea $p \geq 1$. Si $a = u|a| \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, entonces $|a|^p \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ y podemos definir su norma $\|\cdot\|_p$ como*

$$\|a\|_p = (\mathrm{Tr}|a|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración. En primer lugar observemos que $a \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ si y sólo si $|a| = u^*a \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$. Luego, que si

$$|a| = \sum_k s_k(a)\langle f_k, \cdot\rangle f_k$$

es la descomposición en valores singulares de $|a|$, entonces

$$|a|^p = \sum_k s_k(a)^p \langle f_k, \cdot\rangle f_k$$

puesto que los proyectores $f_k \otimes f_k = \langle f_k, \cdot\rangle f_k$ son disjuntos. Como $\{s_k(a)^p\} \in \ell_1$, el operador $|a|^p$ tiene traza finita, es decir $|a|^p \in \mathcal{B}_1$. Por último

$$\mathrm{Tr}|a|^p = \sum_k s_k(a)^p = \|a\|_p^p.$$

□

D.1.4. Desigualdad de Hölder, dualidades, norma Frobenius

Por la desigualdad de Hölder para sucesiones y el último ítem del Teorema D.1.8, se tiene la desigualdad de Hölder para operadores compactos,

$$\|ab\|_1 \leq \|a\|_p \|b\|_q.$$

También aplicando ese resultado y usando la desigualdad clásica de Young para sucesiones, se tiene el siguiente corolario.

Corolario D.1.10 (Desigualdad de Young para operadores)**.** *Si $1/p + 1/q = 1/r + 1$, y $a \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H}), b \in \mathcal{B}_q(\mathcal{H})$, entonces $ab \in \mathcal{B}_r(\mathcal{H})$ y además*

$$\|ab\|_r \leq \|a\|_p \|b\|_q.$$

Por otra parte, si $a \in \mathcal{B}_1$ y b es sólo acotado

$$|\mathrm{Tr}(ab)| \leq \|ab\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|.$$

A partir de aquí no es difícil probar (Ejercicio D.1), usando las dualidades de espacios de sucesiones, que la traza realiza las siguientes dualidades: para $1 < p < \infty$ se tiene

$$\mathcal{B}_p(\mathcal{H})' = \mathcal{B}_q(\mathcal{H}), \quad \mathcal{K}(\mathcal{H})' = \mathcal{B}_1(\mathcal{H}), \quad \mathcal{B}_1(\mathcal{H})' = \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

En particular $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle a, b\rangle = \operatorname{Re}\operatorname{Tr}(ab^*) = 1/2[\operatorname{Tr}(ab^*) + \operatorname{Tr}(ba^*)],$$

denominado *espacio de operadores de Hilbert-Schmidt*. En dimensión finita la norma

$$\|a\|_2 = \operatorname{Tr}(a^*a)^{\frac{1}{2}}$$

que proviene del producto interno de la traza se suele denominar *norma Frobenius* para matrices.

D.1.5. El teorema de Lidskii y la ciclicidad de la traza

De prueba mucho más compleja, es el resultado de gran utilidad que dice que Tr es en efecto una traza:

$$\operatorname{Tr}(ab) = \operatorname{Tr}(ba)$$

para todo $a, b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, en el sentido que un lado es finito si y sólo si el otro lo es, y en ese caso los dos lados son iguales. Una prueba posible pasa por el hecho siguiente, también de difícil prueba [85, Teorema 3.7]: si $\lambda_k(a)$ son los valores no nulos del espectro de a contados con multiplicidad, entonces para $a \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ la serie de los λ_k es convergente y además

$$\operatorname{Tr}(a) = \sum_k \lambda_k(a).$$

De aquí se deduce la ciclicidad de la traza, pues $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$ y además cada autovalor no nulo tiene la misma multiplicidad si ab, ba son compactos.

D.2. Normas simétricas en álgebras C^*

Copiando la noción de norma simétrica en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, y dada una C^*-álgebra, consideramos una *norma simétrica* $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, esto es una norma (que posiblemente toma el valor $+\infty$ en elementos de $\mathcal{A}$) con la propiedad adicional siguiente: si

$$\mathcal{I} = \{a \in \mathcal{A} : \|a\|_{\mathcal{I}} < \infty\}$$

denota el conjunto de elementos con norma finita, entonces

$$\|xyz\|_{\mathcal{I}} \leq \|x\|\|y\|_{\mathcal{I}}\|z\|$$

para todo $x, z \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{I}$. Se deduce de aquí (Ejercicio D.11) que $\mathcal{I}$ es un ideal bilátero en $\mathcal{A}$, y que $\|x^*\|_{\mathcal{I}} = \|x\|_{\mathcal{I}}$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

D.2.1. Álgebras con traza finita

Un caso particular que nos concierne es el que sigue. Si τ es un estado de $\mathcal{A}$ con la propiedad adicional $\tau(ab) = \tau(ba)$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$, diremos que τ es una *traza finita* en $\mathcal{A}$. Si para $x \geq 0$ y no nulo se verifica $\tau(x) > 0$, diremos que la traza es *fiel*. Supondremos que τ está normalizado o equivalentemente que $\tau(1) = 1$. En presencia de una traza finita y fiel, podemos introducir análogos a las normas p de matrices de la siguiente manera: para $1 \leq p < \infty$ consideramos

$$\|x\|_p = \tau(|x|^p)^{1/p}$$

para $x \in \mathcal{A}$.

Observación D.2.1. Para todo $x \in \mathcal{A}$ y todo $p \geq 1$,

$$\|x\|_p \leq \|x\|.$$

En efecto, basta probar el resultado para $p = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$, y en ese caso

$$\|x\|_p^p = \tau(|x|^p) = \tau((|x|^{\frac{1}{n}})^k) \leq \|(|x|^{\frac{1}{n}})^k\| \leq \||x|^{\frac{1}{n}}\|^k,$$

y por otro lado como $0 \leq |x| \leq \|x\|$ y $\frac{1}{n} \in [0, 1]$, se tiene por el Teorema B.3.9

$$0 \leq |x|^{\frac{1}{n}} \leq \|x\|^{\frac{1}{n}}$$

de donde se sigue que $\||x|^{\frac{1}{n}}\| \leq \|x\|^{\frac{1}{n}}$, y así $\|x\|_p^p \leq \|x\|^p$.

Veamos ahora la *desigualdad de Hölder*. Como preliminar presentamos un teorema debido a Hadamard conocido como *teorema de las tres líneas*.

Teorema D.2.2. *Sea $f : S \to X$ una función continua y acotada, con $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1\}$ y X un espacio de Banach. Supongamos que f es analítica en S^0 y que para $y \in \mathbb{R}$ se verifica*

$$|f(iy)| \leq M_0, \qquad |f(1 + iy)| \leq M_1$$

para ciertas constantes $M_0, M_1 > 0$. Entonces para todo $z \in S$, se verifica

$$|f(z)| \leq M_0^{1-\mathrm{Re}\, z} M_1^{\mathrm{Re}\, z}.$$

Demostración. Dada $\varphi \in X'$, consideramos $g = \varphi \circ f$ que es una función continua y acotada en S, analítica en el sentido usual en S^0. Reemplazando f por $f(z)M_0^{1-z}M_1^z$, basta probar el caso $M_0 = M_1 = 1$, y aquí tenemos que probar que $|f(z)| \leq 1$ en la banda S; por el teorema de Hahn-Banach, basta probar que $|g(z)| \leq 1$ en la banda.

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 382

Si $g(z) \to 0$ cuando $z \to \infty$, entonces la conclusión se sigue del principio del módulo máximo usual para funciones de variable compleja. En caso contrario, consideramos

$$g_n(z) = g(z)e^{z^2/n}e^{-1/n},$$

y como g es acotada en S, se sigue que $g_n \to 0$ cuando $z \to \infty$ en la banda, luego $|g_n(z)| \leq 1$ para $z \in S$ pues $|g_n| \leq 1$ en el borde. Como esto vale para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene la conclusión tomando límite en n puesto que $e^{z^2/n}e^{-1/n} \to 1$ cuando $n \to \infty$. □

Teorema D.2.3 (Desigualdad de Hölder). *Si $a, b \in \mathcal{A}$, entonces*

$$\|ab\|_1 \leq \|a\|_p \|b\|_q$$

para $p \geq 1$ y $1/p + 1/q = 1$.

Demostración. Basta probar que $\|ab\|_1 \leq 1$ para $\|a\|_p = \|b\|_q = 1$. Suponemos $\mathcal{A}$ representada en un espacio de Hilbert. Consideramos la descomposición polar de a, b y ab, dada por $a = u|a|$, $b = v|b|$, $ab = w|ab|$. Luego

$$\|ab\|_1 = \tau|ab| = \tau(w^*ab) = \tau(w^*u|a|v|b|) = \tau(|a|v|b|w^*u).$$

Dado $\epsilon > 0$, sea $F_\epsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función entera dada por

$$F_\epsilon(z) = \tau([\epsilon + |a|^p]^z v[\epsilon + |b|^q]^{1-z} w^* u).$$

Si $z = x + iy$ con $0 \leq x \leq 1$ entonces

$$\begin{aligned} |F_\epsilon(z)| &\leq \|[\epsilon + |a|^p]^z v[\epsilon + |b|^q]^{1-z} w^* u\| \\ &\leq \|[\epsilon + |a|^p]^z\| \|\epsilon + |b|^q]^{1-z}\| \\ &= \|[\epsilon + |a|^p]^x\| \|[\epsilon + |b|^q]^{1-x}\| \end{aligned}$$

puesto que v, w^*, u son isometrías parciales, mientras que $(\epsilon + |a|^p) > 0$ luego $(\epsilon + |a|^p)^{iy}$ es unitario para $y \in \mathbb{R}$, y lo mismo vale para b. Recordemos que para $c \in \mathcal{A}_+$ se verifica $c \leq \|c\|$, luego si $s \in [0, 1]$ se tiene $c^s \leq \|c\|^s$ con lo cual

$$\|[\epsilon + |a|^p]^x\| \leq \|\epsilon + |a|^p\|^x \leq (\epsilon + \|a\|^p)^x \leq \epsilon + \|a\|^p$$

puesto que $\epsilon + \|a\|^p \geq \epsilon + \|a\|_p^p = \epsilon + 1 > 1$. Similarmente $\|[\epsilon + |b|^q]^{1-x}\| \leq \epsilon + \|b\|^q$, luego F_ϵ es acotada en $\mathrm{Re}\, z \in [0, 1]$. Por otra parte, para $y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} |F(iy)| &= |\tau([\epsilon + |a|^p]^{iy} v[\epsilon + |b|^q][\epsilon + |b|^q]^{-iy} w^* u)| \\ &\leq \epsilon \|[\epsilon + |a|^p]^{iy} v[\epsilon + |b|^q]^{-iy} w^* u\| \\ &\quad + |\tau(w^* u[\epsilon + |a|^p]^{iy} v[\epsilon + |b|^q]^{-iy} |b|^q)\| \\ &\leq \epsilon + \tau(|b|^q) = \epsilon + 1, \end{aligned}$$

puesto que todos los operadores involucrados salvo $|b|^q$ son unitarios o isometrías parciales (en el segundo término usamos $|\tau(c)| \leq \tau|c|$ para todo $c \in \mathcal{A}$, hecho que dejamos como ejercicio (D.III)). Con un cómputo similar, se tiene

$$|F_\epsilon(1+iy)| \leq \epsilon + 1,$$

luego por el teorema de las tres líneas de Hadamard (Teorema D.2.2) se sigue que

$$|F_\epsilon(z)| \leq (1+\epsilon)^z (1+\epsilon)^{1-z} = 1+\epsilon$$

para todo z tal que $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, y en particular

$$\|ab\|_1 = \lim_{\epsilon \to 0^+} F_\epsilon(1/p) \leq 1+\epsilon$$

lo que prueba que $\|ab\|_1 \leq 1$. □

Dejamos como ejercicio (D.V) la verificación de que, para $p \geq 1$, la norma p se trata en efecto de una norma en $\mathcal{A}$ (es decir que se verifica la *desigualdad de Minkowski*). La misma es consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder que acabamos de probar.

Las normas p *resultan normas simétricas*: si se tiene $x, y, z \in \mathcal{A}$, entonces por la desigualdad de Young (ejercicio D.IV),

$$\|xyz\|_p \leq \|x\|\|yz\|_p \leq \|x\|\|y\|_p\|z\|.$$

Una propiedad importante adicional de las normas p de una traza finita es que se comportan como las normas p de un espacio de medida finita, en el siguiente sentido.

Proposición D.2.4. *Si τ es una traza finita, entonces para todo $x \in \mathcal{A}$ y todo $\|x\| \geq \epsilon > 0$ se verifican:*

1. *Existe $e^2 = e^* = e \in W^*(x)$ tal que $|x|e \geq (\|x\| - \epsilon)e$.*
2. $\|x\| = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$.

Demostración. Podemos suponer que $\|x\| = 1$, sea $\mathcal{H}$ el espacio de Hilbert asociado a L, que es la representación GNS de $C^*(x)$ dada por la traza τ (Sección B.3.6). Esta representación es fiel y consideramos $W^*(x) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la clausura en la topología débil de $L_{C^*(x)} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Observemos que τ pasa a $L_{C^*(x)}$ de manera natural, pues $\tilde{\tau}(L_a) = \tau(a)$ está bien definido y da una traza fiel y finita. Por otra parte, dado $b = \omega - \lim_n b_n \in W^*(x)$ con $b_n \in C^*(x)$, extendemos la traza τ de la siguiente manera $\tau(b) = \lim_n \tau(b_n)$. Esta definición no depende de la sucesión b_n pues

$$\tau(b_n) = \tau(L_{b_n}[1][1]) = \langle L_{b_n}[1], [1]\rangle \to \langle L_b[1], [1]\rangle = \tau(b).$$

Sea $\varepsilon : [0,1] \to W^*(x)$ la medida espectral de $|x|$ (Sección C.1.3), definimos $e = \varepsilon[1-\epsilon, 1]$. Entonces $e \in W^*(x)$ es un proyector autoadjunto y además, como

$$\chi_{[1-\epsilon,1]} \mathrm{id}_{[0,1]} = \mathrm{id}_{[1-\epsilon,1]} \geq \chi_{[1-\epsilon,1]}(1-\epsilon),$$

por el tercer ítem del Teorema C.1.1 se sigue que

$$e|x| \geq (1-\epsilon)e.$$

Respecto de la segunda afirmación, por el resultado obtenido en la primera y la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\tau(e)(\|x\| - \epsilon) \leq \tau(|x|e) \leq \|x\|_p \|e\|_q = \|x\|_p \tau(e)^{\frac{1}{q}},$$

es decir

$$\tau(e)^{\frac{1}{p}}(\|x\| - \epsilon) \leq \|x\|_p.$$

Tomando límite superior para $p \to \infty$, se tiene

$$\|x\| - \epsilon \leq \limsup_{p\to\infty} \|x\|_p \leq \|x\|$$

por la Observación D.2.1, luego el límite superior coincide con $\|x\|$, y como lo mismo es cierto para el límite inferior, se sigue que existe el límite y coincide con $\|x\|$. □

Observación D.2.5. Usualmente estos espacios normados *no son completos* (salvo en el caso en el que $\mathcal{A}$ tiene dimensión finita). Por la desigualdad de Young, si $t \geq s \geq 1$, se tiene

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_s \leq \|x\|_t \leq \|x\|$$

luego si $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_s(\mathcal{A}, \tau)$ denota la completación de $\mathcal{A}$ con la norma s, se verifica

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{L}_t \subset \mathcal{L}_s \subset \mathcal{L}_1,$$

y no es difícil ver que la traza implementa las dualidades

$$\mathcal{L}_1' = \mathcal{A}, \qquad \mathcal{L}_q = \mathcal{L}_p'$$

para $p \geq 1$ y $1/p + 1/q = 1$. Estos espacios de Banach, que no son más álgebras, se denominan L_p *no conmutativos*, y en general se considera a un álgebra finita como el análogo no conmutativo de un espacio de medida finita, por eso se suelen denominar a estos *espacios de medidad no conmutativa*.

D.3. Problemas

D.I. Usando las dualidades de espacios de sucesiones, probar que la traza realiza las siguientes dualidades: para $1 < p < \infty$ se tiene

$$\mathcal{B}_p(\mathcal{H})' = \mathcal{B}_q(\mathcal{H}), \quad \mathcal{K}(\mathcal{H})' = \mathcal{B}_1(\mathcal{H}), \quad \mathcal{B}_1(\mathcal{H})' = \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

D.II. Si $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ es una norma simétrica en una C*-álgebra $\mathcal{A}$, probar que $\mathcal{I}$ es un ideal bilátero en $\mathcal{A}$, y que $\|x^*\|_{\mathcal{I}} = \|x\|_{\mathcal{I}}$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Sugerencia: probar primero que la norma es unitariamente invariante y luego considerar la descomposición polar de x.

D.III. Si τ es una traza finita en un álgebra C*, probar que para todo $x \in \mathcal{A}$, se verifica $|\tau(x)| \leq \tau|x|$.

D.IV. Probar la *desigualdad de Young*, $\|ab\|_r \leq \|a\|_p \|b\|_q$ para $p, q, r \geq 1$ tales que $1/p + 1/q = 1/r + 1$.

D.V. Probar la *desigualdad de Minkowski*

$$\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$$

para $p \geq 1$ y $a, b \in \mathcal{A}$ (ver el Ejercicio 1.III), con lo cual las normas p son en efecto normas en $\mathcal{A}$.

D.VI. Probar que para todo $x \in \mathcal{A}$ y todo $p \geq 1$ se verifican

- $\|x\|_1 = \max\{|\tau(xu)| : u \in W^*(x) \text{ isometría parcial}\}$,
- $\|x\|_q = \max\{|\tau(xy)| : y \in W^*(x), \|y\|_p \leq 1\}$,

donde como siempre $1/p + 1/q = 1$.

D.VII. Probar las afirmaciones de la Observación D.2.5.

Bibliografía

[1] A. A. Albert, B. Muckenhoupt. *On matrices of trace zeros*. Michigan Math. J. 4 (1957), 1–3.

[2] W. Ambrose, R. S. Palais, I. M. Singer. *Sprays*. An. Acad. Brasil. Ci. 32 (1960), 163–178.

[3] J. An, K.-H. Neeb. *An implicit function theorem for Banach spaces and some applications*. Math. Z. 262 (2009), no. 3, 627–643.

[4] E. Andruchow. *Short geodesics of unitaries in the* L^2 *metric*. Canad. Math. Bull. 48 (2005), no. 3, 340–354.

[5] E. Andruchow, E. Chiumiento, G. Larotonda. *Homogeneous manifolds from noncommutative measure spaces*. J. Math. Anal. Appl. 365, (2010), no. 2, 541–558.

[6] E. Andruchow, G. Corach, D. Stojanoff. *Geometry of oblique projections*. Studia Math. 137 (1999), no. 1, 61–79.

[7] E. Andruchow, G. Larotonda. *Hopf-Rinow theorem in the Sato Grassmannian*. J. Funct. Anal. 255 (2008), no. 7, 1692–1712.

[8] E. Andruchow, G. Larotonda, L. Recht. *Finsler geometry and actions of the p-Schatten unitary groups*. Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), 319-344.

[9] E. Andruchow, G. Larotonda, L. Recht. A. Varela. *The left invariant metric on the general linear group*. Preprint (2011) arXiv:1109.0520v1 [math.DG].

[10] E. Andruchow, D. Stojanoff. *Geometry of unitary orbits*. J. Operator Theory 26 (1991), no. 1, 25–41.

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 388

[11] J. Antezana, G. Larotonda, A. Varela. *Optimal paths for symmetric actions in the unitary group*. Preprint (2011) arXiv:1107.2439v1 [math.DG].

[12] T. M. Apostol. MATHEMATICAL ANALYSIS. Second edition. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1974.

[13] V. I. Arnol'd. MATHEMATICAL METHODS OF CLASSICAL MECHANICS. Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 60. Springer-Verlag, New York, 1989.

[14] C. J. Atkin. *The Finsler geometry of groups of isometries of Hilbert space*. J. Austral. Math. Soc. Ser. A 42 (1987), no. 2, 196–222.

[15] C. J. Atkin. *The Finsler geometry of certain covering groups of operator groups*. Hokkaido Math. J. 18 (1989), no. 1, 45–77.

[16] D. Bao, S.-S Chern, Z. Shen. *An introduction to Riemann-Finsler geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 200. Springer-Verlag, New York, 2000.

[17] D. Beltiţă. SMOOTH HOMOGENEOUS STRUCTURES IN OPERATOR THEORY. Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 137. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.

[18] M. Berger. *Classification des espaces homogenes symetriques irreductibles*. C. R. Acad. Sci. Paris 240 (1955), 2370–2372.

[19] F. F. Bonsall, J. Duncan. NUMERICAL RANGES OF OPERATORS ON NORMED SPACES AND OF ELEMENTS OF NORMED ALGEBRAS. London Mathematical Society Lecture Note Series, 2 Cambridge University Press, London-New York, 1971.

[20] N. Bourbaki. LIE GROUPS AND LIE ALGEBRAS. CHAPTERS 7–9. Translated from the 1975 and 1982 French originals by Andrew Pressley. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[21] A. Brown, C. Pearcy. STRUCTURE OF COMMUTATORS OF OPERATORS. Ann. of Math. (2) 82 (1965), 112–127.

[22] M. P. do Carmo. GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES. Alianza Universidad Textos, 1990.

[23] E. Cartan. LEÇONS SUR LA GÉOMÉTRIE DES ESPACES DE RIEMANN. (French) [Lessons on the geometry of Riemann spaces] Reprint of the second (1946) edition. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics] Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1988.

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 389

[24] E. Cartan. *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann.* (French) Bull. Soc. Math. France 54 (1926), 214–264.

[25] E. Cartan. *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. II.* (French) Bull. Soc. Math. France 55 (1927), 114–134.

[26] K. Y. Chung. *Subspaces and graphs.* Proc. Amer. Math. Soc. 119 (1993), no. 1, 141–146.

[27] S. Cohn-Vossen. *Existenz kürzester Wege.* (English) C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, n. Ser. 1935, No.3, 339–342 (1935).

[28] G. Corach, A. Maestripieri. *Geometry of positive operators and Uhlmann's approach to the geometric phase.* Rep. Math. Phys. 47 (2001), no. 2, 287–299.

[29] G. Corach, A. Maestripieri, D. Stojanoff. *Orbits of positive operators from a differentiable viewpoint.* Positivity 8 (2004), no. 1, 31–48.

[30] G. Corach, H. Porta, L. Recht. *The geometry of spaces of projections in C^*-algebras.* Adv. Math. 101 (1993), no. 1, 59–77.

[31] G. Corach, H. Porta, L. Recht. *The geometry of the space of selfadjoint invertible elements in a C^*-algebra.* Integral Equations Operator Theory 16 (1993), no. 3, 333–359.

[32] K. R. Davidson. C^*-ALGEBRAS BY EXAMPLE. Fields Institute Monographs, 6. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[33] C. Davis. *The Toeplitz-Hausdorff theorem explained.* Canad. Math. Bull. 14 (1971), 245–246.

[34] C. T. J. Dodson, G.N. Galanis, E. Vassiliou. *Isomorphism classes for Banach vector bundle structures of second tangents.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 141 (2006), no. 3, 489–496.

[35] C. E. Durán, L.E. Mata-Lorenzo, L. Recht. *Metric geometry in homogeneous spaces of the unitary group of a C^*-algebra. I. Minimal curves.* Adv. Math. 184 (2004), no. 2, 342–366.

[36] C. E. Durán, L.E. Mata-Lorenzo, L. Recht. *Metric geometry in homogeneous spaces of the unitary group of a C^*-algebra. II. Geodesics joining fixed endpoints.* Integral Equations Operator Theory 53 (2005), no. 1, 33–50.

[37] E. B. Dynkin. *Calculation of the coefficients in the Campbell-Hausdorff formula.* (Russian) Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 57, (1947). 323–326.[1]

[1] Una traducción al inglés se halla en *Selected papers of E. B. Dynkin* with commentary. Edited by A. A. Yushkevich, G. M. Seitz and A. L. Onishchik. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Cambridge, MA, 2000

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 390

[38] P. Eberlein. *Structure of Manifolds of Nonpositive Curvature*. Global differential geometry and global analysis 1984 (Berlin, 1984), 86–153, Lecture Notes in Math., 1156, Springer, Berlin, 1985.

[39] W. T. van Est, T. J. Korthagen. *Non-enlargible Lie algebras*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 67 = Indag. Math. 26 1964 15–31.

[40] A. M. Gleason. *Groups without small subgroups*. Ann. of Math. 56 (1952), 193-212.

[41] H. Glöckner, K.-H. Neeb. *Banach-Lie quotients, enlargibility, and universal complexifications*. J. Reine Angew. Math. 560 (2003), 1–28.

[42] M. Gromov. METRIC STRUCTURES FOR RIEMANNIAN AND NON-RIEMANNIAN SPACES. Based on the 1981 French original. With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes. Translated from the French by Sean Michael Bates. Reprint of the 2001 English edition. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

[43] J. Hadamard. *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*. (French) Jorn. de Math. (5) 4 (1898), 27-73 .

[44] P. de la Harpe. CLASSICAL BANACH-LIE ALGEBRAS AND BANACH-LIE GROUPS OF OPERATORS IN HILBERT SPACE. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 285. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[45] L. A. Harris, W. Kaup. *Linear algebraic groups in infinite dimensions*. Illinois J. Math. 21 (1977), no. 3, 666–674.

[46] S. Helgason. DIFFERENTIAL GEOMETRY, LIE GROUPS, AND SYMMETRIC SPACES. Corrected reprint of the 1978 original. Graduate Studies in Mathematics, 34. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[47] K. H. Hofmann. THÉORIE DIRECTE DES GROUPES DE LIE. I. (French) Séminaire P. Dubreil (27e année: 1973/74), Algèbre, Fasc. 1, Exp. No. 1, 24 pp. Secrétariat Mathématique, Paris, 1975.

[48] J. P. Holmes. *Idempotents in differentiable semigroups*. J. Math. Anal. Appl. 162 (1991), no. 1, 255–267.

[49] J. P. Holmes. *The structure of the set of idempotents in a Banach algebra*. Illinois J. Math. 36 (1992), no. 1, 102–115.

[50] G. Hochschild. *The structure of Lie groups*. Holden-Day, Inc., San Francisco-London-Amsterdam 1965.

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 391

[51] H. Hopf, W. Rinow. *Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche*. (German) Comment. Math. Helv. 3 (1931), no. 1, 209–225.

[52] R. V. Kadison, J. R. Ringrose. FUNDAMENTALS OF THE THEORY OF OPERATOR ALGEBRAS. VOL. I. ELEMENTARY THEORY. Reprint of the 1983 original. Graduate Studies in Mathematics, 15. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[53] S. Kobayashi, K. Nomizu. FOUNDATIONS OF DIFFERENTIAL GEOMETRY. VOL. I. Reprint of the 1963 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.

[54] Z. V. Kovarik. *Manifolds of linear involutions*. Linear Algebra Appl. 24 (1979), 271–287.

[55] Z. V. Kovarik. Manifolds of frames of projectors. Linear Algebra Appl. 31 (1980), 151–158.

[56] Z. V. Kovarik, N. Sherif, Nagwa. Characterization of similarities between two n-frames of projectors. Linear Algebra Appl. 57 (1984), 57–69.

[57] Z. V. Kovarik, N. Sherif. Geodesics and near-geodesics in the manifolds of projector frames. Linear Algebra Appl. 99 (1988), 259–277.

[58] S. Lang. DIFFERENTIAL AND RIEMANNIAN MANIFOLDS. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 160. Springer-Verlag, New York, 1995.

[59] S. Lang. FUNDAMENTALS OF DIFFERENTIAL GEOMETRY. Graduate Texts in Mathematics, 191. Springer-Verlag, New York, 1999.

[60] A. R. Larotonda. NOTAS SOBRE VARIEDADES DIFERENCIABLES. Notas de Geometría y Topología, 1. Universidad Nacional del Sur, Instituto de Matemática, Bahía Blanca, 1980.

[61] O. Loos. SYMMETRIC SPACES. I: GENERAL THEORY. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[62] M. Martin, N. Salinas. *Differential geometry of generalized Grassmann manifolds in C*-algebras*. Operator theory and boundary eigenvalue problems (Vienna, 1993), 206–243, Oper. Theory Adv. Appl., 80, Birkhäuser, Basel, 1995.

[63] M. Martin, N. Salinas. The canonical complex structure of flag manifolds in a C*-algebra. Nonselfadjoint operator algebras, operator theory, and related topics, 173–187, Oper. Theory Adv. Appl., 104, Birkh¨auser, Basel, 1998.

[64] J. McAlpin. INFINITE DIMENSIONAL MANIFOLDS AND MORSE THEORY. Thesis, Columbia University, 1965 (unpublished).

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 392

[65] J. Milnor. MORSE THEORY. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51 Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.

[66] D. Montgomery, L. Zippin. *Small subgroups of finite-dimensional groups.* Ann. of Math. 56 (1952), 213-241.

[67] D. Montgomery, L. Zippin. TOPOLOGICAL TRANSFORMATION GROUPS. Reprint of the 1955 original. Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N.Y., 1974.

[68] G. A. Muñoz. COMPLEXIFICATIONS OF POLYNOMIALS AND MULTILINEAR MAPS ON REAL BANACH SPACES. Function spaces (Poznan, 1998), 389–406, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 213, Dekker, New York, 2000.

[69] J.R. Munkres. TOPOLOGY: A FIRST COURSE. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[70] F.D. Murnaghan. *On the field of values of a complex matrix.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 18 (1932), 246–248.

[71] B. Y. Levin. LECTURES ON ENTIRE FUNCTIONS. Translations of Mathematical Monographs Vol. 160, AMS Providence, Rhode Island, 1996.

[72] K.-H. Neeb. *A Cartan-Hadamard theorem for Banach-Finsler manifolds.* Proceedings of the Conference on Geometric and Combinatorial Group Theory, Part II (Haifa, 2000). Geom. Dedicata 95 (2002), 115–156.

[73] K.-H. Neeb. *Towards a Lie theory of locally convex groups.* Jpn. J. Math. 1 (2006), no. 2, 291–468.

[74] B. O'Neill. SEMI-RIEMANNIAN GEOMETRY. WITH APPLICATIONS TO RELATIVITY. Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983.

[75] M. K. Papadiamantis, Y. Sarantopoulos. *Radius of analyticity of a power series on real Banach spaces.* J. Math. Anal. Appl. 434 (2016), no. 2, 1281–1289.

[76] H. Porta, L. Recht. *Minimality of geodesics in Grassmann manifolds.* Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), no. 3, 464–466.

[77] C. R. Putnam, A. Wintner. *The connectedness of the orthogonal group in Hilbert space.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 37, (1951). 110–112.

[78] C. R. Putnam, A. Wintner. *The orthogonal group in Hilbert space.* Amer. J. Math. 74, (1952). 52–78.

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 393

[79] I. Raeburn. *The relationship between a commutative Banach algebra and its maximal ideal space*. J. Funct. Anal. 25 (1977), no. 4, 366–390.

[80] M. Reed, B. Simon. METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS. I. FUNCTIONAL ANALYSIS. Academic Press, New York-London, 1972.

[81] W. Rudin. FUNCTIONAL ANALYSIS. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1973.

[82] S. Sakai. C^*-ALGEBRAS AND W^*-ALGEBRAS. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 60. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971.

[83] T. Sakai. RIEMANNIAN GEOMETRY. Translated from the 1992 Japanese original by the author. Translations of Mathematical Monographs, 149. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[84] N. Salinas. *The Grassmann manifold of a C^*-algebra, and Hermitian holomorphic bundles*. Special classes of linear operators and other topics (Bucharest, 1986), 267–289, Oper. Theory Adv. Appl., 28, Birkhäuser, Basel, 1988.

[85] B. Simon. TRACE IDEALS AND THEIR APPLICATIONS. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 120. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[86] T. Tao. *Hilbert's fifth problem and related topics*. Graduate Studies in Mathematics, 153. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[87] H. Upmeier. SYMMETRIC BANACH MANIFOLDS AND JORDAN C^*-ALGEBRAS. North-Holland Mathematics Studies, 104. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 96. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.

[88] H. Weyl. THE CLASSICAL GROUPS. THEIR INVARIANTS AND REPRESENTATIONS. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1939.

[89] D. R. Wilkins. *Infinite-dimensional homogeneous manifolds*. Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A 94 (1994), no. 1, 105–118.

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 395

Índice alfabético

acción de un grupo, 97
álgebra
    C*, 347
    de Banach, 329
    de Lie-Banach, 64
        de un subgrupo, 82
    de operadores, 327
    de von Neumann, 365
atlas diferenciable, 35
automorfismo
    de la conexión, 185
    de la métrica, 308
    del spray, 185

Baker-Campbell-Hausdorff
    serie de, 75

cálculo de variaciones, 281
cálculo funcional, 112, 333, 348, 365
campo
    f-relacionado, 59
    invariante, 63
    vectorial, 49
campos de Jacobi, 178
    de la Grassmanniana, 230
    en el grupo lineal
        con el spray canónico, 222
    en la esfera, 216
    en operadores positivos, 226
    versus curvatura seccional, 320
    versus diferencial de exp, 180
Cartan
    descomposición de, 129
Cartan-Hadamard
    Teorema de, 269
conexión, 162
    afín, 166
    de Koszul, 165
cono positivo, 127
convexa
    bola Riemanniana, 303
    función de operadores, 356
convexidad geodésica, 315
coordenadas polares, 287
corchete de Lie, 54, 57
curva
    admisible, 281
    auto-paralela, 171
    densa en el toro, 60
curva densa en el toro, 82
curvatura, 176
    de la esfera, 216
    de la Grassmanniana, 230
    del grupo lineal, 222

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 398

seccional, 310
semi-negativa, 322
curvatura seccional
de la esfera, 312
de la Grassmanniana, 315
de los operadores positivos inversibles, 314
del grupo unitario, 313, 314
del spray métrico en el grupo lineal, 313
nula, 312
semi-negativa, 322
versus campos de Jacobi, 320

derivaciones, 54
derivada covariante, 165, 170
de la Grassmanniana, 229
del spray canónico
en el grupo lineal, 221
del spray métrico
del grupo lineal, 281
en operadores positivos, 225
derivada de Levi-Civita, 274
del grupo unitario, 280
del spray métrico del grupo lineal, 281
en la esfera, 216
en la Grassmanniana, 277
derivada de Lie, 57
descomposición de Cartan, 129
descomposición polar, 362, 367
desigualdad
de Hölder, 379
de Minkowski, 385
de Young, 385
diferencial
de orden superior, 7
de una función entre variedades, 42
primera, 5
diferencial de la exponencial
adjunta de la, 321
del grupo lineal, 71
en operadores positivos, 126
versus campos de Jacobi, 180
distancia rectificable, 237
Dynkin
fórmula de, 76

EMI en operadores positivos, 269
entorno normal, 161
esfera
campos de Jacobi en la, 216
como superficie de nivel, 48
corchete de Lie en la, 54
curvas cortas en la, 292
curvatura de la, 216
curvatura seccional de la, 312
derivada de Levi-Civita en la, 216
espacio simétrico, 219
exponencial de la, 216
fibrado TTS, 144
geodésicas en la, 216
radio de inyectividad, 292
spray en la, 216
transporte paralelo, 216
espacio de caracteres, 350
espacio de estados, 358
espacio de métrica interior, 241
espacio homogéneo, 97, 99
espacios de medida L_p no conmutativos, 384
espacios de sucesiones, 371
espectro, 330
exponencial
de la Grassmanniana, 229
de un grupo de Lie, 64
del spray, 160
diferencial de, 70
en la esfera, 216
en operadores positivos, 225
factorización, 71

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 399

naturalidad de la, 68

fórmulas variacionales, 283
fibrado TTM, 141
de una superficie de nivel, 146
del grupo unitario, 223
en la esfera, 144
en la Grassmanniana, 228
flip canónico, 148
fibrado vertical VTM y VTM*, 143
flip canónico, 148
Frobenius
Teorema de, 58
función
analítica, 16
cociente, 101
convexa de operadores, 356
de matrices, 112
monótona de operadores, 356
reglada, 10
funcional
energía, 250
longitud, 250
positiva, 358

Gauss
Lema de, 286
Gelfand
transformada de, 352
Gelfand-Naimark-Segal
representación de, 360
geodésicamente convexo, 315
geodésicas
corta, 244
de la Grassmanniana, 229
del grupo unitario, 280
del spray, 159
del spray canónico del grupo lineal, 220
del spray canónico en operadores positivos, 225
del spray métrico del grupo lineal, 279
en la esfera, 216
geodésicas cortas
en el grupo unitario, 293
con la norma uniforme, 297
métrica Frobenius, 294
norma simétrica, 298
en la esfera, 292
en la Grassmanniana, 299
existencia global
en dimensión finita, 300
no existencia en dimensión infinita, 301
Grassmanniana, 132
campos de Jacobi en la, 230
como superficie de nivel, 228
curvatura de la, 230
curvatura seccional de la, 315
de matrices, 116
derivada covariante en la, 229
derivada de Levi-Civita en la, 277
exponencial de la, 229
geodésicas de la, 229
spray métrico en la, 229, 277
transporte paralelo en la, 229
grupo
a un parámetro, 220
a un parámetro, 64
de inversibles de un álgebra, 109
de isometrías, 120
de Lie, 62
general lineal, 109, 112
lineal, 111
ortogonal, 114
simpléctico, 114
unitario, 113, 123, 124
grupo lineal, 109
campos de Jacobi del spray canónico, 222
curvatura

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 400

del spray canónico, 222
curvatura seccional
del spray métrico, 313
derivada covariante
del spray canónico, 221
del spray métrico, 281
derivada de Levi-Civita, 281
diferencial de la exponencial, 71
espectro, 110
estructura diferenciable, 332
geodésicas, 220
del spray métrico, 279
métrica invariante, 259
métrica Riemanniana invariante, 278
métricas cociente, 260
representaciones, 110
spray canónico, 220
spray métrico, 278
subgrupo algebraico del, 118
transporte paralelo
del spray canónico, 221
grupo unitario
como superficie de nivel, 223
curvatura seccional, 314
curvatura seccional del, 313
derivada de Levi-Civita en el, 280
fibrado TTM, 223
geodésicas, 280
geodésicas cortas
con la métrica uniforme, 297
métrica Frobenius, 294
métrica invariante, 298
geodésicas cortas en el, 293
radio de inyectividad del, 293
spray canónico, 223

Hopf-Rinow
Teorema de, 245

ideal de operadores compactos, 373
identidad de Jacobi, 54
integral
de una curva, 9
de una función reglada, 9
involución, 329
isometría, 306
isotropía, 98

Jacobi
campo de, 178
identidad de, 54
jets, 151

Killing
campo de, 185, 308

Lema
de Gauss, 286
levantada
canónica, 43
de un curva, 43
de una curva, 171
Lie-Trotter
fórmulas de, 74
logaritmos
de operadores unitarios, 125
longitud
de una curva rectificable, 238

métrica
de Finsler, 249, 251
acotada, 251, 255
débil, 251
fuerte, 251
invariante, 259
métrica invariante
en el grupo lineal, 259, 278
matrices
p-codiagonales, 117
p-diagonales, 117
positivas, 117
medida espectral, 367

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 401

naturalidad de la exponencial, 68
norma
    estrictamente convexa, 263
    Frobenius, 379
    rotunda, 263
    simétrica, 375
    unitariamente invariante, 375
      en operadores positivos, 261

operador
    bilineal, 8
    cuadrático, 8
    de Schatten, 377
    Hermitiano, 121
    lineal, 3
    normal, 347
    p-codiagonal, 117
    p-diagonal, 117
    positivo, 126, 355
    unitario, 123
operadores positivos, 117
    campos de Jacobi en, 226
    curvatura seccional, 314
    derivada covariante, 225
    exponencial en los, 225
    geodésicas, 225
    métricas simétricas, 261
    propiedad expansiva de la
        exponencial, 262
    spray canónico en, 224
    transporte paralelo, 225
órbita, 101
    coadjunta, 130
      de un operador autoadjunto,
        131
      de un proyector, 132
    de similaridad, 131
orden de una función entera, 72

polinomio
    de Taylor, 11
    homogéneo, 14
primera variación, 283
propiedad creciente de la métrica
    en operadores positivos, 269
propiedad expansiva de la métrica
    en variedades de Riemann, 320
proyector
    del fibrado doble tangente, 142
pull-back
    de un campo, 183
    derivada de, 183

radio de inyectividad
    de la esfera, 292
    del grupo unitario, 293
radio espectral, 347
radio numérico, 338
rango numérico, 338
reparametrización normal, 240
representación GNS, 357
representación adjunta, 67
representaciones
    L y R, 110

símbolos de Christoffel, 170
sección continua, 101
spray, 154, 158
    afín o cuadrático, 160
spray canónico, 168
    del grupo de inversibles, 220
    del grupo unitario, 223
    en operadores positivos, 224
spray métrico, 278
    de la Grassmanniana, 229, 277
    del grupo lineal, 278
subgrupo
    algebraico, 118
    analítico, 81, 85
    de Lie-Banach, 81, 85
subvariedad
    de un espacio de Banach, 48

Estructuras_v3 15 de agosto de 2026 13:22 Page 402

de una variedad diferenciable, 44
embebida, 45
partida, 45

tangente
espacio, 38
fibrado, 39
Taylor
fórmula, 11
tensor
de curvatura, 176
Teorema
de Ascoli, 245
de Banach-Shauder, 5
de Banach-Steinhaus, 5
de Cartan
en variedades de Finsler, 265
Riemanniano, 319
de Cartan-Hadamard, 323
de Frobenius, 58, 81, 82, 85, 87
de Gelfand, 350, 353
de Hahn-Banach, 4
de Hopf-Rinow, 291, 300
en espacios de métrica interior, 245
en variedades de Finsler, 256
variedad de Riemann, 302
de la función abierta, 5
de la función implícita, 24, 27
de la función inversa, 22
del gráfico cerrado, 5
del valor medio, 11
espectral, 366
topología
débil, 327
fuerte, 327
transformada de Gelfand, 352
transporte paralelo, 172
de la Grassmanniana, 229
del spray canónico del grupo lineal, 221
en la esfera, 216
en operadores positivos, 225
traza finita y fiel, 381

unitización, 329

valores singulares, 369
variedad
de Cartan-Hadamard, 270
de Finsler, 251
débil, 252
de dimensión finita, 252
fuerte, 252, 255
de Finsler con spray, 256
Riemanniana, 274
variedad Riemanniana
débil, 289
variedades localmente planas, 312
vector normizante, 361