TOPOLOGÍA
SEGUNDO CUATRIMESTRE 2026
SOLUCIONES DEL PRIMER EXAMEN PARCIAL

Ejercicio 1.

(a) Sean X un espacio topológico y $S, T \subset X$ dos subespacios. Pruebe que si $U \subset S \cap T$ es abierto (resp. cerrado) en tanto S como T, entonces es abierto (resp. cerrado) en $S \cup T$.

(b) Sean X un espacio topológico conexo, y $A \subseteq X$ un subespacio conexo. Sea $H \subseteq X \setminus A$ un subespacio abierto y cerrado en $X \setminus A$. Pruebe que $H \cup A$ es conexo.

Resolución. Probamos primero (a). Si U es abierto en tanto S como T, existen abiertos $V, W \subset X$ tales que $U = V \cap S = T \cap W$. Afirmamos que $U = (S \cup T) \cap (V \cap W)$ y por lo tanto es abierto en $S \cup T$. En efecto, como U está contenido en S lo está en $S \cup T$, y por otro lado está contenido en $V \cap W$ pues está contenido en tanto V como W. Recíprocamente,

$$(S \cup T) \cap (V \cap W) = (S \cap (V \cap W)) \cup (T \cap S \cap (V \cap W)) \subset (S \cap V) \cup (T \cap W) = U \cup U = U.$$

El caso de cerrados es análogo.

Esto conluye la prueba de (a); pasamos a (b). Supongamos que $H \cup A$ no es conexo, de forma que admite una desconexión $\{U, V\}$. Luego tanto $U \cap A$ como $V \cap A$ son abiertos y cerrados en A, cuya intersección es vacía y su unión todo A. Como A es conexo, sus únicos subespacios abiertos y cerrados son $\emptyset$ y A, por lo que sin pérdida de generalidad podemos asumir que $U \cap A = \emptyset$ y $A \subset V$. Luego $U \subset (H \cup A) \setminus A = H \setminus A$. Como U es abierto y cerrado en $H \setminus A$ y ese último es abierto y cerrado en $X \setminus A$, obtenemos que U es abierto y cerrado en X. El ítem anterior nos dice entonces que U es abierto y cerrado en

$$(X \setminus A) \cup (H \cup A) = X.$$

Como U es no vacío por pertenecer a una desconexión, debe ser $U = X$. Luego $V \subset A = \emptyset$ y $V = \emptyset$ lo cual es absurdo. La contradicción provino de suponer la existencia de una desconexión de $H \cup A$, probando así que este espacio es conexo. □

Ejercicio 2. Decimos que un espacio X tiene *dimensión menor o igual a* $n \in \mathbb{N}_0$ si para todo cubrimiento por abiertos $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ existe un refinamiento $(V_j)_{j \in J}$ de $\mathscr{U}$ tal que para cada $F \subset J$ de cardinal $n+2$ se tiene que $\bigcap_{j \in F} V_j = \emptyset$. Decimos que tiene *dimensión finita* si existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que X tiene dimensión menor o igual a n. Pruebe que si G es un grupo finito y X es un G-espacio de dimensión finita, entonces X/G tiene dimensión finita.

Resolución. Sea n tal que X tiene dimensión menor o igual a n y veamos que X/G tiene dimensión finita d para un $d = d(n)$ a elegir. Notemos $q : X \to X/G$ a la proyección al cociente. Consideremos un cubrimiento $\{V_i\}_{i \in I}$ en X/G. Luego si tomamos $U_i = q^{-1}(V_i)$ obtenemos un cubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ de X. Por hipótesis, existe entonces un refinamiento $\{W_j\}_{j \in J}$ cuyas intersecciones de cardinal $n+1$ son vacías.

Como q es sobreyectiva y abierta, por ser la proyección al cociente de por la acción de un grupo, se sigue que $\{q(W_j)\}_{j \in J}$ cubre a X/G por abiertos y más todavia que refina al cubrimiento original: dado $i \in I$, tenemos $W_j \subset q^{-1}(V_i)$ para algún j y proyectando tenemos $q(W_j) \subset V_i$.

Resta ver que si $d = d(n)$, que debe ser elegido sólo dependiendo de n y no del cubrimiento, es suficientemente grande, entonces la intersección de $d+2$ conjuntos del refinamiento es

vacía. Consideremos una tal intersección $q(W_{j_0}) \cap \cdots \cap q(W_{j_{d+1}})$. Como q es sobreyectiva, para ver que este espacio es vacío, resta ver que

$$q^{-1}(q(W_{j_0}) \cap \cdots \cap q(W_{j_{d+1}})) = q^{-1}q(W_{j_1}) \cap \cdots \cap q^{-1}q(W_{j_{d+1}}) = \left(\bigcup_{g \in G} gW_{j_1} \right) \cap \cdots \cap \left(\bigcup_{g \in G} gW_{j_{d+1}} \right).$$

es vacío. Distribuyendo, esta última intersección es

$$\bigcup_{g_0, \ldots, g_d \in G} g_0 W_{j_0} \cap \cdots \cap g_d W_{j_{d+1}}.$$

Por lo tanto, es suficiente probar que para d suficientemente grande, cada uniendo en la anterior expresión es vacío.

Si $d = |G|(n+2) - 2$, en cada intersección $g_0 W_{j_0} \cap \cdots \cap g_d W_{j_{d+1}}$ consideramos $|G|(n+2)$ elementos de $|G|$. Por principio del palomar, hay al menos $n+2$ de ellos repetidos: existe $\{i_0, \ldots, i_{n+1}\} \subset \{0, \ldots, d+1\}$ tal que $g_{i_0} = \cdots = g_{i_{n+1}} = g \in G$, y entonces

$$g_0 W_{j_0} \cap \cdots \cap g_d W_{j_d} \subset g_{i_0} W_{j_{i_0}} \cap \cdots \cap g_{i_n} W_{j_{i_n}} = g(W_{j_{i_0}} \cap \cdots \cap W_{j_{i_n}}) = g\emptyset = \emptyset.$$

Hemos visto así que X/G tiene dimensión menor o igual a $|G|(n+2)-2$ siempre que X tenga dimensión menor o igual a n. □

Ejercicio 3.

(a) Sea Y un espacio topológico localmente compacto Hausdorff (LCH). Pruebe que $F \subset Y$ es cerrado si y sólo si para todo $K \subset Y$ compacto se tiene que si $F \cap K$ es cerrado (en K).

(b) Pruebe que las siguientes afirmaciones sobre un espacio topológico X son equivalentes:

(I) existe una familia final $\{f_i : K_i \to X\}_{i \in I}$ con cada K_i compacto Hausdorff;

(II) existen un espacio LCH Y y una función cociente $p : Y \to X$.

Resolución. Probamos primero (a). Como en espacios Hausdorff los compactos son cerrados, sólo probamos que si $F \cap K$ es cerrado para cada compacto $K \subset Y$ entonces F es cerrado. Consideremos una red convergente $x_\alpha \to x$ con $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset F$. Por compacidad local de Y, existe un entorno de clausura compacta $U \ni x$. Como la red en cuestión converge, existe $\beta \in \Lambda$ de forma que $(x_\alpha)_{\alpha \geq \beta} \subset U$ y por lo tanto pertenece a $\overline{U} \cap F$. Como este último es cerrado por hipótesis, debe ser $x \in \overline{U} \cap F \subset F$. Esto muestra que F es cerrado por límites de redes; es decir, es cerrado.

Pasamos ahora a (b). Supongamos que existe una familia final como en (I). Cualquier familia de funciones continuas con codominio X que la contenga seguirá siendo final, así que agregando las inclusiones $\{x\} \hookrightarrow X$ para cada $x \in X$ de ser necesario, podemos suponer que $\bigcup_{i \in I} \operatorname{im}(f_i) = X$. Luego $(f_i)_{i \in I} : \bigcup_{i \in I} K_i \to X$ es cociente (ver Ej. 30 p.2) y el codominio es localmente compacto Hausdorff al ser un coproducto de espacios compacto Hausdorff.

Para la recíproca, podemos tomar $\{p|_K : K \to X\}_{K \subset Y \text{ compacto}}$, que es una familia de funciones continuas, y es final por hipótesis: como p es cociente $F \subset X$ es cerrado si y sólo si $p^{-1}(F)$ lo es en Y, y por (a) esto sucede si y sólo si $p^{-1}(F) \cap K = (p|_K)^{-1}(F)$ es cerrado para cada $K \subset X$ compacto. □

Ejercicio 4. Sea X un espacio topológico regular que admite una base numerable. Pruebe que X es normal.

Resolución. Sean F y G dos cerrados disjuntos. Como X es regular, para cada $x \in G \subset F^c$ hay un abierto $U \ni x$ tal que $\overline{U} \cap F = \emptyset$. Por lo tanto, tenemos un cubrimiento $\mathscr{U}$ de G por abiertos cuya clausura no interseca a F. Como X tiene una base numerable, lo mismo es cierto para G

y entonces de $\mathscr{U}$ podemos extraer un cubrimiento numerable $(U_n)_{n\geq 1}$ de G tal que $\overline{U_n}\cap F=\emptyset$. Del mismo modo tenemos un cubrimiento $(V_m)_{m\geq 1}$ de F tal que $\overline{V_m}\cap G=\emptyset$.

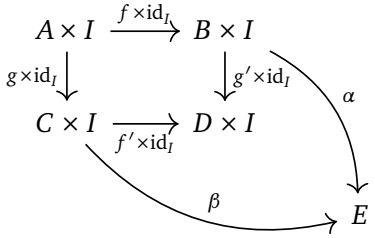
Consideramos ahora $U_n'=U_n\setminus(\overline{V_1}\cup\cdots\overline{V_n})$ y $V_m'=V_m\setminus(\overline{U_1}\cup\cdots\overline{U_m})$ y afirmamos que $U=\bigcup_{n\geq 1}U_n'$ y $V=\bigcup_{m\geq 1}V_m'$ son disjuntos y contiene a G y F respectivamente.

Si $x\in U\cap V$, existen $n,m\geq 1$ tales que $x\in U_n'\cap V_m'$. Si $n\geq m$, entonces $x\in U_n'\subset U_n\setminus V_m$ y al mismo tiempo $x\in V_m'\subset V_m$ lo cual no puede ocurrir. Esto muestra que $U\cap V=\emptyset$. El caso $m\geq n$ es análogo. Veamos para terminar que $U\supset G$; se seguirá de igual modo que $V\supset F$. Tomemos $x\in G$, de forma que existe $n\geq 1$ para el cual $x\in U_n$. Como $\overline{V_m}\cap G=\emptyset$ para todo m, efectivamente $x\in U_n'\subset U$. □

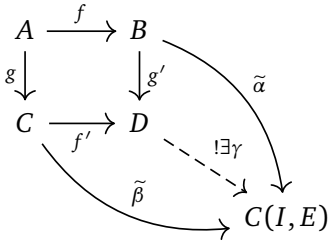
Ejercicio 5. Pruebe que si el diagrama de espacios topológicos de la izquierda es un pushout, entonces también lo es el diagrama de la derecha:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ C & \xrightarrow[f']{} & D \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A\times I & \xrightarrow{f\times \mathrm{id}_I} & B\times I \\ {\scriptstyle g\times \mathrm{id}_I}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'\times \mathrm{id}_I} \\ C\times I & \xrightarrow[f'\times \mathrm{id}_I]{} & D\times I \end{array}$$

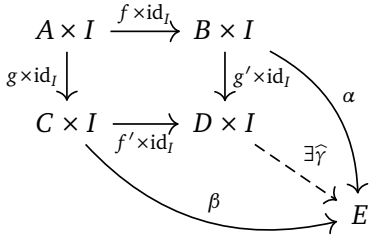
Idea de la resolución. Consideramos un diagrama conmutativo de la forma



Por ley exponencial se corresponde con uno como sigue, que, dado que el cuadrado en cuestión es pushout, se factoriza a través de la flecha punteada:



Aplicando la ley exponencial a la inversa conseguimos que conmute el siguiente diagrama:



La unicidad de $\widehat{\gamma}$ se sigue de la de γ. □