

Práctica 9: clasificación de revestimientos

- 1 Pruebe que los revestimientos son estables por cambio de base. En particular, si $p: E \rightarrow B$ es revestimiento y $A \subset B$, entonces $p|_{p^{-1}(A)}: p^{-1}(A) \rightarrow A$ es revestimiento.
- 2 Sea B un espacio conexo y localmente conexo, y sea $p: E \rightarrow B$ un revestimiento. Pruebe que si C es una componente conexa de E , entonces $p|_C: C \rightarrow B$ es un revestimiento.
- 3 Sean $p: X \rightarrow Y$ y $q: Y \rightarrow Z$ revestimientos. Pruebe que si $q^{-1}(z)$ es finito para cada $z \in Z$, entonces $qp: X \rightarrow Z$ es un revestimiento.
- 4 Sean X, Y y Z espacios arcoconexos y localmente arcoconexos y sean $q: X \rightarrow Y, r: Y \rightarrow Z$ funciones continuas. Pruebe que:
 - (a) si rq y r son revestimientos, también lo es q . Pruebe que q es normal si rq lo es;
 - (b) si rq y q son revestimientos, también lo es r ;
 - (c) si q y r son revestimientos y el espacio Z admite un revestimiento universal, entonces rq también es un revestimiento.
- 5 Pruebe que si $n > 1$, entonces toda función continua $S^n \rightarrow S^1$ es nullhomotópica.
- 6 Pruebe que toda función continua $\mathbb{R}P^2 \rightarrow S^1$ es nullhomotópica.
- 7 Exhíba una función $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ que no sea nullhomotópica.
- 8 Pruebe que si X es arcoconexo y localmente arcoconexo y $\pi_1(X)$ es finito, entonces toda función $X \rightarrow S^1$ es nullhomotópica.
- 9 Sea $p = (b_0, b_0) \in S^1 \times S^1$. Considerando el isomorfismo $\pi_1(S^1 \times S^1, b_0, b_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dado por las proyecciones $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$, describa los revestimientos de $S^1 \times S^1$ asociados a los subgrupos $\mathbb{Z} \times 0, \langle (1, 1) \rangle$ y $\langle (2, 0), (0, 2) \rangle$.
- 10 Pruebe que todo isomorfismo de $\pi_1(S^1 \times S^1, x_0)$ está inducido por algún homeomorfismo $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ que deja quieto a x_0 .
- 11 Pruebe que todo revestimiento conexo de $S^1 \times S^1$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2, S^1 \times \mathbb{R}$ o $S^1 \times S^1$.