

Práctica 7: fibraciones y revestimientos

- 1 Sean X, Y espacios topológicos. Pruebe que la proyección $p_X : X \times Y \rightarrow X$ es una fibración con fibra Y .
- 2 Sean $p : E \rightarrow B$ una fibración y $f_0, f_1 : X \times I \rightarrow E$ dos funciones continuas. Dadas homotopías $H : p \circ f_0 \simeq p \circ f_1$ y $G : f_0|_{X \times 0} \simeq f_1|_{X \times 0}$ tales que $H(x, 0, t) = p \circ G(x, 0, t)$, pruebe que existe un levantamiento $\tilde{H} : X \times I \times I \rightarrow E$ de H que es una homotopía entre f_0 y f_1 , y que es una extensión de G .
- 3 Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración.
 - (a) Para cada camino $\alpha : I \rightarrow B$, pruebe que existe $H : E_{\alpha(0)} \times I \rightarrow E$ tal que $H(x, 0) = x$ y $(p \circ H)(x, t) = \alpha(t)$ para todo $x \in E_{\alpha(0)}$, $t \in I$.
 - (b) Para cada camino $\alpha : I \rightarrow B$, fijamos una elección de H como en el ítem anterior y consideramos $L_\alpha : E_{\alpha(0)} \rightarrow E_{\alpha(1)}$ definida por $L_\alpha(x) = H(x, 1)$. Pruebe que:
 - (i) Si $\alpha \simeq \alpha'$ rel $\{0, 1\}$, entonces $L_\alpha \simeq L_{\alpha'}$.
 - (ii) Si $\alpha \simeq \text{cte}_b$ rel $\{0, 1\}$, entonces $L_\alpha \simeq \text{id}_{E_b}$.
 - (iii) Dados $\alpha, \alpha' : I \rightarrow B$ tales que $\alpha(1) = \alpha'(0)$, se tiene que $L_{\alpha * \alpha'} \simeq L_{\alpha'} \circ L_\alpha$.
 - (c) Concluya que si B es arcoconexo, entonces todas las fibras de p son homotópicamente equivalentes.
- 4 Sea $p : (E, e) \rightarrow (B, b)$ una fibración e $i : (E_b, e) \rightarrow (E, e)$ su fibra.
 - (a) Pruebe que la asignación que toma $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$, considera un levantado $\tilde{\gamma}$ de γ comenzando en e , y luego la componente arcoconexa de $\tilde{\gamma}(1)$, resulta una función bien definida $\partial : \pi_1(B, b) \rightarrow \pi_0(E_b)$.
 - (b) Pruebe que hay una sucesión exacta de la forma

$$\pi_1(E, e) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b) \xrightarrow{\partial} \pi_0(E_b) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B).$$
- 5 Pruebe que si $p : E \rightarrow B$ es un revestimiento, entonces p es abierta y por lo tanto es cociente.
- 6 Pruebe que si $p : E \rightarrow B$ es un revestimiento, la fibra $E_b = p^{-1}(b)$ es un subespacio discreto de E para todo $b \in B$. Pruebe además que si B es conexo, todas las fibras tienen el mismo cardinal.
- 7 Pruebe que si $p : E \rightarrow B$ es un revestimiento y B es simplemente conexo, entonces B es un homeomorfismo.
- 8 Pruebe que si $p : E \rightarrow B$ y $p' : E' \rightarrow B'$ son revestimientos, entonces $p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$ también lo es.
- 9 Pruebe que $p : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow S^1$ definida por $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ es un homeomorfismo local pero no es un revestimiento.
- 10 Sea G un grupo y X un G -espacio. Decimos que la acción es *propriadamente discontinua* si para todo $x \in X$ existe un abierto $U \ni x$ tal que $gU \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G \setminus \{1\}$.

- (I) Pruebe que si X es Hausdorff, el grupo G es finito y la acción es libre, entonces es propiamente discontinua.
- (II) Pruebe que G actúa en X de forma propiamente discontinua si y sólo si la acción es libre y la proyección canónica $q: X \rightarrow X/G$ es un revestimiento.
- (III) Pruebe que si G actúa de forma propiamente discontinua en X y este último es arcocotexo, entonces hay una sucesión exacta corta de *grupos*

$$1 \rightarrow \pi_1(X, x) \xrightarrow{q_*} \pi_1(X/G, [x]) \rightarrow G \rightarrow 1.$$

- (IV) Pruebe que si X es simplemente conexo, entonces $\pi_1(X/G, [x]) \cong G$ para todo $x \in X$.
- (v) Deduzca que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ y $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ para todo $n > 1$.