

Práctica 6: homotopía y el grupo fundamental

- 1 Pruebe que si $h, h' : X \rightarrow Y$ y $k, k' : Y \rightarrow Z$ son homotópicas entre sí, entonces $kh, k'h' : X \rightarrow Z$ son homotópicas.
- 2 Sea X es un espacio topológico. Pruebe que las aplicaciones $i_0, i_1 : X \rightarrow X \times I$ definidas por $i_s(x) = (x, s)$ ($s \in \{0, 1\}$) son equivalencias homotópicas con la misma inversa $p : X \times I \rightarrow X$, $(x, t) \mapsto x$. Deduzca que $i_0 \simeq i_1$.
- 3 Sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas tales que $f \simeq g$. Pruebe que si f es una equivalencia homotópica, entonces g también lo es.
- 4 Dé un ejemplo de una función f que tenga inversa homotópica a izquierda (a derecha) pero no a derecha (a izquierda).
- 5 Pruebe que $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica si y sólo si existen funciones $g, h : Y \rightarrow X$ tales que $f \circ g$ y $h \circ f$ son equivalencias homotópicas.
- 6 Sean X un espacio, $A \subseteq X$ un subespacio y $a_0 \in A$. Supongamos que existe una función continua $H : X \times I \rightarrow X$ tal que: $H(x, 0) = x$ para todo $x \in X$; $H(A \times I) \subseteq A$; y $H(a, 1) = a_0$ para todo $a \in A$. Pruebe que la proyección al cociente $q : X \rightarrow X/A$ es una equivalencia homotópica.
- 7 Pruebe que si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio convexo, entonces tiene a cualquiera de sus puntos como retracto por deformación fuerte. Concluya que C es contráctil.
- 8 Pruebe que si X es contráctil, entonces es arcoconexo.
- 9 Halle un espacio X y un retracto $A \subseteq X$ tales que A y X no sean homotópicamente equivalentes.
- 10 Pruebe que todo retracto de un espacio contráctil es contráctil.
- 11 El cono de un espacio X es $CX := X \times I / X \times \{1\}$. Pruebe que:
 - (I) La función $i : X \rightarrow CX$ dada por la composición

$$X \xrightarrow{\cong} X \times \{0\} \hookrightarrow X \times I \rightarrow CX$$
 es subespacio cerrada.
 - (II) El espacio CX es contráctil.
 - (III) X es contráctil si y sólo si $i : X \rightarrow CX$ es un retracto.
 - (IV) $f : X \rightarrow Y$ es homotópica a una función constante si y sólo si f se puede extender a lo largo de i a una función continua $\tilde{f} : CX \rightarrow Y$.

El grupo fundamental

- 12** Sean X es un espacio topológico y $x_0 \in X$. Sea

$$\Omega(X, x_0) = \{\alpha \in C(I, X) : \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}$$

el espacio de lazos de X , con la topología de subespacio de la topología compacto-abierto. Pruebe que hay una biyección entre $\pi_0(\Omega(X, x_0))$ y $\pi_1(X, x_0)$.

- 13** Sea X un espacio topológico, $x_0 \in X$ y sea $s \in S^1$ un punto cualquiera. Sea

$$[(S^1, s), (X, x_0)] = \{[f] \mid f : S^1 \rightarrow X \text{ continua tal que } f(s) = x_0\}$$

donde $[f] = [g]$ si $f \simeq g$ rel $\{s\}$. Pruebe que hay una biyección entre $\pi_1(X, x_0)$ y $[(S^1, s), (X, x_0)]$.

- 14** Definimos la *suspensión reducida* de un espacio punteado (X, x_0) como

$$\Sigma(X, x_0) = \frac{\Sigma X}{[x_0, t] \sim [x_0, s] \forall s, t \in I}.$$

Pruebe que para todo otro espacio punteado (Y, y_0) hay una biyección $[\Sigma(X, x_0), (Y, y_0)]_* \cong [(X, x_0), \Omega(Y, y_0)]_*$.

- 15** Sean $x_0, x_1 \in X$ dos puntos en un espacio arcoconexo X . Pruebe que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano si y sólo si para todo par de caminos $x_0 \xrightarrow{\omega, \omega'} x_1$ se tiene $\widehat{\omega} = \widehat{\omega'}$.

- 16** Pruebe que $\pi_1(X \times Y, (x, y))$ es isomorfo a $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$.

- 17** Sea X un espacio, sea $A \subseteq X$ un subespacio y sea $i : A \rightarrow X$ la inclusión.

- (I) Si $r : X \rightarrow A$ es una retracción, entonces para todo $a_0 \in A$ el morfismo $r_* : \pi_1(X, a_0) \rightarrow \pi_1(A, a_0)$ es un epimorfismo y el morfismo $i_* : \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0)$ es un monomorfismo.
- (II) Si A es un retracto por deformación, entonces para todo $a_0 \in A$ se tiene que $\pi_1(X, a_0) \cong \pi_1(A, a_0)$.

- 18** Sean X un espacio topológico, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio y $f : A \rightarrow X$ una función continua. Pruebe que si f se extiende a una función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow X$, entonces para todo $a \in A$, el morfismo $f_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, f(a))$ es el morfismo cero.

Bonus: objetos grupo en categorías y grupos de homotopía superior

- 19** Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos y objeto terminal $*$. Para cada objeto $x \in \mathcal{C}$, notamos p_x al único morfismo $C \rightarrow *$. Un *objeto grupo* en $\mathcal{C}$ es una tupla (G, e, m, i) compuesta por un objeto G junto con morfismos

$$e : * \rightarrow G, \quad m : G \times G \rightarrow G, \quad i : G \rightarrow G$$

que hacen conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccccc} G \times G \times G & \xrightarrow{1_G \times m} & G \times G & & G & \xrightarrow{(1_G, ep_G)} & G \times G \\ m \times 1_G \downarrow & & \downarrow m & & (ep_G, 1_G) \downarrow & \searrow 1_G & \downarrow m \\ G \times G & \xrightarrow{m} & G & & G \times G & \xrightarrow{m} & G \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{(1_G, i)} & G \times G \\ (i, 1_G) \downarrow & \searrow ep_G & \downarrow m \\ G \times G & \xrightarrow{m} & G \end{array}$$

Un morfismo entre dos objetos grupo $(G, e_G, m_G, i_G) \rightarrow (H, e_H, m_H, i_H)$ es un morfismo $f: G \rightarrow H$ que cumple las siguientes identidades:

$$m_H \circ (f \times f) = f \circ m_G, \quad i_H \circ f = f \circ i_G, \quad e_H = f e_G.$$

Los objetos grupo de $\mathcal{C}$ junto con los morfismos descritos más arriba forman a su vez una categoría que denotamos $\text{Grp}(\mathcal{C})$.

- (I) Pruebe que $\text{Grp}(\text{Set}) \simeq \text{Grp}$.
- (II) Pruebe que $\text{Grp}(\text{Grp}) \simeq \text{Ab}$.
- (III) Un *h-grupo* punteado es un objeto grupo en hTop_* . Pruebe que si (X, x_0) es un espacio punteado, entonces $\Omega(X, x_0)$ junto con

$$\begin{aligned} m: \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) &\rightarrow \Omega(X, x_0), & (\gamma, \gamma') &\mapsto \gamma * \gamma' \\ i: \Omega(X, x_0) &\rightarrow \Omega(X, x_0), & \gamma &\mapsto \bar{\gamma} \\ e: * &\rightarrow \Omega(X, x_0), & * &\mapsto \text{cte}_{x_0} \end{aligned}$$

es un h-grupo punteado. Deduzca más aún que se tiene un funtor

$$\Omega: \text{hTop}_* \rightarrow \text{Grp}(\text{hTop}_*).$$

- 20** Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías con productos. Decimos que un funtor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ *preserva productos* si para cada $c, c' \in \mathcal{C}$ y proyecciones $\pi_c: c \times c' \rightarrow c$, $\pi_{c'}: c \times c' \rightarrow c'$, el morfismo inducido

$$\begin{array}{ccc} & & F(c) \\ & \nearrow^{F(\pi_c)} & \uparrow \pi_{F(c)} \\ F(c \times c') & \xrightarrow{\exists!} & F(c) \times F(c') \\ & \searrow_{F(\pi_{c'})} & \downarrow \pi_{F(c')} \\ & & F(c') \end{array}$$

es un isomorfismo.

- (I) Pruebe que $\pi_0: \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ y $\pi_1: \text{hTop}_* \rightarrow \text{Grp}$ preservan productos.
- (II) Pruebe que si un funtor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ preserva productos y objetos terminales, entonces induce un funtor $\text{Grp}(F): \text{Grp}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Grp}(\mathcal{D})$.
- (III) Deduzca que el grupo fundamental de todo h-grupo es abeliano.

- 21** Sea (X, x_0) un espacio punteado y $n \geq 1$. Definimos inductivamente su *n-ésimo grupo de homotopía* como

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_0(\Omega(X, x_0)), \quad \pi_n(X, x_0) = \pi_{n-1}(\Omega(X, x_0), \text{cte}_{x_0}).$$

- (I) Pruebe que si $n \geq 2$, entonces $\pi_n(X, x_0)$ es abeliano.
- (II) Utilice el Ejercicio **14** para probar que hay una biyección

$$\pi_n(X, x_0) = [(S^n, e_n), (X, x_0)]_*$$

- (III) Deduzca que $\pi_n: \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$ preserva productos para todo $n \geq 1$.