

Práctica 5: Espacios de funciones

Todos los conjuntos de funciones en esta práctica serán vistos como espacios topológicos a través de la topología compacto-abierta.

- 1** Sean X e Y espacios topológicos. Para cada $y \in Y$, notamos $\varphi_y : X \rightarrow Y$ a la función constante con valor y , y $\varphi : Y \rightarrow C(X, Y)$ a la función $y \mapsto \varphi_y$. Pruebe que φ es un homeomorfismo con su imagen y que si Y es Hausdorff entonces tiene imagen cerrada.
- 2** Sea $i \in \{0, 1, 2\}$. Pruebe que Y es T_i si y sólo si $C(X, Y)$ es T_i .
- 3** Pruebe que Y es regular si y sólo si $C(X, Y)$.
Sugerencia. Si $\bar{U} \subseteq V$, entonces $\overline{S(K, U)} \subseteq S(K, V)$.
- 4** Muestre que si Y es normal, no necesariamente $C(X, Y)$ lo es también.
- 5** Sean X e Y dos espacios topológicos y $A \subseteq X$ subespacio. Pruebe que la función restricción $(-)|_A : C(X, Y) \rightarrow C(A, Y)$, $f \mapsto f|_A$, es continua.
- 6** Sean X , Y y Z espacios topológicos. Pruebe que si Y es localmente compacto y Hausdorff, entonces $\circ : C(Y, Z) \times C(X, Y) \rightarrow C(X, Z)$, $(f, g) \mapsto f \circ g$ es continua.
Sugerencia. Si $f \circ g \in S(K, U)$, encontrar V tal que $g(K) \subseteq V$ y $f(\bar{V}) \subseteq U$.
- 7** Sea $p : E \rightarrow B$ una función cociente. Pruebe que para todo X localmente compacto y Hausdorff la función $p \times id : E \times X \rightarrow B \times X$ es cociente.