

Práctica 4: Compacidad y axiomas de separación

Compacidad

- 1 Sean τ, τ' dos topologías en X .
 1. Pruebe que si τ' es más fina que τ y (X, τ') es compacto, entonces (X, τ) es compacto.
 2. Pruebe que si (X, τ) y (X, τ') son compactos y Hausdorff, entonces o bien $\tau = \tau'$ o bien τ y τ' no son comparables.
- 2 Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff y sea $\tau_c = \{U \in \tau : X \setminus U \text{ es compacto}\} \cup \{\emptyset\}$. Pruebe que τ_c es una topología sobre X .
- 3 Pruebe que si X tiene la topología del complemento finito, entonces es compacto.
- 4 Decida si $[0, 1]$ es compacto para:
 - (I) la topología $\{U : [0, 1] \setminus U \text{ es numerable o igual a } [0, 1]\}$;
 - (II) la topología de subespacio de $\mathbb{R}_l$.
- 5 Pruebe que S_Ω no es compacto pero es secuencialmente compacto.
- 6 Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios topológicos T_1 tales que $X_n \subseteq X_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ con la topología final respecto de las inclusiones $\iota_n : X_n \rightarrow X$. Pruebe que si $K \subseteq X$ compacto, entonces $K \subseteq X_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
- 7 Sea X un espacio topológico metrizable. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - (a) X es acotado para toda métrica que induzca la topología de X .
 - (b) Toda función continua $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada.
 - (c) X es compacto.
- 8 Sean X e Y espacios topológicos, con X compacto e Y Hausdorff. Muestre que si una función $f : X \rightarrow Y$ es continua, entonces es cerrada.
- 9 Sean X e Y espacios topológicos, con Y compacto y Hausdorff. Pruebe que una función $f : X \rightarrow Y$ es continua si y sólo si su gráfico $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$.
- 10 Sea $f : X \rightarrow Y$ función continua. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - (I) f es cerrada y $f^{-1}(\{y\})$ es compacto para todo $y \in Y$.
 - (II) f es cerrada y $f^{-1}(K)$ es compacto para todo $K \subseteq Y$ compacto.
 - (III) Para todo Z espacio topológico, $id_Z \times f : Z \times X \rightarrow Z \times Y$ es cerrada.
 - (IV) f es propia.
- 11 Sea $f : X \rightarrow Y$ suryectiva y propia. Pruebe que si X es Hausdorff, entonces Y también lo es.

Compacidad local

- 12 Pruebe que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.
- 13 Pruebe que $[0, 1]^\omega$ no es localmente compacto con la topología uniforme.
- 14 Pruebe que si $\prod_{i \in I} X_i$ es localmente compacto y $X_i \neq \emptyset$ para todo i , entonces cada X_i es localmente compacto y $J = \{i \in I : X_i \text{ es compacto}\}$ es finito.
- 15 Pruebe que si X es localmente compacto y $f : X \rightarrow Y$ es continua y abierta, entonces $f(X)$ es localmente compacto. Halle un ejemplo que muestre que la hipótesis f abierta es necesaria.

Compactificación de Alexandroff

- 16 Pruebe que la compactificación a un punto de $\mathbb{N}$ es homeomorfa a $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología subespacio de $\mathbb{R}$.
- 17 Usando la proyección estereográfica $p : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$p(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

pruebe que la compactificación a un punto de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a S^n .

- 18 Pruebe que si $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces f se extiende a un homeomorfismo entre sus compactificaciones a un punto.

Axiomas de separación

- 19 Pruebe que si X es regular, entonces dos puntos distintos cualesquiera de X admiten entornos cuyas clausuras son disjuntas.
- 20 Pruebe que si X es normal, entonces todo par de cerrados disjuntos de X admiten entornos cuyas clausuras son disjuntas.
- 21 Pruebe que un subespacio cerrado de un espacio normal es normal.
- 22 Pruebe que si X tiene la topología del orden, entonces X es regular.
- 23 Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Pruebe que si $\prod X_\alpha$ es Hausdorff o regular o normal, entonces también lo es cada X_α .
- 24 Sea X un conjunto y sean τ, τ' topologías en X tales que $\tau \subset \tau'$. Suponiendo que X es Hausdorff (o regular o normal) con una de estas topologías, ¿qué puede deducirse de X con la otra topología?
- 25 Sean $f, g : X \rightarrow Y$ continuas. Pruebe que si Y es Hausdorff entonces $\{x : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X .

- 26** Pruebe que si X es normal y conexo entonces tiene un solo punto o es no numerable.
- 27** Sea Z un espacio topológico. Si Y es un subespacio de Z , decimos que Y es retracto de Z si existe una función continua $r : Z \rightarrow Y$ tal que $r(y) = y$ para todo $y \in Y$.
- (a) Pruebe que si Z es Hausdorff e Y es un retracto de Z , entonces Y es cerrado en Z .
 - (b) Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto finito. Pruebe que A no es un retracto de $\mathbb{R}^2$.
 - (c) Pruebe que S^1 es un retracto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
- 28** Pruebe que si $\{f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}\}$ es una familia de funciones continuas que separan puntos de cerrados, entonces es inicial.
- 29** Pruebe que si Y es normal con base $\mathcal{B}$, entonces Y es subespacio de $[0, 1]^J$ con $J \subset \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.
- 30** Pruebe que $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ no es normal, pero es completamente regular.
- 31** Sea X completamente regular, y sean A, B cerrados disjuntos de X . Pruebe que si A es compacto, entonces existe una función continua $f : X \rightarrow I$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.
- 32** Pruebe que si X es compacto y Hausdorff, entonces es normal.
- 33** Pruebe que si X es localmente compacto y Hausdorff, entonces es completamente regular.

Compactificación de Stone-Čech

- 34** Sea Y una compactificación T_2 de X , y sea $\beta(X)$ la compactificación de Stone-Čech. Pruebe que existe una función cerrada y suryectiva $g : \beta(X) \rightarrow Y$ que se restringe a la identidad de X .
- 35**
- (a) Pruebe que si $f : S_\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces es eventualmente constante.
 - (b) Pruebe que la compactificación en un punto de S_Ω y la compactificación de Stone-Čech son equivalentes.
 - (c) Concluya que toda compactificación de S_Ω es equivalente a la compactificación en un punto.
- 36** Sea X completamente regular. Pruebe que X es conexo si y sólo si $\beta(X)$ es conexo.
- 37** Sea X discreto.
- (I) Pruebe que si $A \subset X \subset \beta(X)$, entonces $\bar{A}$ y $\overline{X \setminus A}$ son disjuntos, donde las clausuras se toman en $\beta(X)$.
 - (II) Pruebe que si U es abierto en $\beta(X)$, entonces $\bar{U}$ es abierto en $\beta(X)$.
 - (III) Pruebe que $\beta(X)$ es totalmente disconexa.

Grupos topológicos

Un *grupo topológico* es un grupo $(G, \cdot)$ y una topología en G para la cual las funciones $(x, y) \mapsto x \cdot y$, $x \mapsto x^{-1}$ y $x \mapsto 1_G$ son continuas.

- 38** Pruebe que $(\mathbb{R}, +)$, $(S^1, \cdot)$ y $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ son grupos topológicos.
- 39** Pruebe que G es un grupo topológico si y sólo si la función $H : G \times G \rightarrow G$, $H(g, h) = g \cdot h^{-1}$ es continua.
- 40** Pruebe que para cada $a \in G$, las funciones $L_a : G \rightarrow G$ y $R_a : G \rightarrow G$, definidas por $L_a(g) = a \cdot g$, $R_a(g) = g \cdot a$ son homeomorfismos.
- 41** Sea G un grupo topológico y sea U un abierto que contiene a 1_G . Pruebe que existe un abierto $V \ni 1_G$ tal que $V \cdot V \subset U$ y $V^{-1} = V$.
- 42** Pruebe que si un grupo topológico G es T_0 , entonces es T_2 .
- 43** Pruebe que si H es un subgrupo de un grupo topológico G , entonces la clausura de H es también un subgrupo. Pruebe que si H es invariante, entonces su clausura también.
- 44** Decida cuáles de los grupos topológicos $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{R})$, $SO(n, \mathbb{R})$ son compactos y cuáles son conexos.