

Práctica 3: Conexión y arcoconexión

Conexión

- 1 Sean X un conjunto y τ, τ' dos topologías sobre X . Pruebe que si (X, τ) es un espacio topológico conexo y $\tau' \subset \tau$, entonces (X, τ') es un espacio topológico conexo.
- 2 Pruebe que X es espacio conexo si y sólo si para todo subconjunto propio y no vacío $A \subset X$ se tiene que $\partial A \neq \emptyset$.
- 3 Sea X un espacio topológico.
 - (I) Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de subespacios conexos de X y A un subespacio conexo de X tal que $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Pruebe que $A \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ es conexo.
 - (II) Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es conexo.
- 4 ¿Cuáles de los siguientes espacios dotados de sus topologías del orden lexicográfico son conexos?
 - (a) $\mathbb{N} \times [0, 1)$.
 - (b) $[0, 1) \times \mathbb{N}$.
 - (c) $[0, 1) \times [0, 1]$.
 - (d) $[0, 1] \times [0, 1)$.
- 5 Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Pruebe que si A es conexo, entonces $\bar{A}$ también. Más aún, todo subespacio B de X tal que $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ resulta conexo. ¿Qué ocurre con ∂A y con A° ?
- 6 Sea X un espacio y $A \subseteq X$ un subconjunto conexo. Pruebe que si $B \subseteq X$ es tal que $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$, entonces $A \cap \partial B \neq \emptyset$.
- 7 Sea $p: X \rightarrow Y$ una función cociente. Pruebe que si Y es conexo y además $p^{-1}(y)$ es conexo para todo $y \in Y$, entonces X es conexo.
- 8 Muestre que entre los espacios $(0, 1)$, $(0, 1]$ y $[0, 1]$ no hay dos homeomorfos. Concluya que la existencia de funciones subespacio $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$ no implica que X e Y sean homeomorfos.
- 9
 - (a) Sea $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que existe un punto $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.
 - (b) Pruebe que toda función continua $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ admite un punto fijo.
- 10
 - (a) Muestre que si $A \subset \mathbb{R}^2$ es finito, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus A$ es conexo.
 - (b) Muestre que si $B \subset S^2$ es finito, entonces $S^2 \setminus B$ es conexo.
- 11 Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (I) X es localmente conexo.
- (II) Las componentes de todo subespacio abierto de X son abiertas en X .
- (III) Los abiertos conexos de X forman una base de la topología de X .

Concluya que si X localmente conexo, entonces las componentes conexas de X son abiertas.

- 12** Una función $f: X \rightarrow Y$ se dice *localmente constante* si para todo $x \in X$, existe U entorno abierto de x tal que $f|_U$ es constante. Pruebe que si f es localmente constante y X es conexo, entonces f es constante.

Arcoconexión

- 13** Sean $C = \{(t, \sin(1/t)) : 0 < t \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ y $X = \overline{C} = C \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ el seno del topólogo.

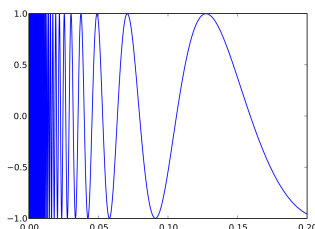


Figura 1: El espacio X .

- (I) Muestre que C es arcoconexo y deduzca que X es conexo.
- (II) Muestre que sin embargo X no es arcoconexo. Para verlo, puede suponer que existe un arco continuo $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = (0, 0)$ y $\gamma(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$ y obtener una contradicción del siguiente modo:
 - (a) Recuerde que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $x, y: [0, 1] \rightarrow X$ dos funciones continuas.
 - (b) Pruebe que existe $t_1 \in (0, 1)$ tal que $x(t) = \frac{2}{3\pi}$ e, inductivamente, construya una sucesión decreciente $(t_n)_{n \geq 1} \subset [0, 1]$ tal que $x(t_n) = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
 - (c) Observe que $(t_n)_{n \geq 1}$ es convergente a cierto límite $\ell \in [0, 1]$ pero sin embargo la sucesión $(y(t_n))_{n \geq 1}$ no converge, contradiciendo la continuidad de y .

- 14** Pruebe que si $A, B \subset X$ son subespacios arcoconexos y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ es arcoconexo.

- 15** Pruebe que si X e Y son arcoconexos, entonces $X \times Y$ es arcoconexo.

- 16** (a) Pruebe que si X es localmente arcoconexo y $U \subset X$ es abierto, entonces U es localmente arcoconexo.
- (b) Pruebe que si X es localmente arcoconexo y conexo, entonces es arcoconexo.
- (c) Concluya que si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces U es conexo si y sólo si es arcoconexo.

Componentes

- 17** Calcule las componentes conexas de $\mathbb{R}_l$ y $\pi_0(\mathbb{R}_l)$.

- 18** Pruebe que el cuadrado ordenado $I \times I$ es localmente conexo pero no es localmente arcconexo. Calcule las componentes conexas de $I \times I$ y $\pi_0(I \times I)$.