

Práctica 2: Topologías iniciales y finales

Subespacios

- 1 Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subespacio. Dado $Z \subset A$, pruebe que la topología de Z como subespacio de A coincide con la topología de Z como subespacio de X .
- 2 Sea X un conjunto totalmente ordenado, dotado de la topología del orden, y sea $Y \subseteq X$ un subconjunto.
 - (i) Muestre que la topología del orden de Y no necesariamente coincide con la topología de Y como subespacio de X .
 - (ii) Decimos que Y es **convexo** si para cada $a, b \in Y$ se tiene que $(a, b) \subset Y$. Pruebe que si Y es convexo, entonces estas dos topologías sí coinciden.
- 3 Considere a $I = [-1, 1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos en I ? ¿Cuáles son abiertos en $\mathbb{R}$?

$$\begin{array}{lll}
 A = \{x : \frac{1}{2} < |x| < 1\} & B = \{x : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\} & C = \{x : \frac{1}{2} \leq |x| < 1\} \\
 D = \{x : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\} & E = \{x : 0 < |x| < 1, 1/x \notin \mathbb{N}\} & F = \{x : |x| \leq 1\}
 \end{array}$$

Productos

- 4 Sean X e Y espacios topológicos, A un subespacio de X y B un subespacio de Y . Pruebe que la topología producto en $A \times B$ coincide con la topología de subespacio de $X \times Y$.
- 5 Sean X, Y dos espacios topológicos. Pruebe que las proyecciones $p_X : X \times Y \rightarrow X$ y $p_Y : X \times Y \rightarrow Y$ son abiertas. Halle ejemplos en los que no sean cerradas.
- 6 Sean X, Y y Z espacios topológicos, y sea $f : X \times Y \rightarrow Z$ una función. Decimos que f es **continua en X** si $f(-, y) : X \rightarrow Z$ es continua para todo $y \in Y$. Análogamente, f se dice **continua en Y** si $f(x, -) : Y \rightarrow Z$ es continua para todo $x \in X$.
 - (i) Pruebe que si f es continua, entonces es continua en cada variable.
 - (ii) Dé un ejemplo en el que f sea continua en cada variable y sin embargo no sea continua.
- 7 Sean X, Y dos espacios topológicos y $A \subset X$ y $B \subset Y$. Pruebe que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Concluya que si A es cerrado en X y B es cerrado en Y , entonces $A \times B$ es cerrado en $X \times Y$.
- 8 (a) Pruebe que la topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide con la topología producto de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}_d$ es el conjunto $\mathbb{R}$ dotado de la topología discreta. Compare con la topología usual de $\mathbb{R}^2$.
 (b) Sea $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Compare las siguientes topologías sobre $I \times I$:
 - la topología producto;
 - la topología del orden para el orden lexicográfico;
 - la topología producto $I_d \times I$, donde I_d denota a I con la topología discreta.

9 Sea $\mathbb{R}_l$ el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es $\mathbb{R}$ y cuya topología tiene como base de abiertos al conjunto $\{[a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$. Sea L una recta en el plano. Describa la topología de L como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$.

10 (a) Sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Pruebe que las funciones $f : X \rightarrow X \times Y$ y $g : Y \rightarrow X \times Y$ definidas por $f(x) = (x, y_0)$, $g(y) = (x_0, y)$ son subespacio.

(b) Sea X un espacio métrico con métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Pruebe que la topología inducida por la métrica es la menos fina que hace que d sea una función continua.

Sugerencia: si d es continua, también lo es $d_{x_0} : X \rightarrow \mathbb{R}$, $d_{x_0}(x) = d(x, x_0)$.

11 Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, y sea para cada $i \in I$ un subconjunto $A_i \subset X_i$. Decida cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles falsas si se toma en $X = \prod_{i \in I} X_i$ la topología producto. ¿Y si se toma la topología caja?

(i) Si cada A_i es cerrado en X_i entonces $\prod_{i \in I} A_i$ es cerrado en X .

(ii) $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.

12 Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, y sea $X = \prod_{i \in I} X_i$ el espacio producto con proyecciones $\{p_i : X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$. Dada $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red en X , pruebe que $x_\alpha \rightarrow x$ si y sólo si $p_i(x_\alpha) \rightarrow p_i(x)$ para todo $i \in I$. ¿Es cierto esto si se toma en X la topología caja?

13 Se define en $\mathbb{R}$ la métrica acotada como $\bar{d}(a, b) = \min\{|a - b|, 1\}$. Pruebe que induce la misma topología que la usual. Sea $\mathbb{R}^\omega$ el conjunto de las sucesiones de números reales. Se define en $\mathbb{R}^\omega$ la métrica uniforme como $\bar{p}((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_n \{\bar{d}(a_n, b_n)\}$. Verifique que la métrica uniforme es efectivamente una métrica.

14 Decida si las siguientes funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\omega$ son continuas tomando en $\mathbb{R}$ la topología usual y tomando en $\mathbb{R}^\omega$ la topología uniforme, la topología producto y la topología caja.

$$f(t) = (t, 2t, 3t, \dots) \quad g(t) = (t, t, t, \dots) \quad h(t) = (t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t, \dots)$$

15 Decida si las siguientes sucesiones convergen en $\mathbb{R}^\omega$ con las topologías uniforme, producto y caja.

(i) $(1, 1, 1, 1, \dots), (0, 2, 2, 2, \dots), (0, 0, 3, 3, \dots), \dots$

(ii) $(1, 1, 1, 1, \dots), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots), (0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots), \dots$

(iii) $(1, 0, 0, 0, \dots), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots), \dots$

(iv) $(1, 1, 0, 0, \dots), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots), \dots$

16 Calcule la clausura del conjunto de las sucesiones eventualmente cero con respecto a las topologías uniforme, producto y caja.

17 Sean (X_n, d_n) espacios métricos. Pruebe que $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ con la topología producto es metrizable.

Sugerencia: Considere $d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(x_n, y_n)}{n} \right\}$.

Cocientes

- 18** (a) Sean X e Y espacios topológicos y sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua. Pruebe que si existe $g: Y \rightarrow X$ continua tal que $f \circ g = id_Y$, entonces f es un cociente.
 (b) Dado $A \subset X$, una **retracción** de X sobre A es una aplicación continua $r: X \rightarrow A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$. Pruebe que una retracción es una aplicación cociente.

- 19** Sea $p_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección a la primer coordenada. Muestre que:
 (i) si $X = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$, entonces $p_1|_X: X \rightarrow \mathbb{R}$ es un cociente cerrado pero no abierto;
 (ii) si $Y = (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$, entonces $p_1|_Y: Y \rightarrow \mathbb{R}$ es un cociente que no es ni abierto ni cerrado.

- 20** Sea Z el subespacio $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definimos $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow Z$ por la fórmula

$$g(x, y) = \begin{cases} (x, 0) & x \neq 0 \\ (0, y) & x = 0 \end{cases}$$

- (i) ¿Es g un cociente? ¿Es g continua?
 (ii) Halle una base para la topología cociente en Z inducida por g .
- 21** Sea G un grupo. Un **G -espacio** es un espacio topológico X junto con una acción $\cdot: G \times X \rightarrow X$ tal que $x \mapsto g \cdot x$ es continua para todo $g \in G$. Pruebe que los siguientes espacios topológicos son G -espacios.
 (i) $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$ y la acción es $n \cdot x = n + x$.
 (ii) $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y la acción es $(n, m) \cdot (x, y) = (n + x, m + y)$.
 (iii) $X = S^n$, $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ y la acción es $\pm 1 \cdot x = \pm x$.
 (iv) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$, $G = \mathbb{Z}$ y la acción es $m \cdot (x, y) = (m + x, (-1)^m y)$.

- 22** Si X es un G -espacio, definimos una relación de equivalencia $\sim_G$ en X como sigue:

$$x \sim_G y \iff \exists g \in G \text{ tal que } y = g \cdot x.$$

Notamos X/G al espacio cociente $X / \sim_G$ y $p: X \rightarrow X/G$ a la proyección. Pruebe que p es abierta, y que si G es finito entonces p es también cerrada.

- 23** (a) Pruebe que el espacio cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (ejercicio **21**, a)) es homeomorfo a S^1 .
 (b) Pruebe que el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ejercicio **21**, b)) es homeomorfo al toro $S^1 \times S^1$.
 (c) Pruebe que el espacio cociente $S^2/\mathbb{Z}_2$ (ejercicio **21**, c)) es homeomorfo a $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$, el plano proyectivo real.
 Recuerde que el plano proyectivo real se define como el cociente de $[0, 1] \times [0, 1]$ por la relación que identifica $(0, y)$ con $(1, 1 - y)$ para todo $y \in [0, 1]$, y $(x, 0)$ con $(1 - x, 1)$ para todo $x \in [0, 1]$.
 (d) Pruebe que el espacio cociente $X/\mathbb{Z}$ (ejercicio **21**, d)) es homeomorfo a la banda de Möbius.
 Recuerde que la banda de Möbius se define como el cociente de $[0, 1] \times [0, 1]$ por la relación que identifica $(0, y)$ con $(1, 1 - y)$ para todo $y \in [0, 1]$.

Familias iniciales y finales

- 24** Pruebe que si $f : X \rightarrow Y$ es inyectiva y final entonces es subespacio.
- 25** Pruebe que si $f : X \rightarrow Y$ es suryectiva e inicial, entonces es cociente.
- 26** Sea X un espacio topológico con topología τ , y sea $\mathfrak{S} = \{0, 1\}$ el *espacio de Sierpiński*, con topología $\{\emptyset, \{0\}, \mathfrak{S}\}$.
1. Pruebe que $U \subset X$ es abierto si y sólo si $1 - \chi_U : X \rightarrow \mathfrak{S}$ es continua, donde χ_U es la función característica de U .
 2. Pruebe que la familia $\{\chi_U : X \rightarrow \mathfrak{S}\}_{U \in \tau}$ es inicial.
- 27** Sea k un cuerpo. Dotamos a k de la topología cofinita. Pruebe que $\{p : k^n \rightarrow k\}_{p \in k[x_1, \dots, x_n]}$ es una familia inicial para la topología Zariski en k^n .
- 28** Sea $\{f_i : X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ una familia inicial de funciones, y sea $e : X \rightarrow \prod X_i$ la *función evaluación*, definida por
- $$e(x) = (f_i(x))_{i \in I}$$
- Pruebe que $e : X \rightarrow \text{Im}(e)$ es abierta.
- 29** Decimos que $\{f_i : X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ *separa puntos* de X si para todo $x \neq y \in X$, existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$. Pruebe que $\{f_i : X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ es un familia inicial para la topología de X y separa puntos de X si y sólo si la función evaluación $e : X \rightarrow \prod X_i$ es subespacio, donde $\prod X_i$ tiene la topología producto.
- 30** Sea $X = \coprod_{i \in I} X_i$, dotado de la topología coproducto. Dada una familia de funciones $\{f_i : X_i \rightarrow Y\}_{i \in I}$, existe una única $f : X \rightarrow Y$ tal que $f \circ \iota_i = f_i$ para todo $i \in I$, donde $\iota_i : X_i \rightarrow X$ es la función inclusión. Pruebe que $\{f_i\}_{i \in I}$ es familia final si y sólo si f es final.