Práctica 10: homología

1 Sea $A \subset X$. Pruebe que $H_0(X,A) = 0$ si y sólo si A interseca todas las componentes arco conexas de X.

2 Sea X espacio topológico, $x_0 \in X$. Pruebe que $H_n(X, x_0) \simeq \widetilde{H}_n(X)$ para todo n.

3 Sea $A \subseteq X$ un retracto. Pruebe que:

(I) $i_*: H_n(A) \to H_n(X)$ es un monomorfismo para todo $n \geq 0$, y $H_*(X) = H_*(A) \oplus H_*(X,A)$.

(II) si A es además un retracto por deformación débil de X, entonces $H_*(X,A) = 0$ para todo $* \geq 0$ e i_* es un isomorfismo.

4 Sea X un espacio contráctil y sea A un subespacio de X. Pruebe que $H_n(X,A)$ es isomorfo a $\widetilde{H}_{n-1}(A)$ para todo $n \geq 0$.

5 Pruebe que para todo par bueno (X,A) se tiene que $H_*(X,A) \simeq \widetilde{H}_*(X \cup CA)$.

6 Pruebe que $\tilde{H}_*(X) \simeq \tilde{H}_{*+1}(\Sigma X)$ para todo espacio topológico X y $* \geq 0$.

7 Pruebe que si $(X_i, x_i)_{i \in I}$ es una familia de espacios bien punteados, entonces $\widetilde{H}_n(\bigvee_{i \in I} X_i) \cong \bigoplus_{i \in I} \widetilde{H}_n(X_i)$.

8 Sea X un espacio topológico y $U_1, \ldots, U_n$ un cubrimiento por abiertos de X tal que para todo $J \subset \{1, \ldots, n\}$ la intersección $\bigcap_{j \in J} U_j$ es vacía o tiene homología reducida trivial. Pruebe que $\widetilde{H}_i(X) = 0$ para todo $i \geq n-1$ y muestre con un ejemplo que la desigualdad es óptima.

9 Para todo $n \geq 1$ y $A \subset \mathbb{R}^n$ finito, calcule los grupos de homología de $\mathbb{R}^n \setminus A$.

10 Calcule la homología de $\dfrac{S^2}{(0,0,1) \sim (0,0,-1)}$.

11 Calcule la homología de $\mathbb{R}P^n$ para todo $n \geq 1$.

12 Pruebe que S^n no es un retracto de D^{n+1} y que toda función continua $f: D^n \to D^n$ tiene algún punto fijo.

13 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos y no vacíos. Pruebe que si U y V son homeomorfos, entonces $n = m$.