

Práctica 1: Espacios topológicos

Ejemplos

- 1 Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Muestre que

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

es una topología sobre Y . Llamamos a τ_Y la *topología inducida* por τ sobre Y o la *topología subespacio*.

- 2 **Topología cofinita.** Sea X un conjunto. Pruebe que $\tau = \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología en X .

- 3 Sean X un conjunto infinito, $x_0 \in X$ y $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X con complemento finito o que no contienen a x_0 . Muestre que τ es una topología y describa sus cerrados.

- 4 Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los cerrados acotados de $\mathbb{R}$ en su topología usual, junto con $\mathbb{R}$. Pruebe que existe una topología en $\mathbb{R}$ para la cual $\mathcal{F}$ es el conjunto de todos los cerrados. ¿Esta topología, guarda alguna relación con la topología usual?

- 5 Decimos que un subconjunto U de $\mathbb{R}^2$ es *radialmente abierto* si su intersección con toda recta que pasa por uno de sus puntos es un abierto de ésta. Muestre que el conjunto de todos los conjuntos radialmente abiertos de $\mathbb{R}^2$ es una topología sobre $\mathbb{R}^2$ y compárela con la topología usual.

- 6 **Espacios de Alexandroff.** Sea $(X, \leq)$ un preorden; es decir, un conjunto X junto con una relación reflexiva, transitiva (y no necesariamente anti-simétrica) $\leq$. Un subconjunto $U \subseteq X$ se dice una *sección* si, para cada $u \in U$ y $x \in X$, se tiene que $x \leq u$ implica $x \in U$.

Pruebe que $\tau = \{U \subseteq X : U \text{ es sección}\}$ define una topología en X .

Construcción de topologías

- 7 **Filtros de entornos.** Sea X un conjunto. Un *sistema de filtros de entornos* $\mathcal{F}$ en X es una función

$$\mathcal{F} : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)), \quad x \mapsto \mathcal{F}_x$$

tal que:

1. si $x \in X$, entonces $\mathcal{F}_x \neq \emptyset$;
2. si $x \in X$ y $A \in \mathcal{F}_x$, entonces $x \in A$;
3. si $x \in X$, $A \in \mathcal{F}_x$ y $B \in \mathcal{P}(X)$ son tales que $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}_x$;
4. si $x \in X$ y $A, B \in \mathcal{F}_x$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_x$;
5. si $x \in X$ y $A \in \mathcal{F}_x$, entonces existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $B \subseteq A$ y $B \in \mathcal{F}_y$ para todo $y \in B$.

Pruebe que:

- i Si (X, τ) es un espacio topológico y para cada $x \in X$ definimos

$$\mathcal{F}_x = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{existe } U \in \tau \text{ tal que } x \in U \subseteq A\},$$

entonces $\mathcal{F}$ es un sistema de filtros de entornos en X .

- ii Si $\mathcal{F}$ es un sistema de filtros de entornos en X y definimos

$$\tau = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{para todo } x \in A \text{ se tiene } A \in \mathcal{F}_x\} \cup \{\emptyset\},$$

entonces τ es una topología sobre X .

- iii Las construcciones de los ítems anteriores son inversas.

8 Operadores de clausura. Sea X un conjunto. Una función $c : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ es un *operador de clausura en X* si

(C1) $c(\emptyset) = \emptyset$;

(C2) si $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces $A \subseteq c(A)$;

(C3) si $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces $c(c(A)) = c(A)$;

(C4) si $A, B \in \mathcal{P}(X)$, entonces $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$;

Pruebe que:

1. Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces la función

$$c : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X), \quad A \mapsto \bar{A}$$

es un operador de clausura en X .

2. Si $c : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ es un operador de clausura en X , entonces el conjunto

$$\tau = \{U \in \mathcal{P}(X) : c(X \setminus U) = X \setminus U\}$$

es una topología sobre X .

3. Las construcciones de los ítems anteriores son inversas.

9 Sea X un conjunto y sea $B \subseteq X$. Pruebe que la función

$$c : A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P}(X) & \text{si } A \neq \emptyset \\ \emptyset \in \mathcal{P}(X) & \text{si } A = \emptyset \end{cases}$$

es un operador de clausura en X . Describa los abiertos de la topología correspondiente.

10 Extensión simple. Sean X un conjunto, $A \subseteq X$ y τ una topología sobre X . Pruebe que $\tau^A = \{U \cup (V \cap A) : U, V \in \tau\}$ define una topología sobre X . Llamamos a τ^A la *extensión simple de τ sobre A* .

Clausura, interior y frontera

11 Sea X un espacio topológico y sean $A, B, (A_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subseteq X$. Pruebe las siguientes inclusiones y decida cuáles de ellas pueden ser estrictas:

- $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;
- $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha}$;
- $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ cuando A es abierto;
- $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A^\circ \subseteq (\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A)^\circ$ y
- $\overline{A \setminus B} \subseteq \overline{A} \setminus \overline{B}$;
- $(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A)^\circ \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A^\circ$.

12 Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Pruebe que:

- $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus A^\circ$;
- $A^\circ = A \setminus \partial A$;
- $X \setminus \partial A = A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ$;
- A es abierto sii $A \cap \partial A = \emptyset$ y
- $\overline{A} = A \cup \partial A$;
- A es cerrado sii $\partial A \subseteq A$.

13 Kuratowski. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Tomamos la sucesión de subespacios resultante de aplicar las operaciones de clausura y complementación de manera alternada; es decir, $(A, \overline{A}, X \setminus \overline{A}, \overline{X \setminus \overline{A}}, X \setminus \overline{X \setminus \overline{A}}, \dots)$.

Pruebe que la cantidad máxima de subespacios distintos de esta sucesión es 7 y encontrar un subconjunto de $\mathbb{R}$ que realice esta cota. Considerar qué sucede si tomamos la sucesión $(A, X \setminus A, \overline{X \setminus A}, X \setminus \overline{X \setminus A}, \dots)$.

14 Sea X un conjunto equipado con la topología cofinita. Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de X con respecto a esta topología.

15 El cuadrado ordenado. Considere el conjunto $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología del orden lexicográfico y determine la clausura y el interior de los siguientes subconjuntos de X .

- $\{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$,
- $\{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\}$,
- $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$,
- $\{(x, 1/2) : 0 < x < 1\}$,
- $\{(1/2, y) : 0 < y < 1\}$.

16 Sea X un espacio topológico. Pruebe que todo cerrado en X es la frontera de un subconjunto de X si y sólo si existe un subconjunto denso y con interior vacío $Q \subset X$.

Bases y sub-bases

17 Sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de topologías en X . Pruebe que $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \tau_\alpha$ es una topología en X . ¿Es $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \tau_\alpha$ una topología en X ?

18 Topología generada. Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Pruebe que existe una topología $\sigma(\mathcal{A})$ sobre X tal que:

- Todo elemento de $\mathcal{A}$ es abierto para $\sigma(\mathcal{A})$; es decir, $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$.

- Si τ es una topología sobre X tal que $\mathcal{A} \subseteq \tau$, entonces $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \tau$.

En otras palabras, $\sigma(\mathcal{A})$ es la topología menos fina que contiene a $\mathcal{A}$ (la mínima en el ordenado por la inclusión). La topología $\sigma(\mathcal{A})$ es la *topología generada* por $\mathcal{A}$.

- 19** Describa la topología generada por $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ sobre el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$.
- 20** Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado. Para cada $x \in X$, consideramos $S_x = \{y \in X : y < x\}$ y $R_x = \{y \in X : y > x\}$. Sean $\mathcal{S} = \{S_x : x \in X\}$ y $\mathcal{R} = \{R_x : x \in X\}$. Pruebe que $\mathcal{S} \cup \mathcal{R}$ es una sub-base para la topología del orden.
- 21** Sean X un conjunto totalmente ordenado con la topología del orden e $Y \subseteq X$ un subconjunto. Muestre que la topología del orden de Y no necesariamente coincide con la topología de Y como subespacio de X .
- 22** Considere las siguientes colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\};$$

$$\mathcal{B}' = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\};$$

$$\mathcal{B}'' = \mathcal{B} \cup \{U \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} : U \in \mathcal{B}\}.$$

Muestre que $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ definen bases para una topología en $\mathbb{R}$ y compare las topologías resultantes. Además, determine la clausura del conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ en cada caso.

- 23** **El plano marcado.** Sea $z \in \mathbb{R}^2$, definimos el conjunto de entornos básicos $\mathcal{B}_z \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ como aquellos de la forma $\{z\} \cup D$ con D un disco centrado en z sin un número finito de rectas que pasan por z .
- Pruebe que $\mathcal{B} = \bigcup_{z \in \mathbb{R}^2} \mathcal{B}_z$ es una base para una topología en $\mathbb{R}^2$ más fina que la usual. ¿Qué pasa si cambiamos “finitas” por “numerables” rectas?
- 24** **La recta circular.** Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, definimos sus entornos básicos como los usuales. Un entorno básico del 0 es un conjunto $U = (-\infty, -n) \cup (\varepsilon, \varepsilon) \cup (n, \infty)$, para cualesquiera $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$.
- Pruebe que el conjunto $\mathcal{B}$ de todos los entornos básicos es una base para una topología. Describa la clausura de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ con esta topología.

Redes

- 25** Sea (X, τ) un espacio topológico. Pruebe que las redes verifican las siguientes propiedades:
1. Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es eventualmente constante, entonces $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a dicha constante.
 2. Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x , entonces toda sub-red de $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x .
 3. Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ verifica que toda sub-red tiene una sub-sub-red que converge a x , entonces $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x .
 4. Sean Λ un conjunto dirigido y, para cada $\alpha \in \Lambda$, sea Γ_α un conjunto dirigido. Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene una red $(x_k^\alpha)_{k \in \Gamma_\alpha}$ que converge a $x^\alpha \in X$, y que

además $(x^\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a $x \in X$. Considere $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha \in \Lambda} \Gamma_\alpha$ ordenado por el orden producto; es decir,

$$(\alpha, (k_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \geq (\alpha', (k'_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \iff \alpha \geq \alpha' \text{ y } k_\beta \geq k'_\beta \quad \forall \beta \in \Lambda.$$

Entonces la red $(\alpha, (k_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \mapsto x_{k_\alpha}^\alpha$ converge a x .

26 Sea (X, τ) un espacio topológico. Pruebe que

$$\bar{A} = \{x \in X : \exists (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset A, \text{ y } x_\alpha \rightarrow x\}$$

27 **Puntos de acumulación.** Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es una red, decimos que $x \in X$ es un punto de acumulación de la red si, para todo $A \in \mathcal{F}_x$, el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : x_\alpha \in A\}$ es cofinal en Λ . Pruebe que x es un punto de acumulación de la red si y sólo si existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ que converge a x .

Sugerencia: para probar $\Rightarrow$), considere como conjunto dirigido el formado por los pares (α, U) con $\alpha \in \Lambda$ y U un entorno (abierto) de x que contiene a x_α .

Funciones continuas

28 Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Pruebe que las siguientes condiciones sobre f son equivalentes:

1. f es continua.
2. Para todo $x \in X$ y para todo $A \in \mathcal{F}_{f(x)}$ existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $f(B) \subset A$.
3. Para toda red $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset X$ convergente a cierto $x \in X$, la red $(f(x_\alpha))_{\alpha \in \Lambda}$ converge a $f(x)$.
4. Para todo $A \subset X$ se tiene $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
5. Si $\mathcal{B}$ es base para la topología de Y , entonces $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.
6. Si $\mathcal{S}$ es una sub-base para la topología de Y , $f^{-1}(S)$ es abierto en X para todo $S \in \mathcal{S}$.

29 Sean X un espacio topológico y $E \subseteq X$. Sea $\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}$ la función característica de E . Pruebe que χ_E es continua en x si y sólo si x no pertenece a la frontera de E .

30 1. Sean X, Y conjuntos ordenados con la topología del orden. Pruebe que si $f : X \rightarrow Y$ es biyectiva y preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.
2. Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ con la topología euclídea. Definimos $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Pruebe que f es biyectiva y preserva el orden. ¿Es f un homeomorfismo?

31 Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas.

1. Pruebe que el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X .

2. Sea $h : X \rightarrow Y$ la función $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Pruebe que h es continua.

32 **Lema del Pegado.** Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una colección de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$. Supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.

1. Pruebe que si cada A_α es abierto, entonces f es continua.
2. Pruebe que si $\mathcal{A}$ es finito y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.
3. Encuentre un ejemplo donde $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, cada A_α es cerrado, pero f no es continua.
4. Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ se dice localmente finita si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$, $x \in U$, tal que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ sólo para finitos valores de α . Muestre que si la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.

33 Un *morfismo de preórdenes* $f : (X, \leq_X) \rightarrow (Y, \leq_Y)$ es una función $f : X \rightarrow Y$ tal que, para todo $x, x' \in X$, se tiene que $x \leq_X x'$ implica $f(x) \leq_Y f(x')$.

Pruebe que una función $f : X \rightarrow Y$ es morfismo de preórdenes si y sólo si es continua con sus topologías de Alexandroff.