ÁLGEBRA LINEAL

RESOLUCIÓN DEL EJERCICIO 18 II) DE LA PRÁCTICA 2

Ejercicio 1. Para cada $k \in \mathbb{R}$, hallar la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Solución. Recordemos primero que el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado a A coincide con las soluciones del sistema homogéneo asociado a cualquier matriz obtenida de A a partir de operaciones de triangulación de Gauß-Jordan.

Consideremos entonces matriz A' que se obtiene a partir de A del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2\to F_2} \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ 0 & 1-k & k^2-1 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1\to F_3} \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ 0 & 1-k & k^2-1 \\ 0 & 2k & k-1 \end{pmatrix} =: A'.$$

Basta describir el núcleo de la matriz A'. Para seguir triangulando, sería deseable entender si podemos tomar como pivot al coeficiente de A' que está en el lugar $(2, 2)$; esto dependerá de si el coeficiente es nulo. Separamos en casos, entonces, según si $1-k$ sea cero o no; esto es, según si $k = 1$ o no.

Cuando $k = 1$, la matriz A' es igual a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, y la ecuación $A'x = 0$ equivale al sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_2 = 0. \end{cases}$$

La segunda ecuación equivale a requerir que $x_2 = 0$; condicionado a este hecho, la primera ecuación equivale a pedir $x_1 - x_3 = 0$. En definitiva, esto muestra que el núcleo de A' consiste de los $x \in \mathbb{R}^3$ de la forma $(x_1, 0, x_1) = x_1(1, 0, 1)$ para cierto $x_1 \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $\ker(A') = \ker(A) = \langle (1, 0, 1) \rangle$ tiene dimensión 1 en este caso.

Habiendo tratado el caso $k = 1$, de aquí en más podremos suponer sin inconvenientes que $k \neq 1$. A partir de A' obtenemos ahora una matriz A'' como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ 0 & 1-k & k^2-1 \\ 0 & 2k & k-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2\to\frac{1}{1-k}F_2} \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ 0 & 1 & -1-k \\ 0 & 2k & k-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2k\cdot F_2\to F_3} \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ 0 & 1 & -1-k \\ 0 & 0 & 2k^2+3k-1 \end{pmatrix} =: A''.$$

Si $2k^2 + 3k - 1 \neq 0$, la matriz A'' es triangular y no tiene ceros en su diagonal, por lo que el sistema homogéneo asociado sólo tiene como solución al vector cero. En tal caso, debe ser $\ker(A) = \ker(A'') = 0$, que tiene dimensión 0.

Resta analizar qué sucede cuando $2k^2 + 3k - 1 = 0$. Como este resulta un polinomio cuadrático en k, un cálculo explícito muestra que la ecuación anterior sólo puede valer si $k = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$. Si bien puede parecer que esto va a volver las cuentas más engorrosas, lo único relevante aquí es cuántas filas no nulas se obtuvieron al triangular; veamos por qué. Para los valores de k anteriormente mencionados, la última fila de A'' está compuesta por ceros, y el sistema homogéneo asociado a esta matriz se lee entonces

$$\begin{cases} x_1 - kx_2 - x_3 & = 0, \\ x_2 - (1+k)x_3 & = 0. \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son entonces las que cumplen que $x_2 = (1+k)x_3$ y que

$$x_1 = kx_2 + x_3 = k(1+k)x_3 + x_3 = (1+k+k^2)x_3.$$

Por lo tanto

$$\ker(A) = \ker(A'') = \langle (1+k+k^2, 1+k, 1) \rangle,$$

que es un subespacio de dimensión 1 pues el vector que lo genera es no nulo —basta observar que su tercera coordenada es 1.

Finalmente, hemos obtenido entonces que

$$\dim_{\mathbb{R}}(\ker(A)) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1, k = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} \text{ ó } k = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$\square$