Álgebra Lineal

Primer cuatrimestre 2024

Soluciones del segundo examen parcial

Ejercicio 1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Pruebe que $\operatorname{tr}(A^{100}) = 2^{101}$ y $\operatorname{tr}(A^{101}) = 0$.

Solución. Un cálculo muestra que

$$\chi_A = x(x-2)(x+2).$$

Luego, como χ_A tiene todas sus raíces simples, la matriz A es diagonalizable. Se sigue entonces que es semejante a una matriz diagonal,

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

y en consecuencia

$$A^i \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^i & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^i \end{pmatrix}.$$

Como la traza es invariante por cambios de bases,

$$\operatorname{tr}(A) = 2^i + (-2)^i = \begin{cases} 2^{i+1} & i \text{ par} \\ 0 & i \text{ impar} \end{cases}.$$

□

Ejercicio 2. Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal y $\chi_f = (X-\lambda_1)^{k_1}\cdots(X-\lambda_r)^{k_r}$ la factorización de su polinomio característico en factores irreducibles. Pruebe que para todo $p \in \mathbb{C}[X]$ se tiene que

$$\chi_{p(f)} = (X - p(\lambda_1))^{k_1}\cdots(X-p(\lambda_r))^{k_r}.$$

Solución. Existe una base B tal que $|f|_B$ es triangular (ya sea por el teorema de Jordan o por el Ejercicio 15 de la práctica 6),

$$|f|_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Luego, calculando el polinomio característico de esta matriz (y observando que debe coincidir con χ_f) se sigue que

$$(x-\lambda_1)^{k_1}\cdots(x-\lambda_r)^{k_r} = \chi_f = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n).$$

Por lo tanto, los números $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ son exactamente los autovalores de f contados con multiplicidad. Reordenando la base B de ser necesario, podemos suponer que en la diagonal tenemos λ_1 en las primeras k_1 entradas, luego λ_2 en las siguientes k_2, etc.:

$$|f|_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_1 & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Como para todo $n \geq 1$ es

$$|f|_B^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_1^n & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r^n \end{pmatrix}$$

luego para todo $p = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$ la matriz $|p(f)|_B = a_0 I + a_1 |f|_B + \cdots + a_d |f|_B^d$ tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a_0 + a_1\lambda_1 + \cdots + a_d\lambda_1^d & * & \cdots & * \\ 0 & a_0 + a_1\lambda_1 + \cdots + a_d\lambda_1^d & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 + a_1\lambda_r + \cdots + a_d\lambda_r^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ 0 & p(\lambda_1) & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & p(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

Consecuentemente,

$$\chi_{p(f)} = \chi_{|p(f)|_B} = (X - p(\lambda_1))^{k_1}\cdots(X - p(\lambda_r))^{k_r}.$$

□

Ejercicio 3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(I) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal. Si S es un subespacio f-invariante de $\mathbb{V}$, entonces existe $p \in \mathbb{k}[X]$ tal que $S = \ker(p(f))$.

(II) Si $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ es una matriz nilpotente tal que $\ker A$ tiene dimensión 3 y $A^2 \neq 0$, entonces es semejante a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución. I) **Falso**. Consideramos $\mathbb{V}$ cualquier $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión ≥ 2 y $f = \mathbf{0}\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ la transformación lineal nula[1]. Luego $f(S) = 0 \subset S$ para todo subespacio $S \leq \mathbb{V}$, de manera tal

[1] Un contraejemplo de espíritu muy similar se consigue tomando $f = \mathrm{id}_{\mathbb{V}}$.

que todo subespacio es f-invariante. Por otro lado, si $p = a_0 + \cdots + a_d X^d \in \Bbbk[X]$ es un polinomio, entonces

$$p(f) = a_0 \operatorname{id}_{\mathbb{V}} + a_1 \cdot \mathbf{0} \cdots + a_d \mathbf{0}^d = a_0 \operatorname{id}_{\mathbb{V}}$$

y

$$\ker(p(f)) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_0 \neq 0 \\ \mathbb{V} & \text{si } a_0 = 0 \end{cases}.$$

En particular, cualquier subespacio que no sea ni 0 ni $\mathbb{V}$ **no** puede ser de la forma $\ker(p(\mathbf{0}))$.

ii) **Verdadero**. Como $\dim \ker A = 3$, la matriz A tiene tres bloques en su forma de Jordan. Debe tener alguno de tamaño mayor a dos, pues si no se tendría que $A^2 = 0$. La única posibilidad restante, dado que la matriz es de 5×5, es que tenga dos bloques de tamaño 1 y uno de tamaño 3. Como la matriz del enunciado cumple la misma propiedad, el teorema de Jordan nos dice que es semejante a A.

□

Ejercicio 4 (Ejercicio 10 de la práctica 8). Sea $(\mathbb{V}, \langle -, - \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea S un subespacio de $\mathbb{V}$. Probar que la proyección ortogonal $p \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ sobre S es autoadjunta.

Solución 1. Veamos que

$$\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$$

para todo $x, y \in \mathbb{V}$ (por unicidad de la transformación adjunta, será entonces $p = p^*$ como queremos ver). Dado que $\mathbb{V} = S \oplus S^\perp$, existen $s, s' \in S$ y $t, t' \in S^\perp$ tales que $x = s + t$ e $y = s' + t'$. Por lo tanto

$$\langle p(x), y \rangle = \langle s, s' + t' \rangle = \langle s, s' \rangle + \langle s, t' \rangle = \langle s, s' \rangle,$$

y del mismo modo

$$\langle x, p(y) \rangle = \langle s + t, s' \rangle = \langle s, s' \rangle.$$

□

Solución 2. Si $B = \{s_1, \ldots, s_k\}$ es una b.o.n. de S, entonces

$$p(x) = \langle x, s_1 \rangle s_1 + \cdots + \langle x, s_k \rangle s_k$$

para todo $x \in \mathbb{V}$. Luego, dados $x, y \in \mathbb{V}$ arbitrarios, la linealidad del producto interno nos dice que

$$\langle p(x), y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \langle x, s_i \rangle s_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle x, s_i \rangle \langle s_i, y \rangle.$$

Luego

$$\langle x, p(y) \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^{k} \langle y, s_i \rangle s_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle x, \langle y, s_i \rangle s_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} \overline{\langle y, s_i \rangle} \langle x, s_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle s_i, y \rangle \langle x, s_i \rangle = \langle p(x), y \rangle.$$

□