Álgebra Lineal

Primer cuatrimestre 2024

Soluciones del primer examen parcial

Ejercicio 1. Sean $\mathbb{k}$ un cuerpo y $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, exhibiendo una demostración o un contraejemplo según corresponda:

(a) Sea $n = \dim(\mathbb{V})$. Si S es un sistema de generadores para $\mathbb{V}$, entonces todo subconjunto $T \subseteq S$ de cardinal n es una base de $\mathbb{V}$.

(b) Sea $T\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal, y sean $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{V}$. Si $\{T(x_1), \dots, T(x_k)\}$ es linealmente independiente, entonces $\{x_1, \dots, x_k\}$ es linealmente independiente.

Solución. El ítem (a) es **falso**. Por ejemplo, el conjunto $S = \{(1,0), (0,1), (2,0)\}$ genera a $\mathbb{R}^2$, pero sin embargo el subconjunto $T = \{(1,0), (2,0)\}$ de cardinal $2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ no es una base de $\mathbb{R}^2$. El ítem (b) es **verdadero**: si $\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_k x_k = 0$ para ciertos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{k}$, aplicando T se obtiene que

$$0 = T(0) = T(\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_k x_k) = \alpha_1 T(x_1) + \cdots \alpha_k T(x_k).$$

Por lineal independencia de $\{T(x_1), \dots, T(x_k)\}$, deben ser $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Esto muestra que no hay combinaciones lineales no-triviales de $\{x_1, \dots, x_k\}$ que tengan por resultado a 0, demostrando así que este último conjunto es linealmente independiente. □

Ejercicio 2. Sean $\mathbb{V} = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 5}[X] : p(1) = p'(1) = 0\}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$, y $T\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ la transformación lineal dada por $T(p) = p'''$. Exhiba bases B de $\mathbb{V}$ y B' de $\mathbb{W}$ tales que

$$|T|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución. El ejercicio es similar al Ejercicio 21 1) de la práctica 3. Antes de comenzar, enfatizamos que no hay una única solución: cualquier elección de bases B y B' que cumplan la condición del enunciado responderá satisfactoriamente lo pedido.

Que existan bases $B = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ de $\mathbb{V}$ y $B' = \{q_1, q_2, q_3\}$ de $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ tales que $|T|_{BB'}$ sea la matriz del enunciado, recordando que la i-ésima columna de $|T|_{BB'}$ es $(T(p_i))_{B'}$, equivale a conseguir conjuntos linealmente independientes $\{p_1, p_2, p_3, p_4\} \subset \mathbb{V}$ y $\{q_1, q_2, q_3\} \subset \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ que cumplan:

$$\begin{cases} T(p_1) &= q_1 \\ T(p_2) &= q_1 + q_2 \\ T(p_3) &= q_3 \\ T(p_4) &= 0 \end{cases}$$

Esto nos dice que p_4 debe pertenecer a $\ker(T)$, que q_1 y q_3 están determinados por ser la imagen de p_1 y p_3, y que $q_2 = T(p_2) - q_1 = T(p_2) - T(p_1) = T(p_2 - p_1)$. En particular, la base B' estará completamente determinada por B. Podemos proceder, entonces, como sigue:

Paso 1. construir una base $B = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ tal que $p_4 \in \ker(T)$;

Paso 2. definir $B' = \{T(p_1), T(p_2 - p_1), T(p_3)\}$ y probar que es base, para lo cual, por dimensión, basta ver que este conjunto es linealmente independiente.

En primer lugar, buscamos una mejor descripción del espacio vectorial $\mathbb{V}$ en términos de una base; luego la modificaremos para que contenga un vector de $\ker(T)$ si es necesario. Hay varias formas de hacer esto; por ejemplo alguna de las siguientes dos, "a mano" o utilizando algunas observaciones vistas en clase, respectivamente:

(i) considerar un elemento arbitrario $p = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 + fX^5$, y plantear las ecuaciones $p(1) = 0$ y $p'(1) = 0$. Esto dice que $a + b + c + d + e + f = 0$ y que $b + 2c + 3d + 4e + 5f = 0$. Luego $b = -2c - 3d - 4e - 5f$ y

$$a = -b - c - d - e - f = -(-2c - 3d - 4e - 5f) - c - d - e - f = c + 2d + 3e + 4f.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} p &= c + 2d + 3e + 4f + (-2c - 3d - 4e - 5f)X + cX^2 + dX^3 + eX^4 + fX^5 \\ &= c(1 - 2X + X^2) + d(2 - 3X + X^3) + e(3 - 4X + X^4) + f(4 - 5X + X^5) \end{aligned}$$

y así $\mathbb{V} = \langle 1 - 2X + X^2, 2 - 3X + X^3, 3 - 4X + X^4, 4 - 5X + X^5 \rangle$. Como polinomios de distintos grados dos a dos resultan linealmente independientes, más aún $B_0 = \{1 - 2X + X^2, 2 - 3X + X^3, 3 - 4X + X^4, 4 - 5X + X^5\}$ es base de $\mathbb{V}$.

(ii) Recordar que $\{1, X - 1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4, (X-1)^5\}$ es base de $\mathbb{R}_{\leq 5}[X]$, ya que estos son 6 polinomios linealmente independientes –pues tienen distinto grado dos a dos. Como hemos observado en clase, su base dual $\{\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_5\}$ está dada por

$$\partial_i(p) = \frac{1}{i!} \cdot p^{(i)}(1).$$

En estos términos,

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= \{p \in \mathbb{R}_{\leq 5}[X] : p(1) = p'(1) = 0\} = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 5}[X] : \partial_0(p) = 0, \partial_1(p) = 0\} \\ &= \langle \partial_0, \partial_1 \rangle^\circ = \langle (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4, (X-1)^5 \rangle. \end{aligned}$$

Nuevamente utilizando que polinomios de grados distintos dos a dos son linealmente independientes, se obtiene que $B_0 = \{(X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4, (X-1)^5\}$ es base de $\mathbb{V}$.

De aquí en más consideraremos la base $B_0 = \{(X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4, (X-1)^5\}$ pero la opción (i) o cualquier otra se puede utilizar de forma similar. El siguiente paso es obtener un elemento de $\ker(T)$ para extenderlo a una base de $\mathbb{V}$. En nuestro caso[1] ya tenemos un tal elemento que forma parte de B_0; concretamente, $p_4 := (X-1)^2 \in \ker(T)$ pues tiene grado 2 y T consiste en derivar tres veces.

[1] Para una base arbitraria $B_0 = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ de $\mathbb{V}$, se pude plantear la ecuación $0 = T(af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4) = af_1''' + bf_2''' + cf_3''' + df_4'''$ y de allí obtener un sistema de ecuaciones lineales para a, b, c, d que permite describir $\ker(T)$ en términos de generadores. Luego, tomamos un elemento allí y extendemos a una base B de $\mathbb{V}$ ayudándonos de la base B_0 dada. También se puede calcular una base de $\ker(T)$ sin depender de B_0; ver el final de la solución.

Formamos entonces una base que tenga a p_4 en el último lugar. Una opción es $B = \{(X-1)^3, (X-1)^4, (X-1)^5, (X-1)^2\}$. Ahora definimos, siguiendo el paso 2,

$$B' = \{T((X-1)^3), T((X-1)^4 - (X-1)^3), T((X-1)^5)\} = \{6, 24X - 30, 60(X-1)^2\},$$

y para terminar el ejercicio es suficiente ver que es base. En este caso, los polinomios tienen distinto grado dos a dos así que ya hemos terminado.

Hasta aquí la resolución del ejercicio exhibiendo bases B y B' concretas. Concluimos la resolución con algunas observaciones generales.

En el paso 2, si construimos B como en el paso 1, el conjunto B' determinado por B siempre será base. En particular, el procedimiento dado siempre funciona y no dependemos de haber elegido B de alguna forma conveniente, siempre y cuando contenga un vector de $\ker(T)$ en el último lugar.

Antes de demostrar este hecho, observemos primero que $\ker(T)$ tiene dimensión 1. En efecto: si $p \in \ker(T)$, entonces el grado de p es menor o igual a 2, de forma que $p = a + bX + cX^2$. Por otro lado, como $p \in \mathbb{V}$, debe ser $a + b + c = 0$ y $b + 2c = 0$; calculando se obtiene $\ker(T) = \langle 1 - 2X + X^2 \rangle$.

Sean ahora $B = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ una base de $\mathbb{V}$ tal que $p_4 \in \ker(T)$, y sea $B' = \{T(p_1), T(p_2 - p_1), T(p_3)\}$. Veamos que B' es linealmente independiente. Si tenemos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 = \alpha T(p_1) + \beta T(p_2 - p_1) + \gamma T(p_3) = T(\alpha p_1 + \beta(p_2 - p_1) + \gamma p_3) = T((\alpha - \beta)p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3),$$

entonces $(\alpha - \beta)p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 \in \ker(T)$. Como $\dim \ker(T) = 1$, y $p_4 \in \ker(T) \setminus \{0\}$, luego $\ker(T) = \langle p_4 \rangle$. Existe entonces $\eta \in \mathbb{R}$ tal que

$$(\alpha - \beta)p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 + \eta p_4 = 0.$$

Por lineal independencia de B, es $\eta = \gamma = \beta = 0$ y $\alpha = \beta$, luego α también es nulo. Esto concluye la observación y, con ello, la resolución del ejercicio. $\square$

Ejercicio 3. Sean $\Bbbk$ un cuerpo y $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal entre dos $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita. Sea B una base de $\mathbb{W}$. Probar que:

(a) existen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathbb{V}^\vee$ tales que $(f(x))_B = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ para todo $x \in \mathbb{V}$.

(b) $\ker(f) = \bigcap_{i=1}^{m} \ker(\varphi_i)$.

(c) f es un monomorfismo si y sólo si $\mathbb{V}^\vee = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_m \rangle$.

Solución. Comenzamos por (a). Sea $m := \dim \mathbb{W}$ y $B^\vee = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ la base dual a B. Recordemos que para todo $w \in \mathbb{W}$ se tiene que

$$(w)_B = (\psi_1(w), \ldots, \psi_m(w)).$$

Aplicando esto a $w = f(x)$ para un vector $x \in \mathbb{V}$ dado, se obtiene

$$(f(x))_B = (\psi_1(f(x)), \ldots, \psi_m(f(x))).$$

Definimos entonces $\varphi_i := \psi_i \circ f$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Así,

$$(f(x))_B = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)).$$

Notar que cada función φ_i es una transformación lineal, pues f y cada función ψ_i lo son, y la composición de transformaciones lineales es lineal. Esto concluye la prueba de (a).

Pasamos ahora a (b). Un vector $x \in \mathbb{V}$ pertenece a $\ker(f)$ si y sólo si $f(x) = 0$, lo cual sucede equivalentemente cuando $(f(x))_B = 0$. Usando (a), es decir, que $(f(x))_B = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$, obtenemos entonces que $x \in \ker(f)$ si y sólo si $\varphi_i(x) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. En consecuencia $x \in \ker(f)$ si y sólo si $x \in \cap_{i=1}^m \ker(\varphi_i)$; es decir, se tiene que $\ker(f) = \cap_{i=1}^m \ker(\varphi_i)$.

Por último, hacemos (c). Recordemos que si $\varphi \in \mathbb{V}^\vee$, entonces $\langle\varphi\rangle^\circ = \ker(\varphi)$ y de igual modo $\langle\varphi\rangle = \ker(\varphi)^\circ$. La igualdad del ítem (b) se puede interpretar entonces como

$$\ker(f) = \bigcap_{i=1}^m \ker(\varphi_i) = \bigcap_{i=1}^m \langle\varphi_i\rangle^\circ = (\langle\varphi_1\rangle + \cdots + \langle\varphi_m\rangle)^\circ = \langle\varphi_1, \dots, \varphi_m\rangle^\circ.$$

Ahora bien, la transformación lineal f será monomorfismo si y sólo si $\ker(f) = 0$; en términos de la anterior igualdad, esto sucederá si y sólo si $\langle\varphi_1, \dots, \varphi_m\rangle^\circ = 0$. Tomando anuladores, llegamos a que $\ker(f) = 0$ si y sólo si $\langle\varphi_1, \dots, \varphi_m\rangle = \mathbb{V}^\vee$, lo cual establece la equivalencia pedida en (c). □

Ejercicio 4. Dado $n \in \mathbb{N}$, calcule el determinante de la matriz $M(n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida como $M(n)_{ij} = \text{mín}\{i, j\}$,

$$M(n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Solución. Comenzamos calculando algunos casos para n pequeño. Si $n = 1$, entonces $M(1) = (1)$ y $\det M(1) = 1$. Si $n = 2$, entonces

$$M(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y entonces $\det M(2) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 2 - 1 = 1$. Si $n = 3$, 4 ó 5, es

$$M(3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad M(4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad M(5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

No hay una única forma de proceder; a continuación describimos sólo una de ellas —en línea con el cálculo del determinante de $A_{ij} = \text{máx}\{i, j\}$ visto en clase— pero hay muchas otras.

Un patrón a observar es que los cambios entre una columna y la siguiente siempre suceden por debajo de la diagonal. En particular, si $n \geq 2$, la $n-1$-ésima y n-ésima columna de $M(n)$ son

$$M(n)e_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \\ n-1 \end{pmatrix}, \qquad M(n)e_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{pmatrix},$$

y sólo difieren en un único número. Luego su resta es

$$M(n)e_n - M(n)e_{n-1} = M(n)e_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, como el determinante es invariante por operaciones de columnas,

$$\begin{aligned}
\det M(n) &= \det \left(M(n)e_1 \middle| \cdots \middle| M(n)e_{n-1} \middle| M(n)e_n \right) \\
&= \det \left(M(n)e_1 \middle| \cdots \middle| M(n)e_{n-1} \middle| M(n)e_n - M(n)e_{n-1} \right) \\
&= \det \left(M(n)e_1 \middle| \cdots \middle| M(n)e_{n-1} \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Desarrollando por cofactores con respecto a la última columna, se obtiene

$$\det M(n) = (-1)^{n+n} \det M(n-1) = \det M(n-1).$$

Inductivamente[2] se sigue que $\det M(n) = 1$ para todo n. Para concluir ilustramos el argumento de la demostración en un ejemplo, donde $n = 4$:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-1 \\ 1 & 2 & 2 & 2-2 \\ 1 & 2 & 3 & 3-3 \\ 1 & 2 & 3 & 4-3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} &= (-1)^{4+4} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-1 \\ 1 & 2 & 2-2 \\ 1 & 2 & 3-3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
= (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \det M(2) = 1.
\end{aligned}$$

□

[2] Más formalmente: hemos probado que $\det M(1) = 1$ y que si $n \geq 1$, entonces $\det M(n+1) = \det M(n)$. Por lo tanto, la afirmación $\det M(k) = 1$ es cierta para $k = 1$, y si es cierta para $k = n$ lo es para $k = n + 1$.