

Ejercicio 1. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) el espacio métrico X es completo;
- (b) toda familia $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados y no vacíos de X que cumplan:
 - $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$; y
 - $F_{n+1} \subset F_n$ para cada $n \geq 1$,

tiene un único punto en su intersección.

Solución. Veamos primero que (a) implica (b). Notemos primero que si $x, y \in \bigcap_{n \geq 1} F_n$ entonces $d(x, y) \leq \text{diam}(F_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y, tomando límite, debe ser $d(x, y) = 0$ y por tanto $x = y$. Esto nos dice que es suficiente ver que $\bigcap_{n \geq 1} F_n$ es no vacío. Para cada $n \geq 1$, consideremos $x_n \in F_n$. Veamos que la sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ es de Cauchy. En efecto: dado $\varepsilon > 0$, existe $N \geq 1$ tal que $\text{diam}(F_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$; si tomamos $n \geq m \geq N$, entonces $x_n \in F_n$, $x_m \in F_m \subset F_n$ y luego $d(x_n, x_m) \leq \text{diam}(F_n) < \varepsilon$. Consecuentemente, la completitud de X nos asegura que $(x_n)_{n \geq 1}$ converge a un punto $x \in X$. Dado $j \geq 1$, este punto es también límite de la subsucesión $(x_{j+k})_{k \geq 1}$ de $(x_n)_{n \geq 1}$, que por construcción está contenida en F_j . Como este último conjunto es cerrado, debe ser entonces $x \in F_j$, y como esto es cierto para todo $j \in \mathbb{N}$, finalmente $x \in \bigcap_{j \geq 1} F_j$.

Para terminar veamos que (b) implica (a). Consideremos $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de Cauchy y veamos que es convergente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $A_n = \{x_j : j \geq n\}$ y $F_n = \overline{A_n}$. Por construcción cada conjunto F_n es cerrado, y $F_{n+1} \subset F_n$. Afirmamos ahora que $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$. Sea $\varepsilon > 0$, y tomemos $n_0 \geq 1$ para el cual $i, j \geq n_0$ implica $d(x_i, x_j) < \varepsilon/4$. Si $n \geq n_0$ y $x, x' \in F_n$, por definición de clausura existen $x_i, x_j \in A_n$ a distancia menor que $\varepsilon/4$ de x e x' respectivamente y luego

$$d(x, x') \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, x') < \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Como esto es cierto para todo par de puntos de F_n , es $\text{diam}(F_n) \leq \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Habiendo visto que la familia $(F_n)_{n \geq 1}$ está en las hipótesis de (b), debe existir entonces $x \in \bigcap_{n \geq 1} F_n$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $x, x_n \in F_n$ y así $0 \leq d(x, x_n) \leq \text{diam}(F_n)$. Ambos extremos de esta última desigualdad tienden a cero, por lo que $d(x, x_n) \rightarrow 0$. En otras palabras, se tiene que $x_n \rightarrow x$. □

Ejercicio 2. Sean X un espacio métrico compacto e $I \subset C(X, \mathbb{R})$. Decimos que I es un *ideal* si para todo $f, g \in I$ y $h \in C(X, \mathbb{R})$, se tiene que $f + g \in I$ y $hf \in I$.

- (I) Pruebe que si I es un ideal y existe $f \in I$ que nunca se anula, entonces $I = C(X, \mathbb{R})$.
- (II) Pruebe que si I es un ideal y $I \neq C(X, \mathbb{R})$, entonces existe $p \in X$ tal que $f(p) = 0$ para toda $f \in I$.

Demostración. Si $f \in C(X, \mathbb{R})$ es nunca nula, entonces la función $1/f$ que envía $x \in X$ a $f(x)^{-1}$ es continua. Por lo tanto, si I es un ideal y $f \in I$ es una función nunca nula, debe ser $\text{cte}_1 = (1/f) \cdot f \in I$ y por lo tanto $g = g \cdot \text{cte}_1 \in I$ para toda $g \in C(X, \mathbb{R})$. Esto prueba (I); veamos ahora (II).

Si no existiera un cero común $p \in X$ a toda función de I , entonces para cada $p \in X$ debería existir una función $f \in I$ (que depende de p) tal que $f(p) \neq 0$. Por lo tanto, todo punto de X pertenece a algún abierto $U_f = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ con $f \in I$; hemos visto así que

$$X = \bigcup_{f \in I} U_f.$$

Como X es compacto, existen $f_1, \dots, f_n \in I$ tales que $X = U_{f_1} \cup \dots \cup U_{f_n}$. Dado que cada función f_i no se anula en U_{f_i} , la función $f_i^2 = f_i \cdot f_i \in I$ es estrictamente positiva en U_{f_i} y en general es no negativa en X . Por lo tanto

$$f := f_1^2 + \dots + f_n^2 \in I$$

nunca se anula en X . En efecto, todo $p \in X$ pertenece a algún abierto U_{f_i} y $f(p)$ consiste entonces de una suma de números reales no-negativos con al menos uno de ellos no nulo. Como I contiene una función que nunca se anula, debe ser $I = C(X, \mathbb{R})$. Esto termina de probar la afirmación contrarrecíproca a (II). \square

Ejercicio 3. Pruebe que los subespacios $C = S^1 \times (0, 1)$ y $T = \langle (1, 0, 0) \rangle \cup \langle (0, 1, 0) \rangle \cup \langle (0, 0, 1) \rangle$ de \mathbb{R}^3 no son homeomorfos.

Demostración. Si C y T fueran homeomorfos, un tal homeomorfismo $\varphi: T \rightarrow C$ se restringiría a un homeomorfismo entre $T \setminus \{(1, 0, 0)\}$ y $C \setminus \{\varphi((1, 0, 0))\}$. Basta ver entonces que $T' = T \setminus \{(1, 0, 0)\}$ es desconexo pero para todo $p \in C$ el espacio $C' = C \setminus \{p\}$ es arcoconexo.

Veamos primero que T' es desconexo. Notemos que el único punto de T cuya primera coordenada es 1 es $(1, 0, 0)$, por lo tanto T' está contenido en la unión de los abiertos de \mathbb{R}^3 dados por $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < 1\}$ y $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 1\}$, que cumplen $U \cap V \cap T' = \emptyset$ pues más aún $U \cap V = \emptyset$. Para terminar de ver que $\{U \cap T', V \cap T'\}$ es una desconexión de T' notemos que, por ejemplo, $(-2, 0, 0) \in U \cap T'$ y $(2, 0, 0) \in V \cap T'$, así que ambos conjuntos son no vacíos.

Veamos ahora que C' es arcoconexo, o lo que es lo mismo, que tiene una única componente arcoconexa. Escribamos $p = (z, t)$ con $z = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \in S^1$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ y $t \in (0, 1)$. Recordemos que tanto S^1 como $S^1 \setminus \{z\}$ son arcoconexos, ya que son la imagen de los conjuntos $[0, 2\pi)$ y $(0, 2\pi)$ via la función continua $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $t \mapsto (\cos(\alpha + t), \sin(\alpha + t))$.

En consecuencia los subespacios de C' dados por $A_1 = (S^1 \setminus \{z\}) \times (0, 1)$, $A_2 = S^1 \times (0, t)$ y $A_3 = S^1 \times (t, 1)$ son arcoconexos al ser producto de espacios arcoconexos¹.

Se sigue que todo par de puntos en cada subespacio A_i puede unirse por un arco allí, que en particular es un arco en C' , así que todos los puntos de A_i pertenecen a la misma componente arcoconexa de C' . Como además $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, los puntos de A_1 están en la misma componente arcoconexa de C' que los de A_2 , y similarmente $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$ así que todo punto de A_3 está en la misma componente arcoconexa que los puntos de A_2 . Por lo tanto todo punto de C' está en la misma componente arcoconexa que cualquier punto de A_2 , es decir, hay una única componente arcoconexa en C' . \square

Ejercicio 4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado completo y $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de puntos en E . Pruebe que si la serie $\sum_{n \geq 1} \|x_n\|$ converge, entonces $\sum_{n \geq 1} x_n$ converge; es decir, la sucesión de sumas parciales $S_N = \sum_{n=1}^N x_n$ converge.

Demostración. Como E es completo, basta ver que $(S_N)_{N \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que para cada $N, M \geq 1$ se tiene que

$$\|S_M - S_N\| = \left\| \sum_{n=N+1}^M x_n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^M \|x_n\| \leq \sum_{n \geq N} \|x_n\|. \quad (1)$$

¹Aquí usamos que si X y Y son espacios arcoconexos, entonces $X \times Y$ también lo es, ya que para unir a $(x, y) \in X \times Y$ con $(x', y') \in X \times Y$ por un camino podemos tomar $\beta(t) = (\gamma(t), \eta(t))$ con γ un camino de x a x' en X y η un camino de y a y' en Y .

Como la serie $\sum_{n \geq 1} \|x_n\|$ es convergente, la sucesión $(\sum_{n \geq N} \|x_n\|)_{N \geq 1}$ de «colas» de la serie tiende a cero, y por lo tanto existe $N_0 \geq 1$ tal que $\sum_{n \geq N} \|x_n\| < \varepsilon$ para todo $N \geq N_0$. En vista de (1), esto dice que si $N, M \geq N_0$ entonces $\|S_N - S_M\| < \varepsilon$, lo cual concluye la prueba. \square